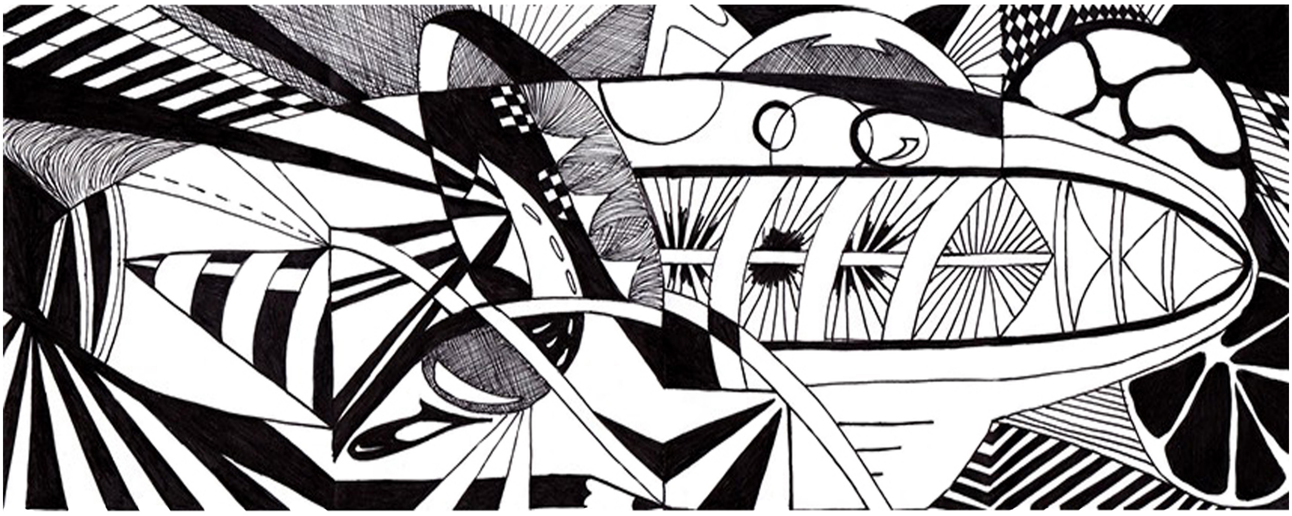


ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Μιχάλης Λουλάκης

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΜΙΧΑΛΗΣ ΛΟΥΛΑΚΗΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία

Συγγραφή

Μιχάλης Λουλάκης

Κριτικός αναγνώστης

Δημήτρης Χελιώτης

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Θεόφιλος Τραμπούλης

Τεχνική Επεξεργασία: Μανώλης Γκαραγκούνης-Βλατάκης

Εξώφυλλο: Έλενα Ζακυνθινού

ISBN: 978-960-603-268-4

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Εισαγωγή

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται σε φοιτητές που έχουν παρακολουθήσει κάποιο εισαγωγικό μάθημα Θεωρίας Πιθανοτήτων και ενδιαφέρονται να γνωρίσουν τη μαθηματική θεωρία των Χρηματοοικονομικών.

Η μαθηματική μοντελοποίηση χρηματοοικονομικών αγορών είναι ένα δύσκολο εγχείρημα, καθώς οι αγορές δεν υπόκεινται σε νόμους της φύσης, αλλά μάλλον σε χαρακτηριστικά της ανθρώπινης συμπεριφοράς. Όπως σε κάθε μοντελοποίηση, χρειάζεται να βρει κανείς μια ικανοποιητική τομή ανάμεσα σε μοντέλα που είναι απλά και μπορεί κανείς να τα κατανοήσει και να τα αναλύσει, και σε μοντέλα που είναι ρεαλιστικά, αλλά είναι συχνά δύσκολο ή αδύνατο να αναλυθούν. Ο Στοχαστικός Λογισμός επιτρέπει σήμερα την κατανόηση αρκετά πολύπλοκων οικονομικών μοντέλων, απαιτεί όμως εξοικείωση με στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου, όπως η κίνηση Brown και προχωρημένες τεχνικές για την ανάλυση αυτών των διαδικασιών, όπως το Λήμμα του Itô και το Θεώρημα αναπαράστασης των martingale. Αυτό αναστέλλει την εισαγωγή στη Μαθηματική Χρηματοοικονομία μέχρι το προχωρημένο προπτυχιακό ή το μεταπτυχιακό επίπεδο σπουδών.

Στις σημειώσεις αυτές παρουσιάζονται πολύ απλά υποδείγματα αγορών σε διακριτό χρόνο. Για την ανάλυσή τους αρκούν οι γνώσεις που αποκτά ένας προπτυχιακός φοιτητής μαθηματικών από ένα εισαγωγικό μάθημα Θεωρίας Πιθανοτήτων, χωρίς να απαιτείται γνώση της Θεωρίας Μέτρου. Σε αυτά τα μοντέλα παρουσιάζονται οι βασικές αρχές της Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας, αλλά με τέτοιο τρόπο που η γενίκευσή τους σε πολυπλοκότερα μοντέλα να προκύπτει αβίαστα

Το τελευταίο κεφάλαιο αυτών των σημειώσεων αφορά το υπόδειγμα Black & Scholes και τον τρόπο με τον οποίον τα διακριτά μοντέλα που θα μελετήσουμε το προσεγγίζουν οριακά, καθώς η λεπτότητα της διαμέρισης του χρόνου τείνει στο μηδέν. Με αυτόν τον τρόπο ο αναγνώστης εισάγεται στα υποδείγματα συνεχούς χρόνου και μπορεί στη συνέχεια να μελετήσει τη σχετική βιβλιογραφία.

Τα μοντέλα που παρουσιάζονται σε αυτές τις σημειώσεις έχουν προκύψει με πολλές παραδοχές που συχνά δεν ικανοποιούνται στον πραγματικό κόσμο. Ο αναγνώστης θα πρέπει λοιπόν να τα αντιμετωπίσει με προσοχή. Είναι κατάλληλα για να κατανοήσει κανείς τις βασικές αρχές της Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας και να φωτίσουν κάποια αδρά, ποιοτικά χαρακτηριστικά των πραγματικών αγορών, αλλά σε καμία περίπτωση δεν είναι ένα εργαλείο στο οποίο μπορεί να βασίσει κανείς την επενδυτική του στρατηγική.

Το κείμενο αυτό ξεκίνησε να γράφεται όταν δίδασκα τα μαθήματα *Μαθηματική Χρηματοοικονομία I & II* στο Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Ευχαριστώ όλους τους φοιτητές που παρακολούθησαν το μάθημα και βοήθησαν με τα σχόλιά τους στην οργάνωση της ύλης και ιδιαίτερα την Ελένη Δραμουντάνη, τη Μαρίνα Μωραΐτη και τον Νίκο Ροδουσάκη. Ευχαριστώ επίσης τον συνάδελφο Ιωάννη Αθανασόπουλο για τις πολλές συζητήσεις που είχαμε σχετικά με την οργάνωση αυτών των μαθημάτων. Ευχαριστώ τέλος τον γλωσσικό επιμελητή Θεόφιλο Τραμπούλη και τον κριτικό αναγνώστη Δημήτρη Χελιώτη για τα σχόλιά τους και τον φοιτητή της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ Μανώλη Γκαραγκούνη-Βλατάκη, που είναι υπεύθυνος για την ηλεκτρονική υπόσταση αυτών των σημειώσεων.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Τα βασικά χρηματοοικονομικά παράγωγα και η αρχή της μη επιτηδειότητας

1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα μιλήσουμε για την αξία του χρήματος στον χρόνο, θα γνωρίσουμε τα βασικότερα χρηματοοικονικά παράγωγα, τα οποία θα αποτελέσουν το κεντρικό αντικείμενο του βιβλίου. Θα γνωρίσουμε επίσης το αξίωμα της Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας που είναι η *αρχή της μη επιτηδειότητας* (principle of no arbitrage). Αυτό το αξίωμα είναι το βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη των παραγώγων. Για παρόμοιο υλικό μπορείτε να δείτε και την αναφορά [5].

1.2 Η αξία του χρήματος στον χρόνο

Γνωρίζουμε από την εμπειρία μας ότι οι τράπεζες πληρώνουν τόκους στους καταθέτες τους και χρεώνουν τόκους σε όσους δανείζονται από αυτές. Κατά μια έννοια, ο τόκος είναι το ενοίκιο που εισπράττει κάποιος προκειμένου να παραχωρήσει ένα κεφάλαιο που του ανήκει για κάποια χρονική περίοδο. Στο τέλος της περιόδου, το κεφάλαιο του επιστρέφεται και γι' αυτό λέμε ότι η συγκεκριμένη επένδυση είναι χωρίς κίνδυνο (risk-free). Ο τόκος είναι το κέρδος που αποφέρει αυτή η επένδυση και το επιτόκιο (interest rate) είναι ο ρυθμός απόδοσής της. Προκειμένου να συγκρίνουμε διαφορετικές επενδύσεις, το επιτόκιο αναφέρεται πάντα σε ετήσια βάση.

