

ΔΜΠΣ στις Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες
(για την Τρίτη 24 Ιανουαρίου 2017)

ΑΣΚΗΣΗ 1 Στρίβουμε ένα τίμιο κέρμα μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά μια από τις ακολουθίες ΚΓΚ ή ΓΓΓ. Αν εμφανιστεί πρώτα η ΚΓΚ, τότε κερδίζουμε $A=32$. Αν εμφανιστεί πρώτα η ΓΓΓ, τότε χάνουμε 20. Έχουμε δικαίωμα να σταματήσουμε και πριν εμφανιστεί κάποια από τις δύο ακολουθίες χωρίς να πάρουμε ή να χάσουμε χρήματα. Σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το αναμενόμενο κέρδος μας, επιλέγοντας βέλτιστα πότε να σταματήσουμε.

- Υπολογίστε το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος και τη βέλτιστη πολιτική διακοπής, αν το παιχνίδι πρέπει να έχει λήξει σε 7 το πολύ γύρους.
- Κάντε το ίδιο, αν δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των γύρων που μπορούμε να περιμένουμε.
- Για τη βέλτιστη πολιτική του (2), βρείτε τον αναμενόμενο αριθμό στριψιμάτων μέχρι να σταματήσουμε.
- Πώς αλλάζει (αν αλλάζει) η απάντηση στο ερώτημα (2) αν $A=45$;

ΑΣΚΗΣΗ 2 Ρίχνουμε ένα ζάρι και προσθέτουμε τα αποτελέσματα των ζαριών. Μπορούμε να σταματήσουμε όποτε θέλουμε και να πάρουμε το σκορ που έχουμε αθροίσει σε χρυσάφι. Αν όμως φέρουμε τεσσάρι πριν σταματήσουμε, το παιχνίδι τελειώνει και δεν παίρνουμε τίποτα.

- Βρείτε το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος και τη βέλτιστη πολιτική διακοπής, αν μπορούμε να ρίξουμε το πολύ 5 ζαριές.
- Κάντε το ίδιο, αν δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των ζαριών που μπορούμε να ρίξουμε.
- Για τη βέλτιστη πολιτική του (2), υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσουμε κάποιο χρυσάφι.
- Για τη βέλτιστη πολιτική του (2), υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό ζαριών που θα ρίξουμε μέχρι να σταματήσουμε.

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Παρκάρισμα στους ακεραίους) Περιπατάμε προς τα δεξιά κατά μήκος των ακεραίων με $p(k, k+1) = 1$ και θέλουμε να σταματήσουμε όσο το δυνατόν κοντύτερα στο 0. Κάθε ακέραιος είναι ελεύθερος με πιθανότητα $q = \frac{1}{10}$ και κατειλημμένος με πιθανότητα $1 - q = \frac{9}{10}$, ανεξάρτητα από τους άλλους ακεραίους. Μπορούμε να σταματήσουμε στον ακέραιο k μόνο αν αυτός είναι ελεύθερος και το κόστος που πληρώνουμε τότε είναι $G(k) = |k|$. Μπορούμε να δούμε αν ένας ακέραιος είναι ελεύθερος ή όχι μόνο αν αφού έχουμε φτάσει σε αυτόν. Θέλουμε να βρούμε την πολιτική διακοπής που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος που θα έχουμε ακολουθώντας την.

- Δείξτε ότι αν $X_0 = n \geq 0$, τότε η βέλτιστη πολιτική διακοπής είναι να σταματήσουμε στον επόμενο ακέραιο που θα βρούμε ελεύθερο και τότε το αναμενόμενο κόστος που έχουμε είναι n , αν ο n είναι ελεύθερος, και $n + \frac{1}{p}$, αν ο n είναι κατειλημμένος.
- Βρείτε τη βέλτιστη πολιτική διακοπής και υπολογίστε το αναμενόμενο κόστος, αν $X_0 = -100$.
- Αν ακολουθήσουμε την βέλτιστη πολιτική διακοπής, ποια είναι η πιθανότητα να σταματήσουμε στην καλύτερη θέση που θα μπορούσαμε να είχαμε σταματήσει, αν ξέραμε ποιες θέσεις είναι ελεύθερες;

ΑΣΚΗΣΗ 4 Έστω $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ μια μαρκοβιανή αλυσίδα με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρήστε το πρόβλημα βέλτιστης διακοπής

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)].$$

Δείξτε ότι αν η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι martingale και η G είναι κυρτή, τότε $V(x) = \mathbb{E}_x[G(X_N)]$, επομένως η πολιτική αναμονής μέχρι το τέλος του χρονικού ορίζοντα N είναι βέλτιστη.

ΑΣΚΗΣΗ 5 Επαναλάβετε το ερώτημα του ερωτήματος (4) της Άσκησης 1, αν θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε το αναμενόμενο κέρδος με έκπτωση 20% για κάθε βήμα, αν δηλαδή το κέρδος μας στην περίπτωση που εμφανιστεί η ΚΓΚ μετά από τ βήματα είναι $0,8^\tau \times 45$, ενώ η ζημιά μας αν εμφανιστεί η ΓΓΓ σε τ βήματα είναι $0,8^\tau \times 20$.

ΑΣΚΗΣΗ 6 Θεωρούμε μια διαδικασία $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ με $S_0 = 864$ και $S_n = S_{n-1}\xi_n$ για $n \in \mathbb{N}$, όπου οι ξ_n είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{P}[\xi_n = \frac{5}{3}] = \frac{2}{3}$ και $\mathbb{P}[\xi_n = \frac{2}{3}] = \frac{1}{3}$. Υπολογίστε το

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_3} \mathbb{E} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^\tau (864 - S_\tau)^+ \right]$$

και βρείτε τον χρόνο διακοπής τ που επιτυγχάνει το μέγιστο. Κάντε το ίδιο για το πρόβλημα

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_3} \mathbb{E} \left[\left(\frac{3}{4} \right)^\tau \left(864 - \frac{S_0 + \dots + S_\tau}{\tau + 1} \right)^+ \right]$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 Διατυπώστε και λύστε ένα δικό σας πρόβλημα βέλτιστης διακοπής.