ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014

Άσκηση 1 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ p & 2/3 - p & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n = 1 \,|X_0 = 1\big]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στις περιπτώσεις: α) $p = 0$, β) $p = 1/6$, γ) $p = 2/3$.
Ενθυμούμενοι ότι $(P^n)_{ij} = \mathbb{P}\big[X_n = j \,|X_0 = i\big]$, πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε το $\lim_{n\to\infty} P^n$ χωρίς πολλές πράξεις;

Άσκηση 2 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/12 & 3/4 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αν π_n είναι η κατανομή της αλυσίδας μετά από n βήματα, δείξτε ότι ανεξάρτητα από την αρχική της κατανομή π_0, έχουμε $\pi_n \to \pi_*$ για κάποια κατανομή π_* που θα προσδιορίσετε. Δείξτε επιπλέον ότι $\|\pi_n - \pi_*\| \leq C(n + 1)2^{-n}$ για κάποια σταθερά $C > 0$.

Άσκηση 3 Ένα ηλεκτονικό ζάρι είναι προγραμματισμένο ώστε σε κάθε ζαριά η πιθανότητα να φέρουμε ό,τι και στην προηγούμενη είναι 1/11, ενώ τα υπόλοιπα 5 δυνατά αποτελέσματα έχουν όλα πιθανότητα 2/11. Αν η πρώτη ζαριά που φέρνουμε είναι 6, ποια είναι η πιθανότητα η n-οστή ζαριά μας να είναι πάλι 6;

Άσκηση 4 Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

α) Ταξινομήστε τις κλάσεις επικοινωνίας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.
β) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[X_n = 5|X_0 = 1\big]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
γ) Αν $T_x = \inf\{k \geq 0 : \; X_k = x\}$ είναι ο χρόνος πρώτης άφιξης στην x ποια είναι η πιθανότητα $\mathbb{P}\big[T_1 < T_3|X_0 = 2\big]$.
δ) Βρείτε τρεις τουλάχιστον αναλλοίωτες κατανομές της αλυσίδας.

Άσκηση 5 Θεωρήστε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots, 8\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

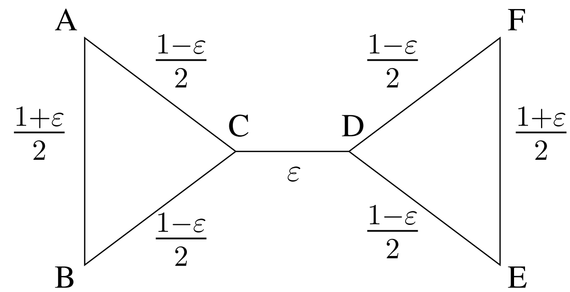
α) Ταξινομήστε τις κλάσεις επικοινωνίας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.
β) Αν $X_0 = 1$ υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n = x\big]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{X}$.
γ) Βρείτε για κάθε κλειστή κλάση μια αναλλοίωτη κατανομή που στηρίζεται σε αυτήν την κλάση.
δ) Αν $X_0 = 4$ υπολογίστε την πιθανότητα να καταλήξουμε σε καθεμια από τις κλειστές κλάσεις της αλυσίδας.
ε) Ποιο είναι το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[X_n = 1|X_0 = 4\big]$;

Άσκηση 6 Δύο παίκτες Α,Β παίζουν το εξής παιχνίδι: στρίβουν διαδοχικά ένα νόμισμα μέχρι να εμφανιστεί είτε η ακολουθία ΚΓΚ είτε η ΓΓΓ. Αν εμφανιστεί πρώτα η ΚΓΚ νικητής είναι ο Α, διαφορετικά νικητής είναι ο Β. Σε κάθε στρίψιμο το κέρμα έχει πιθανότητα p να φέρει γράμματα, ανεξάρτητα από τις άλλες προσπάθειες. Για ποια τιμή του p οι δύο παίκτες έχουν την ίδια πιθανότητα νίκης;

Άσκηση 7 Μια αράχνη κινείται τυχαία στον ιστό της που αποτελείται από 3 ομόκεντρα εξάγωνα, τις ακτίνες τους και το κοινό τους κέντρο. Ξεκινώντας από το μεγαλύτερο εξάγωνο, πόσα βήματα κατά μέσο όρο θα της πάρει για να φτάσει στο κέντρο του ιστού; Από την στιγμή που θα φτάσει στο κέντρο του ιστού, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων μέχρι να επιστρέψει πάλι στο κέντρο;