Παράδειγμα 1 Πριν από έξι μήνες ανοίξατε λογαριασμό σε μια τράπεζα και καταθέσατε €500. Σήμερα ο λογαριασμός σας πιστώθηκε με €5 τόκο. Ο ρυθμός απόδοσης της επένδυσής σας είναι 1% ανά έξι μήνες, δηλαδή 2% ανά έτος. Επομένως, το επιτόκιο που σας πρόσφερε η τράπεζά σας ήταν 2%. Ένας φίλος σας τοποθέτησε σήμερα €1.000 κλειστά, σε ένα προθεσμιακό λογαριασμό και σε δύο χρόνια θα έχει στον λογαριασμό του €1.060. Ο ρυθμός απόδοσης της επένδυσής του είναι 6% ανά 2 έτη, δηλαδή 3% ανά έτος. Επομένως, το επιτόκιο που του πρόσφερε η τράπεζά του ήταν 3%.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, προσέξτε ότι, αν δεν αποσύρετε τους τόκους που πιστώθηκαν στον λογαριασμό σας, σε έξι μήνες θα εισπράξετε τόκο και γι' αυτό το ποσόν. Ο λογαριασμός σας θα πιστωθεί σε αυτήν την περίπτωση με τόκο €505× 2%/έτος × 0,5 έτος =€5,05 και τελικά θα έχετε €510,05. Βλέπουμε ότι, παρότι το επιτόκιο είναι 2%, η επένδυσή σας απέφερε κέρδος περισσότερο από 2% στη διάρκεια ενός έτους. Αυτό συνέβη γιατί ο τόκος που εισπράξατε στο εξάμηνο ανατοκίστηκε. Επομένως, προκειμένου να αξιολογήσουμε μακροπρόθεσμα την απόδοση μιας κατάθεσης, χρειάζεται να λάβουμε υπόψιν και πόσο συχνά αποφέρει τόκους.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι μια τράπεζα προσφέρει επιτόκιο r και πληρώνει τόκους n φορές τον χρόνο.

Ένα αρχικό κεφάλαιο $A(0)$ θα αποφέρει τόκους $A(0) \times \frac{r}{n}$ την πρώτη φορά που θα πληρωθούν τόκοι. Το συνολικό κεφάλαιο που θα βρίσκεται τότε στον λογαριασμό είναι

$$A\big(\frac{1}{n}\big) = A(0)\big(1 + \frac{r}{n}\big).$$

Αυτό θα λειτουργήσει ως αρχικό κεφάλαιο για τη δεύτερη περίοδο διάρκειας $\frac{1}{n}$ του έτους. Στο τέλος της δεύτερης περιόδου, μαζί με τους τόκους που θα πληρωθούν σε αυτήν την περίοδο, το κεφάλαιο θα έχει γίνει

$$A\big(\frac{2}{n}\big) = A\big(\frac{1}{n}\big) \times \big(1 + \frac{r}{n}\big) = A(0)\big(1 + \frac{r}{n}\big)^2.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, αν ο χρόνος t, μετρημένος σε έτη, είναι πολλαπλάσιο της περιόδου ανατοκισμού $1/n$, τότε το αρχικό κεφάλαιο θα έχει ανατοκιστεί nt φορές μέχρι το χρόνο t και το κεφάλαιο στον λογαριασμό θα είναι

$$A(t) = A(0)\big(1 + \frac{r}{n}\big)^{nt}.$$

Αν επιχειρούσατε να αποσύρετε τα χρήματα σας κάποια χρονική στιγμή t που δεν είναι πολλαπλάσιο του $\frac{1}{n}$, το κεφάλαιό σας θα είχε ανατοκιστεί $[nt]$ φορές. Μαζί με τους τόκους που αναλογούν μέχρι τη στιγμή t, τα χρήματα που θα παίρνατε θα ήταν

$$A(t) = A(0)\big(1 + \frac{r}{n}\big)^{[nt]}\big(1 + r(t - \frac{[nt]}{n})\big). \tag{1.1}$$

Η ακολουθία $n \mapsto \big(1 + \frac{r}{n}\big)^{nt}\big(1 + r(t - \frac{[nt]}{n})\big)$ είναι αύξουσα. Αυτό δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο να αποδειχθεί, αλλά διαισθητικά σημαίνει ότι όσο πιο συχνά ανατοκίζεται η κατάθεσή μας, τόσο μεγαλύτερη απόδοση έχει. Υπάρχει όμως ένα όριο στην αύξηση αυτής της απόδοσης. Όταν $n \to \infty$, όταν δηλαδή ο ανατοκισμός είναι συνεχής, η αρχική μας επένδυση $A(0)$ θα έχει αξία

$$A(t) = A(0)e^{rt}$$

τη χρονική στιγμή t. Παρότι ο συνεχής ανατοκισμός (continuous compounding) είναι πρακτικά ανέφικτος, πρόκειται για ένα χρήσιμο θεωρητικό εργαλείο που οδηγεί στην απλοποίηση εκφράσεων όπως η (1.1). Επιπλέον, για οποιοδήποτε σχήμα ανατοκισμού με επιτόκιο r_1, υπάρχει ένα ισοδύναμο επιτόκιο r, το οποίο με συνεχή ανατοκισμό δίνει την ίδια απόδοση στο τέλος κάθε περιόδου ανατοκισμού. Προκειμένου να βρούμε το επιτόκιο r αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$\big(1 + \frac{r_1}{n}\big) = e^{\frac{r}{n}} \Leftrightarrow r = n\log(1 + \frac{r_1}{n}).$$

Για το λόγο αυτό, θα ακολουθήσουμε σε όλο το βιβλίο τη σύμβαση ότι ο ανατοκισμός είναι συνεχής. Ένας καταθετικός λογαριασμός με συνεχή ανατοκισμό που προσφέρει επιτόκιο r είναι το παράδειγμα που μπορείτε να έχετε στο μυαλό σας για την έννοια του προϊόντος χωρίς κίνδυνο με σταθερό επιτόκιο.

Ορισμός 1 Ονομάζουμε προϊόν χωρίς κίνδυνο (risk-free asset) με σταθερό επιτόκιο r ένα προϊόν η αξία του οποίου μεταβάλλεται στον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$A(t) = A(0)e^{rt}.$$

Ένα βασικό χαρακτηριστικό του προϊόντος χωρίς κίνδυνο είναι ότι γνωρίζουμε σήμερα την αξία που θα έχει στο μέλλον. Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να συγκρίνουμε ποσά που καταβάλλονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αν μπορούμε να δανείζουμε και να δανειζόμαστε χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο r. Ένα ευρώ σήμερα θα πρέπει να έχει την ίδια αξία με e^{rT} ευρώ, τα οποία πρόκειται να καταβληθούν κάποια μελλοντική χρονική στιγμή T. Αυτό συμβαίνει γιατί, αν είχατε ένα ευρώ σήμερα, θα μπορούσατε να το επενδύσετε χωρίς κίνδυνο και να εισπράξετε e^{rT} ευρώ τη χρονική στιγμή T. Αντίστοιχα, ένα ποσόν A, το οποίο θα πληρωθεί κάποια μελλοντική χρονική στιγμή T, είναι ισοδύναμο με ένα ποσόν Ae^{-rT} σήμερα. Για το λόγο αυτό, όταν μπορούμε να δανείζουμε και να δανειζόμαστε με σταθερό επιτόκιο r, λέμε ότι η παρούσα αξία (present value) ενός ποσού A, το οποίο πρόκειται να καταβληθεί τη χρονική T, είναι Ae^{-rT}.

Ένα **απλό ομόλογο** (zero-coupon bond), με χρόνο ωρίμανσης (maturity) T και τιμή όψεως A, δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να εισπράξει από τον εκδότη του ομολόγου το ποσόν A, στον χρόνο T. Ο κάτοχος του ομολόγου λέμε ότι έχει τη θετική θέση (long position) σε αυτή τη συμφωνία, ενώ ο εκδότης του ομολόγου λέμε ότι έχει την αρνητική θέση (short position).

Είναι προφανές ότι ο εκδότης του ομολόγου δεν έχει κανένα λόγο να πάρει την αρνητική θέση σε αυτήν τη συμφωνία, αν δεν εισπράξει σήμερα ένα ποσόν από τον κάτοχο του ομολόγου. Η τιμή που συμφωνείται να καταβληθεί σήμερα, για ένα ομόλογο με ωρίμανση T και τιμή όψεως 1, είναι η παρούσα αξία αυτού του ομολόγου και τη συμβολίζουμε με $B(0, T)$. Αντίστοιχα, ένα ομόλογο με την ίδια ωρίμανση και τιμή όψεως A έχει παρούσα αξία $A \times B(0, T)$.

