ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ VIII

Άσκηση 1 Άσκηση 91 από τις Σημειώσεις

Άσκηση 2 Ξανακάντε την Άσκηση 1γ του προηγούμενου Φυλλαδίου, χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά το εργοδικό θεώρημα για να υπολογίσετε τον λόγο του όγκου της $(d+1)$-διάστατης σφαίρας προς τον όγκο του κυλίνδρου C_{d+1}. Συγκεκριμένα, προσομοιώστε N βήματα της αλυσίδας στην οποία καταπιέζετε τα άλματα εκτός του κυλίνδρου και μετρήστε σε ποιο ποσοστό από αυτά η αλυσίδα βρέθηκε στη σφαίρα. Το εργοδικό θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι για μεγάλο N αυτό το ποσοστό προσεγγίζει τον λόγο των όγκων των δύο σχημάτων.

α) Είναι τώρα η εκτίμησή σας για τον όγκο της d-διάστατης σφαίρας ακόμα πιο ακριβής;

β) Μπορείτε να κάνετε αυτόν τον υπολογισμό με σχετικά μικρό σφάλμα ακόμα και σε πολύ μεγάλες διαστάσεις, π.χ. για $d = 100$;

Άσκηση 3 Σ' ένα παιχνίδι έχετε το δικαίωμα να ρίξετε ένα ζάρι όσες φορές θέλετε και να εισπράξετε το άθροισμα των ζαριών σας αν δεν φέρετε κανέναν άσο μέχρι να αποφασίσετε να σταματήσετε. Αν σε κάποια ζαριά σας φέρετε άσο τότε το παιχνίδι τελειώνει χωρίς να κερδίσετε τίποτα. Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το αναμενόμενο κέρδος από το παιχνίδι. Περιμένουμε ότι η βέλτιστη στρατηγική θα ήταν να σταματήσουμε μόλις το άθροισμα των ζαριών μας ξεπεράσει κάποιο κατώφλι k, το οποίο θέλουμε να προσδιορίσουμε αριθμητικά.

Ο κώδικας `opt_stop.py` προσομοιώνει για $k = 0, 1, \ldots, 40$ $N = 1.000$ παρτίδες του παιχνιδιού με κατώφλι διακοπής k και υπολογίζει το μέσο κέρδος με κάθε στρατηγική. Στην έξοδό του επιστρέφει τη στρατηγική με την οποία σημειώθηκε το μεγαλύτερο κέρδος και ένα διάγραμμα με το υπολογιζόμενο κέρδος ως συνάρτηση του k.

α) Τρέξτε τον κώδικα και δείτε το διάγραμμα μερικές φορές. Παρατηρήστε ότι η μεγάλη διασπορά στην εκτίμηση του κέρδους δεν μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη στρατηγική.

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της διασποράς. Η μέθοδος Monte Carlo μας προσφέρει έναν αριθμητικό τρόπο υπολογισμού μιας ποσότητας x, αν μπορούμε να φανταστούμε τη x ως την αναμενόμενη τιμή κάποιας τυχαίας μεταβλητής X που μπορούμε να προσομοιώσουμε. Η εκτιμήτρια Monte Carlo της x

$$\bar{x}_N = \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N}$$

συγκλίνει στη x από το νόμο των μεγάλων αριθμών καθώς $N \to \infty$, ενώ η διασπορά της για πεπερασμένο N είναι $\frac{\sigma^2}{N}$, όπου σ^2 είναι η διασπορά της X. Στο παιχνίδι μας, το κέρδος σε μία παρτίδα είναι μια τυχαία μεταβλητή με μεγάλη διασπορά σ^2. Παίρνει είτε την τιμή μηδέν, αν φέρουμε άσο πριν ξεπεράσουμε το κατώφλι k, είτε κάποια από τις τιμές $k+2, k+3, \ldots, k+6$. Έτσι η διασπορά της εκτιμήτριάς μας είναι κι αυτή σχετικά μεγάλη, αφού οι δυνατές τιμές του κέρδους απέχουν αρκετά από την αναμενόμενη τιμή του.

β) Ένας τρόπος να ελαττώσουμε τη διασπορά της εκτιμήτριας είναι να αυξήσουμε το N και επομένως τον υπολογιστικό χρόνο. Δεκαπλασιάστε το N και επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα. Έλυσε αυτή η αλλαγή εντελώς το πρόβλημα που είχαμε;

Ένας άλλος τρόπος είναι να φανταστούμε το x ως τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής Y με μικρότερη διασπορά από τη X. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να γίνει αυτό και αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως τεχνικές *ελάττωσης διασποράς* (variance reduction). Θα δοκιμάσουμε στο παιχνίδι μας την τεχνική της *δειγματοληψίας κατά σημαντικότητα* (importance sampling).

Αν ρίχναμε ένα ζάρι χωρίς άσο, το κέρδος μας σε μία παρτίδα με κατώφλι διακοπής k θα έπαιρνε μόνο κάποια από τις τιμές $k+2, k+3, \ldots, k+6$ και θα είχε πολύ μικρότερη διασπορά. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να εκφράσουμε το μέσο κέρδος $\mathbb{E}[K]$ στο αρχικό μας παιχνίδι με κατώφλι διακοπής k μέσω του κέρδους που θα είχε αυτή η στρατηγική, αν το ζάρι μας δεν είχε άσο. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[K] &= \sum_m \sum_{(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in J_k} x_m \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m] \\ &= \sum_m \sum_{(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in J_k} x_m \Big(\frac{1}{6}\Big)^m.\end{aligned}$$

όπου

$$J_k = \{(x_0, x_1, \ldots, x_m) : x_0 = 0, x_{i+1} \in \{x_i + 2, \ldots, x_i + 6\}, i = 0, 1, \ldots, m-1, x_{m-1} \leq k, x_m > k\}$$

είναι εκείνες οι τροχιές που ξεπερνούν το k σε m ζαριές, χωρίς ενδιάμεσα να έχει έρθει άσος. Αν τώρα $\{Y_n\}_n$ είναι η αλυσίδα των σκορ μας όταν ρίχνουμε ένα ζάρι χωρίς άσο, έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\big[Y_{n+1} = \ell \,|\, Y_n = j\big] = \frac{1}{5}, \quad \ell \in \{j+2, \dots, j+6\}.$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε

$$\mathbb{E}\big[K\big] = \sum_m \sum_{(x_0,x_1,\dots,x_m)\in J_k} x_m \Big(\frac{5}{6}\Big)^m \mathbb{P}\big[Y_1 = x_1, \dots, Y_m = x_m\big] = \mathbb{E}\Big[K' \big(\,\frac{5}{6}\,\big)^M\Big], \tag{1}$$

όπου K' είναι το κέρδος μας και M είναι ο αριθμός των ζαριών που ρίξαμε προκειμένου να ξεπεράσουμε το κατώφλι k με το πειραγμένο ζάρι.

γ) Χρησιμοποιήστε την (1) για να υπολογίσετε με Monte Carlo ποια είναι η βέλτιστη στρατηγική διακοπής και ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος μας από το παιχνίδι με αυτήν τη στρατηγική.