Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΕΜΦΕ & ΣΗΜΜΥ) - Παρασκευή 9 Σεπτεμβρίου 2016

ΑΣΚΗΣΗ 1 (50 μονάδες) Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ έχει πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & * \\ \frac{1}{3} & * & \frac{1}{3} \\ * & \frac{2}{3} - p & p \end{pmatrix},$$

όπου p είναι μια άγνωστη πραγματική παράμετρος.

α) Σε ποιούς αριθμούς αντιστοιχούν τα `$*$' ; Ποια είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η p;

β) Δείξτε ότι η αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη, γνησίως επαναληπτική και απεριοδική.

γ) Βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας, ως συνάρτηση του p.

δ) Αν η αλυσίδα ξεκινά από το 1, ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος της πρώτης επιστροφής στο 1; Σε βάθος χρόνου, ποιο ποσοστό του χρόνου της ξοδεύει η αλυσίδα στην κατάσταση 1;

ε) Σε ένα δείγμα από $N = 10^5$ μονοπάτια της αλυσίδας βρήκαμε ότι σε 37.500 από αυτά, μετά από $M = 1.000$ βήματα, η αλυσίδα βρέθηκε στην κατάσταση 3. Εκτιμήστε την άγνωστη παράμετρο p.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (30 μονάδες) Σ' έναν μελλοντικό κόσμο διαστημικά λεωφορεία αναχωρούν από τη Γη για τη Σελήνη ως μια διαδικασία Poisson $\{D_t : t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda = 4$ ανά ημέρα. Οι ταξιδιώτες προσέρχονται ως μια διαδικασία Poisson $\{A_t : t \geq 0\}$ με ρυθμό $\mu = 50$ ανά ώρα, ανεξάρτητη από την $\{D_t : t \geq 0\}$ και φεύγουν με το πρώτο διαθέσιμο διαστημικό λεωφορείο. Αυτή τη στιγμή η ώρα είναι 12 το μεσημέρι.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσουν 20 ακριβώς ταξιδιώτες μέχρι τις 12:30μμ;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσουν 20 ακριβώς ταξιδιώτες μέχρι τις 12:30μμ, δεδομένου ότι από τις 11:30πμ μέχρι τώρα έφτασαν 20 ταξιδιώτες;

γ) Δεδομένου ότι από τις 11:30πμ μέχρι τώρα έφτασαν 20 ταξιδιώτες, ποια είναι η πιθανότητα 8 ακριβώς από αυτούς να έφτασαν μεταξύ 11:40 και 11:50;

δ) Ποια είναι η πιθανότητα το μεθεπόμενο λεωφορείο να αναχωρήσει πριν τα μεσάνυχτα;

ε) Αν N είναι το πλήθος των επιβατών σε μία πτήση υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[N = k\big]$, για $k = 0,1,2,\ldots$

στ) Αν Λ είναι το πλήθος των λεωφορείων που θα έχουν αναχωρήσει μέχρι τη στιγμή που θα φτάσει ο χιλιοστός ταξιδιώτης (μετρώντας από τώρα και μετά) υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[\Lambda = k\big]$, για $k = 0,1,2,\ldots$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (20 μονάδες) Θεωρήστε έναν απλό, συμμετρικό τυχαίο περίπατο $\{X_n : n \geq 0\}$ στους ακεραίους με $X_0 = x \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$T_\ell = \inf\{n \geq 0 : X_n = \ell\} \qquad \text{και} \qquad M = \sup_{1 \leq n \leq T_0} X_n$$

τον χρόνο πρώτης άφιξης στο $\ell \in \mathbb{Z}$ και το μέγιστο του περιπάτου μέχρι αυτός να φτάσει για πρώτη φορά στο 0, αντίστοιχα.

α) Δείξτε ότι για κάθε $\ell \in \mathbb{Z}$ με $\ell \geq x$ έχουμε $\mathbb{P}\big[T_\ell < T_0 \big| X_0 = x\big] = x/\ell$.

β) Εκφράστε το ενδεχόμενο $\{T_\ell < T_0\}$ με τη βοήθεια της τυχαίας μεταβλητής M και δείξτε ότι για κάθε $\ell \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\mathbb{P}\big[M = \ell \big| X_0 = x\big] = \begin{cases} \frac{x}{\ell(\ell+1)}, & \text{αν } \ell \geq x \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Διάρκεια Εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!