Στην ουσία, ο εκδότης ενός απλού ομολόγου δανείζεται σήμερα ένα ποσόν $A \times B(0, T)$ από τον αγοραστή του ομολόγου και αναλαμβάνει την υποχρέωση να επιστρέψει στον κάτοχο του ομολόγου το ποσόν A, τη συμφωνημένη χρονική στιγμή T. Αυτός είναι και ο τρόπος που συνήθως δανείζονται χρήματα τα κράτη και κάποιοι μεγάλοι οικονομικοί οργανισμοί. Αυτή η πράξη δανεισμού υποννοεί ένα συμφωνημένο σταθερό επιτόκιο r για τη χρονική περίοδο $(0, T)$, που μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$A \times B(0, T) = Ae^{rT} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{T} \ln B(0, T).$$

Τα απλά ομόλογα μας επιτρέπουν επομένως να συγκρίνουμε ποσά που καταβάλλονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, χωρίς να κάνουμε την υπόθεση ότι το επιτόκιο παραμένει σταθερό ή ότι είναι εκ των προτέρων γνωστό. Πράγματι, αν στην αγορά υπάρχουν προς διαπραγμάτευση ομόλογα με ωρίμανση T, η παρούσα αξία ενός ποσού A που θα καταβληθεί τη χρονική στιγμή T είναι $A \times B(0, T)$.

Τα ομόλογα είναι προϊόντα που μπορεί κανείς να διαπραγματευτεί και η αξία τους αλλάζει στον χρόνο, με τρόπο που δεν μπορούμε εν γένει να προβλέψουμε. Αν $0 < t < T$, συμβολίζουμε με $B(t, T)$ την αξία ενός ομολόγου με ωρίμανση T και τιμή όψεως 1 κατά τη χρονική στιγμή t. Αυτή δεν μπορεί να είναι γνωστή σήμερα, σε κάθε περίπτωση όμως υποννοεί ότι το ισοδύναμο σταθερό επιτόκιο δανεισμού $r(t, T)$ για την περίοδο (t, T) είναι τέτοιο ώστε

$$B(t, T) = e^{r(t,T)(T-t)} \Leftrightarrow r(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T).$$

Για τις ανάγκες αυτών των εισαγωγικών σημειώσεων, στις αγορές που θα θεωρήσουμε θα υπάρχει πάντα ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με σταθερό επιτόκιο r, το οποίο μπορούμε είτε να αγοράζουμε είτε να πουλάμε. Ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει όμως ότι στα περισσότερα επιχειρήματα μπορεί κανείς να αντικαταστήσει τον προεξοφλητικό παράγοντα (discounting factor) e^{-rT} από τον $B(0, T)$.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια σημείωση. Στην πραγματικότητα, τα προϊόντα χωρίς κίνδυνο και τα ομόλογα είναι προϊόντα με κίνδυνο. Υπάρχει πάντα ο κίνδυνος να μην σας επιστραφεί ποτέ ένα ποσόν που δανείσατε ή ένα απλό ομόλογο να μην πληρώσει την τιμή όψεως (να κουρευτεί). Ο κίνδυνος αυτός είναι το αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας Κινδύνου και συνήθως αντανακλάται στο ύψος του επιτοκίου δανεισμού. Σε αυτές τις σημειώσεις θα προσποιηθούμε ότι δεν υπάρχει, γιατί σκοπός μας είναι να μελετήσουμε τις αγορές των παραγώγων.

1.3 Τα βασικά χρηματοοικονομικά παράγωγα

Τα παράγωγα προϊόντα (derivative securities) είναι συμβόλαια που καθορίζουν μια συμφωνία, η οποία πρόκειται να υλοποιηθεί στο μέλλον και η αξία της οποίας εξαρτάται από κάποιο άλλο προϊόν, που θα το ονομάζουμε πρωτογενές (underlying asset). Για το λόγο αυτό ονομάζονται και εξαρτώμενες απαιτήσεις (contingent claims). Το πρωτογενές προϊόν (από το οποίο εξαρτάται η αξία του παραγώγου) μπορεί να είναι μια μετοχή, ένα ξένο νόμισμα, ένα αγαθό (π.χ. πετρέλαιο), ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα ομόλογο, ακόμα κι ένα άλλο παράγωγο προϊόν.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα παραγώγων.

Ένα **προθεσμιακό συμβόλαιο** (forward contract), με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης (delivery price) K, είναι μια συμφωνία για την αγορά του πρωτογενούς προϊόντος στον χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο αγοραστής λέμε ότι έχει τη θετική θέση (long position), ενώ ο πωλητής την αρνητική θέση (short position). Η αξία της συμφωνίας αυτής στην ωρίμανση εξαρτάται από την αξία S_T που θα έχει τότε το πρωτογενές προϊόν. Η απόδοση του προθεσμιακού συμβολαίου στην ωρίμανση για τον κάτοχο της θετικής θέσης είναι $S_T - K$ και μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

Ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς** (european call option), με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης (strike price) K, δίνει στον κάτοχό του (θετική θέση) το δικαίωμα να αγοράσει από τον αντισυμβαλλόμενο (αρνητική θέση) το πρωτογενές προϊόν στον χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο λογικός επενδυτής με θετική θέση θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς μόνο όταν η τιμή S_T του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση είναι μεγαλύτερη του K. Επομένως, η απόδοση για τον κάτοχο ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην ωρίμανση είναι $(S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}$ και είναι πάντοτε μη αρνητική.

Ένα **αμερικανικό δικαίωμα αγοράς** (american call option) διαφέρει από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό στο ότι μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και την ωρίμανσή του.

Ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης** (european put option), με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K, δίνει στον κάτοχό του (θετική θέση) το δικαίωμα να πουλήσει στον αντισυμβαλλόμενο (αρνητική θέση) το πρωτογενές προϊόν στον χρόνο T έναντι τιμήματος K. Ο λογικός επενδυτής με θετική θέση θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησης μόνο όταν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση είναι μικρότερη του K. Επομένως η απόδοση για τον κάτοχο ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης στην ωρίμανση είναι $(K - S_T)^+$ και είναι πάντοτε μη αρνητική.

Όπως και στην περίπτωση των δικαιωμάτων αγοράς, ένα **αμερικανικό δικαίωμα πώλησης** διαφέρει από το αντίστοιχο ευρωπαϊκό στο ότι μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και την ωρίμανσή του. Περισσότερα παραδείγματα θα δούμε στην πορεία του μαθήματος.

Η διαπραγμάτευση των παραγώγων γίνεται είτε μέσω Χρηματιστηρίων είτε απ΄ ευθείας (over the counter) μεταξύ των ενδιαφερόμενων πλευρών (συνήθως αξιόπιστων χρηματοοικονομικών οργανισμών). Στην Ελλάδα, η αγορά παραγώγων λειτουργεί από το 1997. Στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, ο τζίρος της αγοράς παραγώγων μετοχών ξεπερνά αυτόν της αγοράς των ίδιων των μετοχών. Τι είναι λοιπόν αυτό που κάνει έναν επενδυτή να στραφεί στην αγορά παραγώγων; Η συνηθισμένη απάντηση σε αυτήν την ερώτηση είναι 'η κερδοσκοπία και η αντιστάθμιση του κινδύνου' (speculation and hedging.) Ας προσπαθήσουμε να το καταλάβουμε μέσα από τα ακόλουθα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 2 Ένας επενδυτής πιστεύει ότι η αξία της μετοχής μιας εταιρείας X πρόκειται να ανέβει σημαντικά μέσα στον επόμενο μήνα και θέλει να επενδύσει στη μετοχή αυτή. Η τιμή της μετοχής σήμερα είναι €10, ενώ στην αγορά διατίθεται προς €2 ένα αμερικανικό δικαίωμα αγοράς της μετοχής της εταιρείας X, με ωρίμανση σε ένα μήνα και τιμή άσκησης €10. Ο επενδυτής αποφασίζει να διαθέσει €1.000 και εξετάζει δύο εναλλακτικές επενδυτικές στρατηγικές. Είτε θα αγοράσει 100 μετοχές της εταιρείας είτε θα αγοράσει το δικαιώμα αγοράς 500 μετοχών.

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί στις δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν η πεποίθηση του επενδυτή επαληθευτεί ή όχι. Αν η τιμή της μετοχής παραμείνει διαρκώς κάτω από τα €10, τότε στην πρώτη περίπτωση θα διατηρήσει την αξία των μετοχών του, ενώ στη δεύτερη θα χάσει όλη του την επένδυση, αφού δεν θα μπορέσει να ασκήσει το δικαίωμα που έχει αγοράσει. Αυτή ακριβώς η μεγαλύτερη έκθεση σε κίνδυνο είναι και ο λόγος που ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής κοστίζει πάντα λιγότερο από ότι η ίδια η μετοχή.

Αν από την άλλη πλευρά η αξία της μετοχής όντως ανέβει, τότε κάθε επιπλέον ευρώ ανόδου στην αξία της μετοχής θα αποφέρει στον επενδυτή €100, αν έχει επενδύσει στη μετοχή, και €500, αν έχει επενδύσει στο παράγωγό της. Αν για παράδειγμα η τιμή της μετοχής ανέβει στα €15, τότε στην πρώτη περίπτωση η αξία των μετοχών του επενδυτή θα είναι €1500, αποφέροντάς του κέρδος 50%. Στη δεύτερη περίπτωση, χρησιμοποιώντας το δικαίωμα, μπορεί να αγοράσει 500 μετοχές της εταιρείας προς €10 και να τις πουλήσει άμεσα στην τιμή διαπραγμάτευσής τους (€15). Αυτό θα του αποφέρει €5/μετοχή× 500 μετοχές =€2500 και κέρδος 150% επί της αρχικής του επένδυσης. Βλέπουμε ότι, ενώ η επένδυση στο δικαίωμα αγοράς ενέχει μεγαλύτερο κίνδυνο, αφήνει μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους, αν η πεποίθηση του επενδυτή επαληθευτεί. Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης παραγώγων για κερδοσκοπία. Θα πρέπει όμως κανείς να έχει κατά νου ότι τα παράγωγα είναι όπως τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Το κέρδος του ενός συμβαλλόμενου είναι η ζημιά του άλλου. Στην αγορά των παραγώγων, συνήθως οι άλλοι είναι μεγάλοι οργανισμοί που μπορούν με τις κινήσεις τους να επηρεάσουν την αγορά.