Άσκηση 8 Έχετε €1 και θέλετε να συμπληρώσετε γρήγορα ένα ποσό €10. Για το σκοπό αυτό παίζετε ένα παιχνίδι με τους εξής κανόνες. Σε κάθε γύρο η πιθανότητα νίκης σας είναι $0 < p < 1$, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα των προηγούμενων γύρων. Πριν από κάθε γύρο επιλέγετε το ποσό που στοιχηματίζετε. Αν κερδίσετε σας επιστρέφεται το διπλάσιο του στοιχήματός σας, αν όχι χάνετε το ποσό που ποντάρατε σ' αυτόν τον γύρο. Έχετε αποφασίσει να ποντάρετε όσα χρήματα έχετε αν αυτά είναι λιγότερα από €5, διαφορετικά όσα χρειάζεστε για να φτάσετε τα €10.
α) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσετε ποτέ τα €10 με αυτήν τη στρατηγική;
β) Ποια είναι η πιθανότητα να φτάσετε ποτέ τα €10 αν σε κάθε γύρο ποντάρετε €1;
γ) Με την βοήθεια του υπολογιστή παραστήστε σε ένα κοινό γράφημα τα παραπάνω αποτελέσματα σαν συνάρτηση του $p \in (0,1)$. Τι παρατηρείτε;
δ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να χάσετε τα χρήματά σας ή να φτάσετε τα €10 σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις;

Άσκηση 9 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα κινείται ανάμεσα σε 6 καταστάσεις. Οι δυνατές μεταβάσεις εικονίζονται σαν ακμές στο διπλανό σχήμα. Οι πιθανότητες μετάβασης είναι συμμετρικές, δηλ. $p(x,y) = p(y,x)$ για κάθε $x, y \in \{A,B,C,D,E,F\}$ και δίνονται και αυτές στο σχήμα. Π.χ. $p_{CD} = p_{DC} = \varepsilon$, με $0 < \varepsilon < 1$.
α) Αν $X_0 = C$ υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να φτάσει στο σύνολο $\{E,F\}$ πριν φτάσει για πρώτη φορά στο A.
β) Ορίζουμε $T_\varepsilon = \inf\{m \geq 0 : X_m \in \{D,E,F\}\}$ τον χρόνο εισόδου στο $\{D,E,F\}$. Υπολογίστε για $x \in \{A,B,C\}$ την $\mathbb{E}\big[\, T_\epsilon \mid X_0 = x\big]$.



γ) Αν $X_0 = A$ και $s > 0$, υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon}\big]$ και αποδείξτε ότι ο χρόνος $\varepsilon T_\varepsilon$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 3 καθώς $\varepsilon \to 0$.

Άσκηση 10 Έχουμε 5 χαρτιά της τράπουλας, τα τέσσερα είναι 7 κούπα και το ένα ρήγας σπαθί. Τα απλώνουμε στη σειρά σε ένα τραπέζι και σε κάθε βήμα επιλέγουμε ένα από τα δύο ακραία χαρτιά (το αριστερότερο με πιθανότητα 2/3, το δεξιότερο με πιθανότητα 1/3) και το βάζουμε στην μέση.
α) Κατασκευάστε ένα μαρκοβιανό μοντέλο για αυτή τη διαδικασία, περιγράψτε δηλαδή έναν κατάλληλο χώρο καταστάσεων και τις αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης.
β) Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας σας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.
γ) Αν αρχικά ο ρήγας βρίσκεται στο κέντρο ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκεται στο κέντρο μετά από 4 βήματα;
δ) Ποια είναι η κατανομή ισορροπίας της αλυσίδας;
ε) Σε βάθος χρόνου, σε ποιο ποσοστό των βημάτων ο ρήγας βρίσκεται αριστερά; στο κέντρο;
στ) Αν αρχικά ο ρήγας είναι αριστερά ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός κινήσεων μέχρι να βρεθεί για πρώτη φορά δεξιά;

Άσκηση 11 Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$$

α) Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της αλυσίδας.
β) Αν $X_0 = 1$ υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο πρώτης επιστροφής $T_1^+ = \inf\{k > 0 :\ X_k = 1\}$ στην κατάσταση 1.