Παράδειγμα 3 Μια ελληνική εταιρεία υπογράφει ένα συμβόλαιο για την αγορά ενός μηχανήματος από μια αμερικανική κατασκευάστρια. Η τελευταία αναλαμβάνει να παραδώσει το μηχάνημα σε ένα χρόνο, έναντι \$100.000. Η τρέχουσα ισοτιμία είναι €1=\$ 1,10112. Η ελληνική εταιρεία βρίσκει την τιμή του μηχανήματος συμφέρουσα, αλλά ανησυχεί για την ισοτιμία \$/€ που θα ισχύει σε ένα χρόνο. Προκειμένου να καταρτίσει τον προϋπολογισμό της, θα ήθελε να εξασφαλίσει ότι δεν θα πληρώσει πάνω από €90.000 για το μηχάνημα. Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς \$100.000, με ωρίμανση σε ένα χρόνο και τιμή άσκησης €90.000, θα μπορούσε να φανεί πολύ χρήσιμο. Αν σε ένα χρόνο η ισοτιμία \$/€έχει υπερβεί τα 0,90€/\$, η εταιρεία θα μπορεί να ασκήσει το δικαίωμα αγοράς και να λάβει \$100.000 έναντι €90.000. Αν πάλι η ισοτιμία έχει μείνει κάτω από 0,90€/\$, η εταιρεία μπορεί να ανταλλάξει ευρώ προς αμερικανικά δολλάρια στην τρέχουσα ισοτιμία. Αυτό είναι ένα παράδειγμα χρήσης παραγώγων για την αντιστάθμιση του κινδύνου από τις μεταβολές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος, το οποίο στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ένα ξένο συνάλλαγμα.

Είναι σαφές ότι ένα προϊόν, όπως το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης, μόνο θετικό μπορεί να αποβεί στον κάτοχό του. Είναι λοιπόν εύλογο ότι ο κάτοχος του δικαιώματος θα πρέπει να καταβάλει στον αντισυμβαλλόμενό του ένα αρχικό τίμημα προκειμένου να το αποκτήσει. Το αν υπάρχει κάποιο τίμημα που μπορεί να θεωρηθεί δίκαιο και το ποιο ακριβώς είναι αυτό είναι ένα μη τετριμμένο πρόβλημα. Στο μεγαλύτερο μέρος των σημειώσεων θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιούμε είναι η αρχή της μη επιτηδειότητας (principle of no arbitrage), η οποία αποτελεί το αντικείμενο της επόμενης παραγράφου.

1.4 Η αρχή της μη επιτηδειότητας

Η αρχή της μη επιτηδειότητας αξιώνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη ρίσκου. Μπορεί κανείς να επιχειρηματολογήσει γιατί είναι εύλογο να έχουν αυτήν την ιδιότητα οι πραγματικές αγορές, τουλάχιστον όταν αυτές βρίσκονται σε ισορροπία. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι, στη διατραπεζική αγορά οι τρέχουσες ισοτιμίες μεταξύ ευρώ, αμερικανικού δολλαρίου και στερλίνας είναι \$ 1=€0,90817, €1 = £0,70095 και £1 = \$ 1,60211. Αυτός ο συνδυασμός ισοτιμιών συνιστά μια δυνατότητα κέρδους χωρίς ρίσκο. Μια ευρωπαϊκή τράπεζα θα μπορούσε αρχικά να αγοράσει £700,95 προς €1.000. Στη συνέχεια θα μπορούσε να ανταλλάξει τις στερλίνες με $700,95 \times 1,60211 = 1123$ αμερικανικά δολλάρια. Με αυτά θα μπορούσε να αγοράσει €1.019,87, εξασφαλίζοντας κέρδος €19,87 για κάθε €1.000 επένδυσης. Καθένας που θα αντιλαμβανόταν αυτή την ευκαιρία θα ήθελε φυσικά να την εκμεταλλευτεί. Θα δημιουργείτο έτσι αυξημένη ζήτηση για την αγορά στερλινών με ευρώ, για την αγορά δολλαρίων με στερλίνες και για την αγορά ευρώ με δολλάρια, οδηγώντας στη μείωση των αντίστοιχων ισοτιμιών μέχρι την εξάλειψη αυτής της δυνατότητας κέρδους, οπότε θα είχαμε αποκατάσταση της ισορροπίας. Στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά δεχόμαστε την αρχή της μη επιτηδειότητας ως αξίωμα.

Συνήθως μια αγορά μοντελοποιείται από ένα χώρο πιθανότητας, τα σημεία του οποίου αντιπροσωπεύουν τα δυνατά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Οι τιμές των διαφόρων προϊόντων είναι στοχαστικές διαδικασίες, ορισμένες σε αυτόν τον χώρο πιθανότητας. Οι στατιστικές ιδιότητες που τους αποδίδουμε αντανακλούν την πεποίθηση που υπάρχει για τη δυναμική τους. Τέτοια υποδείγματα έχουν προταθεί πολλά και θα δούμε αρκετά. Κάποια από αυτά είναι εύχρηστα αλλά μάλλον απλοϊκά, άλλα είναι περισσότερο ρεαλιστικά αλλά τεχνικά δυσκολότερα στην ανάλυσή τους. Η τιμολόγηση παραγώγων βασίζεται στην αρχή της μη επιτηδειότητας, αλλά εξαρτάται εν γένει και από τις λεπτομέρειες του υποδείγματος αγοράς που υιοθετούμε. Θα αναβάλουμε για το επόμενο κεφάλαιο την αυστηρή μαθηματική περιγραφή τέτοιων υποδειγμάτων και θα ασχοληθούμε εδώ με τους περιορισμούς που επιβάλλονται από την αρχή της μη επιτηδειότητας, χωρίς να κάνουμε καμία υπόθεση για τη δυναμική της αγοράς.

Η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας και θα μας φανεί χρήσιμη.

Πρόταση 1 α) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ ένα χαρτοφυλακίο A έχει *σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο* μη αρνητική αξία, τότε η αρχική του αξία πρέπει να είναι μη αρνητική. Συγκεκριμένα,

$$V_T(A) \geq 0 \implies V_0(A) \geq 0.$$

β) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου A είναι *σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο* τουλάχιστον όση η αξία ενός χαρτοφυλακίου B, τότε η αρχική αξία του A πρέπει να είναι τουλάχιστον όση αυτή του B. Συγκεκριμένα,

$$V_T(A) \geq V_T(B) \implies V_0(A) \geq V_0(B).$$

γ) Αν τη στιγμή $T \geq 0$ η αξία ενός χαρτοφυλακίου A ταυτίζεται με την αξία ενός χαρτοφυλακίου B *σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο*, τότε η αρχική αξία των A και B πρέπει να είναι η ίδια. Συγκεκριμένα,

$$V_T(A) = V_T(B) \implies V_0(A) = V_0(B).$$

Παρατήρηση 1 Στη διατύπωση της Πρότασης 1 θα πρέπει να δώσουμε προσοχή στη σημασία της φράσης 'σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο' . Εν γένει, ένα χαρτοφυλάκιο αποτελείται από τίτλους, η αξία των οποίων στον χρόνο T δεν μας είναι σήμερα γνωστή, αλλά εξαρτάται από το τι θα συμβεί στην αγορά μέχρι τη στιγμή T. Για να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι οι προϋποθέσεις της ικανοποιούνται ανεξάρτητα από τι μπορεί να συμβεί στην αγορά μέχρι τον χρόνο T. Αυτό θα γίνει πιο κατανοητό στο επόμενο κεφάλαιο, όταν θα μοντελοποιήσουμε τα δυνατά σενάρια εξέλιξης της αγοράς ως σημεία ενός χώρου πιθανότητας, οπότε η $V_T(A)$ θα είναι μια τυχαία μεταβλητή. Λέγοντας $V_T(A) \geq 0$ θα εννοούμε ότι αυτή η τυχαία μεταβλητή είναι μη αρνητική με πιθανότητα 1. Αν αυτό συμβαίνει, η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει στην αρχική αξία του χαρτοφυλακίου, η οποία είναι ένα συγκεκριμένο ποσό, να είναι μη αρνητική.

Παρατήρηση 2 Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι στην αγορά υπάρχει μια μετοχή αξίας €10 και ότι η αξία ενός δικαιώματος αγοράς της μετοχής, με ωρίμανση T και τιμή άσκησης €12, είναι €2. Αν θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει τη μετοχή και αρνητική θέση σε πέντε δικαιώματα αγοράς της μετοχής, τότε η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου είναι μηδενική. Η αξία όμως του χαρτοφυλακίου τη στιγμή T θα είναι $V_T = S_T - 5(S_T - \text{€}12)^+$. Είναι φανερό ότι το πρόσημο της V_T εξαρτάται από την αξία S_T της μετοχής στον χρόνο T.

Ας δούμε τώρα πώς, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1, μπορούμε να εξαγάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την αρχική αξία των παραγώγων που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Πρόταση 2 Η αξία $F(S_0, T, K)$ ενός προθεσμιακού συμβολαίου με ωρίμανση T και τιμή παράδοσης K είναι

$$F(S_0, T, K) = S_0 - KB(0, T) = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Απόδειξη: Η απόδοση ενός προθεσμιακού συμβολαίου στην ωρίμανση είναι $S_T - K$. Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο A που αποτελείται από το πρωτογενές προϊόν και αρνητική θέση σε ένα ομόλογο όψεως K και ωρίμανσης T. Θεωρούμε επίσης χαρτοφυλάκιο B που αποτελείται από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης K. Η αξία του χαρτοφυλακίου A στην ωρίμανση είναι $S_T - K$. Επομένως, είναι ίση με την αξία του B, ανεξάρτητα από την τιμή που μπορεί να έχει η S_T. Σύμφωνα με την αρχή της μη επιτηδειότητας τα δύο χαρτοφυλάκια πρέπει να έχουν την ίδια αρχική αξία. Η τρέχουσα αξία του A όμως είναι $S_0 - K\,B(0,T)$. □

Παρατήρηση 3 Η αρχική αξία του προθεσμιακού συμβολαίου είναι μηδενική, όταν η τιμή παράδοσης είναι $K_f = S_0 e^{rT}$. Αν σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο συμφωνηθεί η K_f ως τιμή παράδοσης, οι συμβαλλόμενοι δεν χρειάζεται να ανταλλάξουν χρήματα κατά την υπογραφή του. Η K_f ονομάζεται *προθεσμιακή τιμή* (forward price) του συμβολαίου και είναι η τιμή παράδοσης που συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

Πρόταση 3 Η αξία $c(S_0,T,K)$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\big(S_0 - K\,B(0,T)\big)^+ \le c(S_0,T,K) \le S_0.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο A, αποτελούμενο από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K. Είδαμε ότι η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου στην ωρίμανση είναι $V_T(A) = (S_T - K)^+ \ge 0$. Θα συμβολίζουμε την αρχική του αξία με $c(S_0,T,K)$. Από την Πρόταση 1, θα πρέπει $c(S_0,T,K) \ge 0$. Έστω τώρα χαρτοφυλάκιο B που αποτελείται από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο για την αγορά του πρωτογενούς προϊόντος με χρόνο ωρίμανσης T και τιμή παράδοσης K. Η απόδοση του χαρτοφυλακίου B στην ωρίμανση είναι $V_T(B) = S_T - K \le (S_T - K)^+ = V_T(A)$, ανεξάρτητα από την τιμή που μπορεί να έχει η S_T. Επομένως, η αρχική αξία του B δεν μπορεί να υπερβαίνει την αρχική αξία του A. Έχουμε λοιπόν ότι $c(S_0,T,K) \ge S_0 - KB(0,T)$ και τελικά

$$c(S_0,T,K) \ge \max\{S_0 - K\,B(0,T), 0\} = \big(S_0 - K\,B(0,T)\big)^+.$$

Έστω τώρα χαρτοφυλάκιο B' που περιλαμβάνει μόνο το πρωτογενές προϊόν. Η αξία του χαρτοφυλακίου B' στην ωρίμανση είναι S_T και είναι μεγαλύτερη από $(S_T - K)^+$. Από την Πρόταση 1 η αρχική αξία του B' είναι τουλάχιστον όση του δικαιώματος αγοράς, επομένως $c(S_0,T,K) \le S_0$. □

Διαισθητικά περιμένουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή άσκησης ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς τόσο μικρότερη θα πρέπει να είναι η αρχική του αξία. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας. Πράγματι, εφόσον η συνάρτηση $K \mapsto (x-K)^+$ είναι φθίνουσα, έχουμε ότι

$$K_1 \le K_2 \Longrightarrow (S_T - K_1)^+ \ge (S_T - K_2)^+,\ \forall S_T \ge 0 \Longrightarrow c(S_0,T,K_1) \ge c(S_0,T,K_2).$$

Περισσότερες σχέσεις που επιβάλλει η αρχή της μη επιτηδειότητας στη 'δίκαιη' τιμή των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς θα δούμε στις ασκήσεις.

Πρόταση 4 $\big[$*Ισοτιμία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης* (put-call parity)$\big]$. Οι αρχικές αξίες $c(S_0,T,K)$ και $p(S_0,T,K)$ των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης συνδέονται με τη σχέση

$$F(S_0,T,K) = S_0 - KB(0,T) = c(S_0,T,K) - p(S_0,T,K). \tag{1.2}$$

Απόδειξη: Από την ταυτότητα $x = x^+ - x^- = x^+ - (-x)^+$, η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι:

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+, \quad \forall S_T \ge 0.$$

Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο A, το οποίο αποτελείται από ένα προθεσμιακό συμβόλαιο, και χαρτοφυλάκιο B, το οποίο αποτελείται από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και μια αρνητική θέση σ' ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης. Όλα τα παραπάνω παράγωγα έχουν χρόνο ωρίμανσης T και τιμή άσκησης K. Από την παραπάνω ισότητα οι αποδόσεις των δύο χαρτοφυλακίων στην ωρίμανση συμπίπτουν. Από την αρχή της μη επιτηδειότητας οι αρχικές τους αξίες πρέπει επομένως να είναι ίσες. □

Παρατήρηση 4 Με βάση την ισοτιμία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, οι εκτιμήσεις που κάναμε για την $c(S_0, T, K)$ στην Πρόταση (3) αυτόματα οδηγούν σε αντίστοιχες εκτιμήσεις για την $p(S_0, T, K)$. Συγκεκριμένα,

$$(K\,B(0,T) - S_0)^+ \leq p(S_0, T, K) \leq K\,B(0,T).$$

Υποθέσαμε παραπάνω ότι η κατοχή του πρωτογενούς προϊόντος (στο χαρτοφυλάκιο A) δεν συνεπάγεται κάποιο κόστος ή όφελος. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτό δεν είναι ακριβές. Για παράδειγμα, μια μετοχή μπορεί να πληρώσει μέρισμα στους κατόχους της κάποια στιγμή πριν την ωρίμανση, ένα αγαθό μπορεί να επιφέρει κάποιο κόστος αποθήκευσης ή ένα ξένο συνάλλαγμα μπορεί να αποφέρει τόκους. Τα επιπλέον έσοδα ή έξοδα από την κατοχή του πρωτογενούς προϊόντος δεν αφορούν φυσικά τους κατόχους παραγώγων, γι΄ αυτό και η αξία ενός παραγώγου σε μια τέτοια περίπτωση είναι διαφορετική.

Ας δούμε για παράδειγμα πώς αλλάζει η αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου, αν το πρωτογενές προϊόν είναι η μετοχή μιας εταιρείας, η οποία αποδίδει στους κατόχους της μέρισμα D ανά μετοχή στον χρόνο $t < T$. Με τη διανομή του μερίσματος, η αξία της εταιρείας θα μειωθεί κατά το κεφάλαιο που μοίρασε στους μετόχους της. Επειδή η αξία μιας μετοχής αντιπροσωπεύει ένα μέρος της αξίας της εταιρείας, αυτόματα η αξία κάθε μετοχής θα μειωθεί κατά D. Έτσι, ο κάτοχος μιας μετοχής, ακριβώς πριν τη διανομή του μερίσματος θα έχει μια μετοχή αξίας S_{t-}, ενώ ακριβώς μετά θα έχει μια μετοχή αξίας $S_{t+} = S_{t-} - D$ και μετρητά D. Αν λοιπόν το χαρτοφυλάκιο A περιέχει αρχικά τη μετοχή, αρνητική θέση σε ένα ομόλογο όψεως K και ωρίμανσης T, καθώς και αρνητική θέση σ΄ ένα ομόλογο όψεως D και ωρίμανσης t, το μέρισμα που θα λάβουμε θα καλύψει ακριβώς την υποχρέωσή μας στο ομόλογο που ωριμάζει τη στιγμή t. Η αξία του χαρτοφυλακίου μας στον χρόνο T θα είναι επομένως $V_T(A) = S_T - K$. Από την αρχή της μη επιτηδειότητας, η αρχική αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K είναι ίση με αυτήν του χαρτοφυλακίου A. Επομένως,

$$F(S_0, T, K) = S_0 - KB(0,T) - DB(0,t) = S_0 - De^{-rt} - Ke^{-rT}.$$

Ομοίως, η σχέση ισοτιμίας των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης γίνεται

$$c(S_0, T, K) - p(S_0, T, K) = S_0 - D\,B(0,t) - K\,B(0,T).$$

1.5 Σύνθεση παραγώγων ευρωπαϊκού τύπου

Ένα παράγωγο ονομάζεται ευρωπαϊκού τύπου, αν η αξία του στην ωρίμανση T εξαρτάται μόνο από την τιμή που λαμβάνει το πρωτογενές προϊόν στην ωρίμανση. Επομένως, η αξία ενός παραγώγου ευρωπαϊκού τύπου είναι της μορφής $f(S_T)$, για κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Ένας επενδυτής που επιθυμεί να επενδύσει σε παράγωγα του πρωτογενούς προϊόντος θα ήθελε να επιλέξει τη συνάρτηση απόδοσης f που ταιριάζει στις ανάγκες του. Από την άλλη, είναι κατανοητό ότι δεν μπορούν να υπάρχουν στην αγορά έτοιμα παράγωγα για κάθε συνάρτηση απόδοσης f. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς μπορούμε να συνθέσουμε ένα παράγωγο, να κατασκευάσουμε δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο με την επιθυμητή απόδοση f, χρησιμοποιώντας απλά παράγωγα όπως αυτά που είδαμε στην Παράγραφο 1.3.