Άσκηση 12 Ένα έντομο κινείται στις κορυφές ενός n-γώνου. Σε κάθε βήμα του μετακινείται με πιθανότητα $p = 2/3$ στην γειτονική κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, και με πιθανότητα $1 - p = 1/3$ στην γειτονική κορυφή αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Δείξτε χωρίς πράξεις ότι η αλυσίδα αυτή έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή και βρείτε ποια είναι αυτή.

Άσκηση 13 Θεωρήστε μια αλυσίδα Markov στον $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ με $P(k, k+1) = \frac{1}{k+1}$, $P(k, k-1) = \frac{k}{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{X}$. Χρησιμοποιώντας την συνθήκη ακριβούς ισορροπίας βρείτε μια αναλλοίωτη κατανομή της. Είναι αυτή μοναδική; Είναι η αλυσίδα γνήσια επαναληπτική; Αν $X_0 = 5$ πόσες κατά μέση τιμή φορές θα βρεθεί η αλυσίδα στο 0 μέχρι να επιστρέψει για πρώτη φορά στο 5;

Άσκηση 14 Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι να φέρουμε 4 διαδοχικές φορές 6. Ποια η πιθανότητα να τα καταφέρουμε σε πεπερασμένο χρόνο; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ζαριών μέχρι να συμβεί αυτό; Ποια θα ήταν η απάντησή αν το παιχνίδι τελείωνε στην πρώτη εμφάνιση της ακολουθίας 6,5,4,3;

Άσκηση 15 Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ έχει πιθανότητες μετάβασης $p_{k,k+1} = p < 1$, $p_{k,0} = 1 - p$, $\forall k \in \mathbb{X}$. Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της.

Άσκηση 16 Στην άσκηση 5, αν $X_0 = 4$, τι μπορείτε να πείτε για το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n};$$

Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει; ποιες τιμές μπορεί να πάρει και με ποια πιθανότητα;

Άσκηση 17 Αν η X_n είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα σ' ένα χώρο $\mathbb{X}$ τότε η $Y_{n+1} = (X_n, X_{n+1})$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$. Ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης της Y; Αν η X έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή π, δείξτε ότι η y έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή την $\pi_*(j, k) = \pi(j)p(j, k)$.

Άσκηση 18 Με την βοήθεια και της προηγούμενης άσκησης δείξτε ότι αν η αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μη υποβιβάσιμη και κινείται σ' έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ και $f : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ τότε με πιθανότητα 1 έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_0, X_1) + f(X_1, X_2) + \cdots + f(X_{n-1}, X_n)}{n} = \sum_{(x,y)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}} f(x, y)\pi(x)p(x, y).$$

για οποιαδήποτε κατανομή της X_0.

Άσκηση 19 Στην άσκηση 2, σε βάθος χρόνου τι ποσοστό των μεταβάσεων γίνονται μεταξύ των καταστάσεων 1 και 2; Ποιο είναι το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[X_n = 1 | X_{n+1} = 2\big]?$$

Άσκηση 20 Δείξτε ότι για μια μαρκοβιανή αλυσίδα σε έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων με γεννήτορα L και αναλλοίωτη κατανομή π έχουμε

$$\sum_{x\in\mathbb{X}} \pi(x)f(x)Lf(x) = -\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{X}} \pi(x)p(x, y)\big(f(y) - f(x)\big)^2.$$

Συμπεράνετε ότι αν η αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη και $Lf(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{X}$ τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Άσκηση 21 Έστω $\{X_n\}_n$ μια μη υποβιβάσιμη αλυσίδα σε έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ με αναλλοίωτη κατανομή π. Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή Y ανεξάρτητη από τις $\{X_n\}$ και με κατανομή π, δηλαδή $\mathbb{P}\big[Y = x\big] = \pi(x)$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Ορίζουμε τώρα $T_Y = \inf\{k \geq 0 : \ X_k = Y\}$. Ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X_{T_Y}; Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \mathbb{E}\big[T_Y \mid X_0 = x\big]$ είναι σταθερή.