Αν και τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς ή πώλησης είναι απλά χρηματιστηριακά προϊόντα, εντούτοις αρκούν για να συνθέσουμε πρακτικά οποιοδήποτε ευρωπαϊκό παράγωγο με τον ίδιο χρόνο ωρίμανσης. Μπορείτε εύκολα να δείτε ότι, αν η f έχει παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης, τότε για κάθε $x \geq 0$ έχουμε:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^\infty (x-y)^+ f''(y)\, dy. \tag{1.3}$$

Επομένως, για οποιαδήποτε τιμή S_T του πρωτογενούς προϊόντος έχουμε

$$f(S_T) = f(0) + f'(0)S_T + \int_0^\infty (S_T - y)^+ f''(y)\, dy. \tag{1.4}$$

Βλέπουμε ότι η απόδοση του παραγώγου στην ωρίμανση είναι ίδια με αυτήν ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ένα ομόλογο όψεως $f(0)$, $f'(0)$ μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς όλων των δυνατών τιμών άσκησης. Αν γνωρίζουμε την αρχική αξία των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς, μπορούμε να υπολογίσουμε και την αρχική αξία του παραγώγου, ως

$$V_0(f) = f(0)B(0,T) + f'(0)S_0 + \int_0^\infty c(S_0,T,y)f''(y)\ dy.$$

Είναι ενδιαφέρον ότι, όταν η f είναι μια κυρτή συνάρτηση η (1.4) παραμένει σε ισχύ, αν ερμηνεύσουμε την f'' με την έννοια των κατανομών. Μπορούμε έτσι να συνθέσουμε παράγωγα, των οποίων η απόδοση είναι γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων, όπως είναι για παράδειγμα κάθε τμηματικά γραμμική συνάρτηση. Σε αυτήν την περίπτωση η (1.4) γίνεται

$$f(S_T) = f(0) + f'_+(0)S_T + \sum_{y>0}(S_T - y)^+\big(f'_+(y) - f'_-(y)\big). \tag{1.5}$$

Παράδειγμα 4 Θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ευρωπαϊκό παράγωγο του οποίου η απόδοση έχει ως εξής.

$$f(S_T) = \begin{cases} S_T, & 0 \le S_T \le K \\ K, & K \le S_T \le 9K \\ 10K - S_T, & 9K \le S_T \le 10K \\ 0, & S_T \ge 10K. \end{cases}$$

Η απόδοση του παραγώγου είναι τμηματικά γραμμική. Έχουμε $f(0) = 0$, $f'_+(0) = 1$ και για $y > 0$ $f'_+(y) \neq f'_-(y)$ μόνο αν $y \in \{K, 9K, 10K\}$. Από την 1.5 έχουμε

$$f(S_T) = S_T - (S_T - K)^+ - (S_T - 9K)^+ + (S_T - 10K)^+.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το παράγωγο που θέλουμε να συνθέσουμε είναι ουσιαστικά ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από το πρωτογενές προϊόν, ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης $10K$ και αρνητική θέση σε ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς με τιμές άσκησης K και $9K$. Από την αρχή της μη επιτηδειότητας, η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$V_0 = S_0 + c(S_0,T,10K) - c(S_0,T,K) - c(S_0,T,9K).$$

Παράδειγμα 5 Θεωρήστε ένα παράγωγο με συνάρτηση απόδοσης

$$f(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T < K \\ 1, & S_T \ge K. \end{cases}$$

Η απόδοση δεν είναι συνεχής συνάρτηση, επομένως δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων. Οι κυρτές συναρτήσεις είναι συνεχείς, αν παίρνουν πεπερασμένες τιμές. Θα προσεγγίσουμε την f με συνεχείς, τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε την ακόλουθη ανισότητα, που ισχύει για κάθε $h > 0$.

$$\frac{(x-(K-h))^+ - (x-K)^+}{h} \le f(x) \le \frac{(x-K)^+ - (x-(K+h))^+}{h}.$$

Από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει να έχουμε:

$$\frac{c(S_0,T,K-h) - c(S_0,T,K)}{h} \le V_0(f) \le \frac{c(S_0,T,K) - c(S_0,T,K+h)}{h}.$$

Αν μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς και αυτή είναι παραγωγίσιμη ως προς την τιμή άσκησης, παίρνοντας $h \to 0$, έχουμε

$$V_0(f) = -\frac{\partial c(S_0, T, K)}{\partial K}.$$

Η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς $c(S_0, T, K)$ εξαρτάται από το υπόδειγμα που θα χρησιμοποιήσουμε για την τιμολόγηση. Ανεξάρτητα από το υπόδειγμα όμως, η σημερινή αξία του παραγώγου του παραδείγματος θα δίνεται από την παράγωγο της c ως προς την τιμή άσκησης.

1.6 Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contracts)

Ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης, όπως και ένα προθεσμιακό συμβόλαιο, είναι μια συμφωνία για την αγοραπωλησία καθορισμένης ποσότητας ενός προϊόντος, σε καθορισμένο χρόνο, έναντι καθορισμένου τιμήματος.

Η βασικότερη διαφορά μεταξύ προθεσμιακών συμβολαίων και συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης είναι ότι, ενώ στα προθεσμιακά συμβόλαια το συμφωνηθέν τίμημα καταβάλεται εξ΄ ολοκλήρου στην ωρίμανση, στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης το τίμημα καταβάλλεται σταδιακά, όσο το συμβόλαιο είναι σε ισχύ, και στην ωρίμανση το προϊόν πωλείται στην τιμή διαπραγμάτευσής του. Θα εξηγήσουμε τον τρόπο με ένα παράδειγμα, καλό είναι όμως να διαβάσετε από τα βιβλία [3] ή [4] τις λεπτομέρειες.

Έστω ότι στις 12 Οκτωβρίου ο Α συμφωνεί να αγοράσει από τον Β ποσότητα Υ του προϊόντος Χ. Η αγορά θα γίνει στις 30 Νοεμβρίου έναντι τιμήματος f_0. Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι τυποποιημένα. Έτσι, συμβόλαια για την ίδια ποσότητα και τον ίδιο χρόνο παράδοσης συνάπτονται και μεταξύ άλλων επενδυτών. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι στις13 Οκτωβρίου η τελευταία τιμή που συμφωνήθηκε για ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι $f_1 > f_0$. Τότε ο Α, του οποίου η θέση απέκτησε αξία σε σχέση με την προηγούμενη μέρα, λαμβάνει από τον Β τη διαφορά $f_1 - f_0$. Ομοίως, αν $f_0 > f_1$ ο Β λαμβάνει από τον Α $f_0 - f_1$. Η διαδικασία αυτή καλείται καθημερινή αποτίμηση (marking-to-market) και οι πληρωμές πραγματοποιούνται μέσω λογαριασμών πίστωσης (margin accounts), που οι συμβαλλόμενοι είναι υποχρεωμένοι να διατηρούν πάνω από κάποιο καθορισμένο υπόλοιπο. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται καθημερινά. Στο τέλος της $n-$οστής ημέρας, ποσόν $f_{n-1} - f_n$ (θετικό ή αρνητικό) μεταφέρεται από το λογαριασμό του Α σ΄ αυτόν του Β, ώσπου στην ημερομηνία παράδοσης ο Α αγοράζει το προϊόν από τον Β στην τρέχουσα τιμή του προϊόντος S_N. Το άθροισμα των ενδιάμεσων πληρωμών από τον Α στον Β είναι τηλεσκοπικό και ισούται με $f_0 - f_N$, όπου N είναι το πλήθος των ημερών μέχρι την ωρίμανση. Από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει $f_N = S_N$. Μαζί με την τελική πληρωμή S_N, ο Α θα έχει καταβάλλει στον Β συνολικά ποσό $f_0 - f_N + S_N = f_0$, το οποίο είναι και το συμφωνηθέν τίμημα.