Άσκηση 22 Αν η $\{X_n\}_n$ μια μη υποβιβάσιμη αλυσίδα σε έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$ με γεννήτορα L και $x_0 \in \mathbb{X}$, υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$Lf(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases};$$

Άσκηση 23 Μπορούμε να φανταστούμε μια συνεχή συνάρτηση $X : [0, 1) \to \mathbb{R}$ ως μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον δειγματικό χώρο $\Omega = [0, 1)$. Εφοδιάζουμε τον Ω με το σύνηθες μέτρο, που δίνει στα διαστήματα $[a, b)$ πιθανότητα $b - a$. Ορίζουμε τώρα στον Ω την τυχαία μεταβλητή Y, με τιμές στο $\{0, 1, \dots, 9\}$ και τύπο $Y(x) = k$ αν $\frac{k}{10} \leq x < \frac{k+1}{10}$, $k = 0, 1, \dots, 9$. Υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[X \,\big|\, Y\big]$.

Άσκηση 24 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ανάλογα με το άθροισμα των ζαριών Y, επιλέγουμε έναν αριθμό X τυχαία, από το σύνολο $\{1, 2, \dots, Y\}$. Υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[X \big| Y\big]$ και επιβεβαιώστε ότι η μέση της τιμή είναι $\mathbb{E}\big[X\big]$.

Άσκηση 25 Ας θεωρήσουμε τον δειγματικό χώρο $\Omega = [0, 1)$ και την τυχαία μεταβλητή $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, με τύπο $Z(x) = x^2,\ x \in \Omega$. Ας θεωρήσουμε επίσης την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, όπου

$$X_n(x) = \frac{k}{2^n},\ x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}),\ k = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

Φτιάξτε τις γραφικές παραστάσεις των X_0, X_1, X_2, X_3. Στην συνέχεια, με την βοήθεια της Άσκησης 23, βρείτε τις $M_n = \mathbb{E}\big[Z \,\big|\, X_0, \dots, X_n\big]$ για $n = 1, 2, 3$ και ζωγραφίστε τις γραφικές παραστάσεις τους.

Άσκηση 26 Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, με $S_0 = x > 0$ και $S_n = S_{n-1} X_n,\ n \in \mathbb{N}$, όπου η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, τυχαίες μεταβλητές, με

$$\mathbb{P}\big[X_n = u\big] = q \in (0, 1), \qquad \mathbb{P}\big[X_n = d\big] = 1 - q, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

όπου $u, d > 0$. Βρείτε την ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι παράμετροι u, d, q, ώστε η $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ να είναι martingale. Είναι η στοχαστική διαδικασία $\{\log S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ martingale;

Άσκηση 27 Ρίχνετε ένα ζάρι, ώσπου το άθροισμα των ζαριών σας να φτάσει ή να ξεπεράσει τον αριθμό $\nu \in \mathbb{N}$. Αν $N \in \mathbb{N}$ είναι ο αριθμός των ζαριών που θα χρειαστεί να ρίξετε ώσπου να συμβεί αυτό, δείξτε ότι

$$\mathbb{E}\big[N\big] > \frac{2\nu}{7}.$$

Άσκηση 28 Για τον απλό, συμμετρικό, τυχαίο περίπατο στους ακεραίους $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, υπολογίστε την σταθερά α ώστε η διαδικασία $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, με

$$M_n = S_n^3 - \alpha n S_n,$$

να είναι martingale.

Άσκηση 29 Έστω $z \in (0, 1)$. Για έναν απλό, τυχαίο περίπατο στους ακεραίους, με $p(x, x+1) = p \in (0, 1)$ και $p(x, x-1) = 1 - p$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι η στοχαστική διαδικασία $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, με

$$M_n = \alpha^{S_n} z^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

είναι martingale, αν και μόνο αν

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)z^2}}{2pz}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής, για να δείξετε ότι, αν $S_0 = x \in \mathbb{N}$, η γεννήτρια συνάρτηση του χρόνου πρώτης άφιξης στο 0, $T_0 = \inf\{k \geq 0 : S_k = 0\}$ είναι η

$$\psi(z) = \mathbb{E}_x z^{T_0} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)z^2}}{2pz} \right)^x,\ z \in (0, 1).$$

Η γεννήτρια συνάρτηση έχει όλη την πληροφορία για την κατανομή του χρόνου T_0. Π.χ. έχουμε

$$\mathbb{P}_x\big[T_0 < \infty\big] = \lim_{z \uparrow 1} \psi(z) = \left(\frac{1 - |1 - 2p|}{2p} \right)^x = \begin{cases} 1 & , p \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^x & , p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Υπολογίστε με την βοήθεια της $\psi(z)$ και των παραγώγων της, τη μέση τιμή και τη διασπορά του T_0.