Ο λόγος ύπαρξης αυτής της διαδικασίας καθημερινής καταβολής της διαφοράς στη μελλοντική τιμή, είναι η ελαχιστοποίηση του κινδύνου από την πτώχευση ενός από τους δύο συμβαλλόμενους. Γι΄ αυτό και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι προσβάσιμα σε ιδιώτες επενδυτές, σε αντίθεση με τα προθεσμιακά συμβόλαια που συνάπτονται συνήθως μόνο στη διατραπεζική αγορά.

Εδώ θα ασχοληθούμε περισσότερο με την τιμολόγηση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης βάσει της αρχής της μη επιτηδειότητας. Οι στρατηγικές επιτηδειότητας που έχουμε θεωρήσει ως τώρα συνίστανται στη σύνθεση αρχικά ενός χαρτοφυλακίου με μηδενική αξία που σε μια μελλοντική στιγμή T θα έχει θετική απόδοση, ανεξάρτητα από την κίνηση του πρωτογενούς προϊόντος. Αυτή είναι μια απλοϊκή στρατηγική όμως, αφού δεν αξιοποιούμε τη δυνατότητα να μεταβάλλουμε το χαρτοφυλάκιό μας, χρησιμοποιώντας την πληροφορία που παρέχει η τιμή του υποκείμενου προϊόντος μέχρι εκείνη τη στιγμή. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα, την πρώτη στιγμή που η τιμή μιας μετοχής πέσει κάτω από ένα προκαθορισμένο επίπεδο, να αλλάξουμε τη θέση μας, αγοράζοντας τη μετοχή με χρήματα από το λογαριασμό μετρητών του χαρτοφυλακίου μας. Μια τέτοια συναλλαγή προφανώς δεν μεταβάλλει την αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή που διεκπεραιώνεται.

Ορισμός 2 Ένα χαρτοφυλάκιο που εξελίσσεται στον χρόνο με μια σειρά από συναλλαγές, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την πληροφορία που είναι διαθέσιμη ως τη στιγμή που συντελούνται και δεν μεταβάλουν την αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή που συντελούνται, ονομάζεται *αυτοχρηματοδοτούμενο* (self-financing).

Ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με μηδενική αρχική αξία και θετική απόδοση στον χρόνο T, προσφέρει μια στρατηγική επιτηδειότητας. Θεωρώντας αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια, η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει περισσότερους περιορισμούς στην τιμολόγηση παραγώγων. Χρησιμοποιώντας ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο, θα δείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5 Αν το επιτόκιο είναι σταθερό, τότε η θεωρητικά δίκαιη μελλοντική τιμή f_0 που συμφωνείται σε ένα συμβολαίο μελλοντικής εκπλήρωσης ταυτίζεται με την αντίστοιχη προθεσμιακή τιμή.

Απόδειξη: Έστω r ο τόκος που αντιστοιχεί σε κεφάλαιο 1 το οποίο έχει επενδυθεί χωρίς κίνδυνο για μία ημέρα. Θέτουμε $\Lambda = 1 + r$. Συνθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αρχικά αποτελείται από θετική θέση σε Λ συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με ωρίμανση έπειτα από N μέρες και μελλοντική τιμή f_0, από αρνητική θέση σε Λ^N προθεσμιακά συμβόλαια στην προθεσμιακή τιμή K_f με την ίδια ωρίμανση και από ένα λογαριασμό χωρίς κίνδυνο και αρχικά χωρίς χρήματα. Η αρχική αξία ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου είναι 0. Στο τέλος κάθε μέρας, τα κέρδη ή οι ζημιές από τη μεταβολή της μελλοντικής τιμής επενδύονται στον λογαριασμό ή καλύπτονται από αυτόν. Επιπλέον, αυξάνουμε τη θέση μας στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, με συμφωνίες στην τρέχουσα μελλοντική τιμή, ώστε να έχουμε συνολικά Λ φορές περισσότερα από όσα την προηγούμενη μέρα. Αυτή η αλλαγή θέσης δεν μεταβάλλει την αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή που συντελείται, αφού τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης έχουν μηδενική αξία, όταν υπογράφονται. Επομένως το χαρτοφυλάκιό μας είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.

Στο τέλος της πρώτης μέρας θα μεταφέρουμε ποσό $\Lambda(f_1 - f_0)$ στον άνευ κινδύνου λογαριασμό. Επιπλέον, θα έχουμε θετική θέση σε Λ^2 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και αρνητική θέση σε Λ^N προθεσμιακά συμβόλαια.

Στο τέλος της δεύτερης μέρας το ποσό στον άνευ κινδύνου λογαριασμό θα τοκιστεί, ενώ θα μεταφέρουμε σε αυτόν και τα κέρδη (ζημιές) από τα Λ^2 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης που κατέχουμε. Το χαρτοφυλάκιό μας θα αποτελείται λοιπόν από $\Lambda^2(f_2 - f_0)$ στον λογαριασμό χωρίς κίνδυνο, αρνητική θέση σε Λ^N προθεσμιακά συμβόλαια, ενώ τώρα θα έχουμε αυξήσει τη θέση μας στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης σε Λ^3.

Στην ημερομηνία ωρίμανσης θα έχουμε λοιπόν $\Lambda^N(f_N - f_0) = \Lambda^N(S_N - f_0)$ σε μετρητά, αρνητική θέση σε Λ^N προθεσμιακά συμβόλαια (με απόδοση $-\Lambda^N(S_N - K_f)$) και Λ^N συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης χωρίς αξία, αφού στην παράδοση του προϊόντος καταβάλεται η τρέχουσα τιμή του. Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου μας θα είναι λοιπόν $V_T = \Lambda^N(K_f - f_0)$ και συνεπώς, αν $K_f \neq f_0$, το χαρτοφυλάκιό μας (ή αρνητική θέση σε αυτό) θα συνιστούσε στρατηγική επιτηδειότητας. $\square$

Παρατήρηση 5 Με το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα, μπορούμε να δείξουμε ότι η θεωρητικά δίκαιη μελλοντική τιμή ταυτίζεται με την προθεσμιακή τιμή και στην περίπτωση που το επιτόκιο μεταβάλλεται καθημερινά, αλλά με τρόπο που είναι γνωστός εξ΄ αρχής και δεν εξαρτάται από τις μεταβολές της μελλοντικής τιμής. Αποδείξτε το.

1.7 Αμερικανικά δικαιώματα αγοράς/πώλησης

Θα προσπαθήσουμε τώρα να εξαγάγουμε περιορισμούς που η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει στην αρχική αξία $C(S_0, T, K)$ ενός αμερικανικού δικαιώματος αγορας. Οι παρακάτω ανισότητες είναι εύκολο να αποδειχθούν από την πρόταση 1.

$$T_1 \leq T_2 \Longrightarrow C(S_0, T_1, K) \leq C(S_0, T_2, K).$$

$$K_1 \leq K_2 \Longrightarrow C(S_0, T, K_1) \geq C(S_0, T, K_2).$$

Είναι φανερό ότι ένα αμερικανικό δικαίωμα θα πρέπει να αξίζει τουλάχιστον όσο το αντίστοιχο ευρωπαϊκό, αφού το αμερικανικό μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ωρίμανση, ενώ το ευρωπαϊκό μόνο στην ωρίμανση. Είναι ενδιαφέρον ότι μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 1 Αν η κατοχή του πρωτογενούς προϊόντος δεν έχει κόστος και δεν αποφέρει έσοδα, οι αξίες ενός ευρωπαϊκού και ενός αμερικανικού δικαιώματος αγοράς είναι ίσες. Δηλαδή

$$C(S_0, T, K) = c(S_0, T, K). \tag{1.6}$$

Απόδειξη: Έχουμε όπως είπαμε ότι

$$C(S_0, T, K) \geq c(S_0, T, K).$$

Η απόδειξη του άνω φράγματος στην (1.6) είναι πολύ ενδιαφέρουσα. Συνήθως αποδεικνύουμε ανισότητες επιτηδειότητας κατασκευάζοντας ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που έχει σε κάθε πιθανό ενδεχόμενο μη αρνητική τελική αξία, συμπεραίνοντας έτσι ότι η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι μη αρνητική. Εδώ θέλουμε ένα άνω φράγμα για την αρχική αξία του αμερικανικού δικαιώματος αγοράς. Θα θέλαμε λοιπόν να κατασκευάσουμε ένα δυναμικό αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που αρχικά περιέχει (ανάμεσα σε άλλα προϊόντα) και μια αρνητική θέση στο αμερικανικό δικαίωμα αγοράς και του οποίου η τελική αξία είναι οπωσδήποτε μη αρνητική. Τώρα όμως τα πιθανά ενδεχόμενα εξέλιξης της αγοράς μέχρι τη στιγμή T περιλαμβάνουν όλους τους τρόπους που ο κάτοχος της θετικής θέσης στο αμερικανικό δικαίωμα μπορεί να επιλέξει να το ασκήσει. Θα πρέπει λοιπόν το αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που θα κατασκευάσουμε να έχει μη αρνητική τελική αξία, όπως κι αν ασκηθεί το δικαίωμα.