Άσκηση 30 Μπορούμε να εμπλουτίσουμε την γκάμα των martingale που σχετίζονται με μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, θεωρώντας συναρτήσεις που εξαρτώνται και από τον χρόνο. Δείξτε ότι, αν $\mathbb{E}\big[|f(n, X_n)|\big] < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, τότε η στοχαστική διαδικασία $\{M_n^f\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, με $M_0^f = f(0, X_0)$ και

$$M_n^f = f(n, X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(n+1, X_k) - f(n, X_k) + Lf(X_k) \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι $\mathcal{F}_n$-martingale.

Άσκηση 31 Για να βρούμε την γεννήτρια συνάρτηση ενός χρόνου άφιξης $T_A = \inf\{k \geq 0 : X_k \in A\}$,

$$\psi(z) = \mathbb{E}\big[z^{T_A}\big], \quad z \in (0,1),$$

μπορούμε να θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N}_0 \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(n,x) = z^n h(x)$. Ποιο ΠΣΤ πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $h : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, ώστε εφαρμόζοντας το Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής για την martingale της προηγούμενης άσκησης να βρίσκουμε την $\psi(z)$; Μπορείτε τώρα να βρείτε μόνοι σας, γιατί επιλέξαμε την συγκεκριμένη martingale στο Παράδειγμα που υπολογίσαμε την κατανομή του χρόνου άφιξης ενός τυχαίου περιπάτου στο $\{-R, R\}$;

Άσκηση 32 Θεωρήστε τον απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο στους ακεραίους, και την συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(k) = k^4$. Δείξτε ότι $Lf(k) = 6k^2 + 1$, και συμπεράνετε ότι η διαδικασία $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, με $M_0 = 0$ και

$$M_n = X_n^4 - X_n^2 - 6\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι martingale. Αν $X_0 = 0$ και $T_R = \inf\{k \geq 0 :\ |X_k| = R\}$ είναι ο χρόνος πρώτης εξόδου από το $\{-R+1, \ldots, R-1\}$, υπολογίστε την

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T_R} X_k^2\Big].$$

Άσκηση 33 Παίζουμε ένα ευνοϊκό παιγνίδι στο οποίο σε κάθε γύρο με πιθανότητα $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ διπλασιάζουμε το στοίχημά μας, και με πιθανότητα $1-p$ χάνουμε το ποσόν που στοιχηματήσαμε. Ξεκινάμε με αρχική περιουσία $S_0 > 0$ και αμέσως πριν τον n-οστό γύρο μπορούμε να στοιχηματήσουμε οποιοδήποτε ποσόν C_n μεταξύ του 0 και της περιουσίας μας μέχρι εκείνη τη στιγμή S_{n-1}. Επομένως, αμέσως μετά το n-οστό γύρο η περιουσία μας θα είναι

$$S_n = S_{n-1} + C_n X_n,$$

όπου οι $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, τυχαίες μεταβλητές, που παίρνουν την τιμή $+1$ με πιθανότητα p και την τιμή -1 με πιθανότητα $1-p$. Η C_n πρέπει να ικανοποιεί την ανισότητα $0 \leq C_n \leq S_{n-1}$ και μπορεί να εξαρτάται από τα αποτελέσματα των προηγούμενων γύρων, αλλά θα πρέπει οπωσδήποτε να είναι $\mathcal{F}_{n-1}$-μετρήσιμη. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε μια στρατηγική που μεγιστοποιεί τον αναμενόμενο ρυθμό μεγέθυνσης

$$r_n = \frac{1}{n}\mathbb{E}\big[\log(S_n/S_0)\big].$$

Δείξτε ότι ανεξαρτήτως της στρατηγικής βάσει της οποίας επιλέγουμε τα στοιχήματά μας, η στοχαστική διαδικασία $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ με τύπο

$$M_n = \log(S_n) - nH(p), \qquad \text{όπου } H(p) = p\log p + (1-p)\log(1-p) + \log 2$$

ικανοποιεί την ανισότητα

$$\mathbb{E}\big[M_{n+1}\,\big|\,\mathcal{F}_n\big] \leq M_n$$

και συμπεράνετε ότι $r_n \leq H(p)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε τώρα μια στρατηγική (ένα τρόπο να επιλέγετε τα στοιχήματά σας $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), τέτοια ώστε η $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ να είναι martingale και δείξτε ότι, με αυτή τη στρατηγική έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{n}\log\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = H(p),$$

με πιθανότητα 1.