Θεωρούμε χαρτοφυλάκιο Α που αποτελείται αρχικά από μια αρνητική θέση σε ένα αμερικανικό δικαίωμα αγοράς, από το πρωτογενές προϊόν, από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K και από μία αρνητική θέση σε ένα ομόλογο όψεως K και ωρίμανσης T. Στο ενδεχόμενο που το αμερικανικό δικαιώμα ασκηθεί σε κάποιο χρόνο $\tau \leq T$, θα πουλήσουμε το προϊόν του χαρτοφυλακίου μας έναντι ποσού K. Η αξία του ποσού αυτού στον χρόνο T υπερκαλύπτει την αρνητική θέση στο ομόλογο, οπότε στην ωρίμανση το χαρτοφυλάκιό μας θα έχει μη αρνητικό υπόλοιπο σε μετρητά και το δικαίωμα πώλησης, συνεπώς θα έχει μη αρνητική αξία.
Αν το αμερικανικό δικαίωμα δεν ασκηθεί ποτέ (και αφού δεν ασκείται ούτε στην ωρίμανσή του αυτό συνεπάγεται ότι $S_T \leq K$), τότε στην ωρίμανση ασκούμε το ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, πουλάμε το προϊόν του χαρτοφυλακίου μας έναντι K και καλύπτουμε την αρνητική θέση στο ομόλογο, οπότε η αξία της θέσης μας είναι μηδενική. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η αξία του χαρτοφυλακίου μας στην ωρίμανση είναι μη αρνητική. Από την άλλη το χαρτοφυλάκιό μας είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, συνεπώς μη αρνητική θα είναι και η αρχική του αξία. Έτσι,

$$C(S_0, T, K) \leq p(S_0, T, K) + S_0 - KB(0, T) = c(S_0, T, K),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ισοτιμία των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (1.2) που έχουμε αποδείξει. □

Παρατήρηση 6 Από την 1.6 προκύπτει ότι, για ένα προϊόν που η κατοχή του δεν αποφέρει έσοδα και δεν έχει κόστος, η βέλτιστη στρατηγική για ένα κάτοχο αμερικάνικου δικαιώματος αγοράς είναι να ΜΗΝ το ασκήσει πρώιμα.

Είναι πολύ διδακτικό να δοκιμάσετε την περίπτωση που το πρωτογενές προϊόν αποδίδει μέρισμα D στον χρόνο $t < T$. Μπορείτε να αποδείξετε τότε ότι το χαρτοφυλάκιο της παραπάνω απόδειξης έχει *αυστηρά* θετική αξία. Η ιδέα είναι η εξής. Αν το αμερικανικό δικαίωμα ασκηθεί πριν πληρωθεί το μέρισμα, τα έσοδα μας από την πώληση (επενδυμένα χωρίς κίνδυνο μέχρι το χρόνο T) υπερκαλύπτουν την αρνητική μας θέση στο ομόλογο. Αν πάλι το δικαίωμα ασκηθεί μετά το χρόνο πληρωμής του μερίσματος, με την ίδια στρατηγική θα έχουμε στην ωρίμανση τουλάχιστον το μέρισμα και τους τόκους επ΄ αυτού. Χρησιμοποιήστε τώρα την σχέση ισοτιμίας των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης στην περίπτωση που έχουμε μέρισμα και συμπεράνετε ότι

$$D \leq K(1 - e^{-r(T-t)}) \Longrightarrow C(S_0, T, K) = c(S_0, T, K).$$

Ας δούμε τώρα τι γίνεται στην περίπτωση των αμερικανικών δικαιωμάτων πώλησης. Οι επόμενες ανισότητες για την αρχική αξία $P(S_0, T, K)$ ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι εύκολο να αποδειχθούν:

$$T_1 \leq T_2 \Longrightarrow P(S_0, T_1, K) \leq P(S_0, T_2, K).$$

$$K_1 \leq K_2 \Longrightarrow P(S_0, T, K_1) \leq P(S_0, T, K_2).$$

$$P(S_0, T, K) \geq p(S_0, T, K). \tag{1.7}$$

Σε αντίθεση με όσα είδαμε για το αμερικανικό δικαίωμα αγοράς, στην περίπτωση του αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι δυνατόν η πρώιμη εξάσκησή του να είναι καλύτερη στρατηγική από την αναμονή μέχρι την ωρίμανση. Αν ένας κάτοχος αμερικανικού δικαιώματος πώλησης ενός προϊόντος με τρέχουσα τιμή $S_0 < K$ το ασκήσει αμέσως, η θέση του στην ωρίμανση θα έχει αξία $(K - S_0)e^{rT}$. Αν πάλι δεν το ασκήσει πριν την ωρίμανση, η τελική του θέση θα έχει αξία $(K - S_T)^+ \leq K$. Αν λοιπόν το S_0 είναι κατάλληλα μικρό $[S_0 \leq K(1 - e^{-rT})]$, τότε σίγουρα η άμεση άσκηση είναι προτιμότερη από την αναμονή μέχρι την ωρίμανση.

Θεώρημα 2 Στην περίπτωση των αμερικανικών δικαιωμάτων η ισοτιμία αγοράς πώλησης (για προϊόντα που η κατοχή τους δεν επιφέρει κόστος ή έσοδα) εκφράζεται μέσω της ακόλουθης διπλής ανισότητας:

$$S_0 - K \leq C(S_0, T, K) - P(S_0, T, K) \leq S_0 - Ke^{-rT}. \tag{1.8}$$

Απόδειξη: Το δεξί μέλος προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (1.6), (1.7) και τη σχέση ισοτιμίας των αντίστοιχων ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Για το αριστερό μέλος, θεωρήστε ένα χαρτοφυλάκιο που αρχικά περιέχει ένα αμερικανικό δικαίωμα αγοράς, αρνητική θέση σ' ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης, ένα ποσόν K επενδεδυμένο χωρίς κίνδυνο και αρνητική θέση στο πρωτογενές προϊόν. Ακολουθούμε τώρα την εξής στρατηγική. Αν το αμερικανικό δικαίωμα πώλησης (στο οποίο έχουμε αρνητική θέση) ασκηθεί (στον χρόνο $\tau \leq T$), χρησιμοποιούμε μέρος από τα μετρητά μας για να κάνουμε την αγορά στην παραδοτέα τιμή K και με την αγορά αυτή καλύπτουμε την αρνητική μας θέση στο προϊόν. Έτσι η θέση μας στην ωρίμανση θα αποτελείται από το δικαίωμα αγοράς και ένα ποσόν $Ke^{rT}(1 - e^{-r\tau}) \geq 0$, συνεπώς θα έχει μη αρνητική αξία.

Αν το αμερικανικό δικαίωμα πώλησης δεν ασκηθεί ποτέ, αυτό συνεπάγεται ότι $S_T > K$. Σ' αυτήν την περίπτωση ασκούμε το δικαίωμα αγοράς που κατέχουμε στην ωρίμανση, καλύπτουμε την αρνητική μας θέση στο πρωτογενές προϊόν και μας μένουν $K(e^{rT} - 1)$ σε μετρητά.
Σε κάθε περίπτωση η αξία του (αυτοχρηματοδοτούμενου) χαρτοφυλακίου μας στον χρόνο T είναι μη αρνητική, οπότε και η αρχική του αξία πρέπει να είναι μη αρνητική και λαμβάνουμε το αριστερό μέλος της (1.8) .$\square$

Από την (1.8) προκύπτουν άμεσα εκτιμήσεις για την $P(S_0, T, K)$. Έχουμε λοιπόν:

$$(S_0 - Ke^{-rT})^- \leq P(S_0, T, K) \leq K.$$

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι στα μέχρι τώρα αποτελέσματά μας δεν έχουμε κάνει κάποια υπόθεση για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος. Τα αποτελέσματα αυτά παραμένουν συνεπώς σε ισχύ οποιοδήποτε υπόδειγμα αγοράς κι αν υιοθετήσουμε. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε τέτοια υποδείγματα και θα δούμε πώς, με αυτή την επιπλέον υπόθεση, μπορούμε να εξαγάγουμε ακριβέστερα συμπεράσματα για την τιμολόγηση παραγώγων.

1.8 Ασκήσεις

Άσκηση 1 Πριν από 90 ημέρες αγοράσαμε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο για την αγορά μιας μετοχής. Η ωρίμανση του συμβολαίου είναι σε 10 ημέρες και η παραδοτέα τιμή είναι €50,25, αλλά δεν επιθυμούμε πια να αποκτήσουμε τη μετοχή. Για την πώλησή της εισερχόμαστε σ' ένα νέο προθεσμιακό συμβόλαιο, παίρνοντας αρνητική θέση. Έστω €45 η τρέχουσα τιμή της μετοχής και 4,75% το ετήσιο επιτόκιο (με συνεχή απόδοση). Είναι γνωστό ότι η μετοχή δεν αποδίδει μέρισμα.
α) Ποια είναι η προθεσμιακή τιμή για το νέο συμβόλαιο;
β) Ποια είναι η τελική μας θέση, όταν ωριμάσουν τα δυο συμβόλαια;
γ) Ποια είναι η σημερινή αξία της θέσης μας;

Άσκηση 2 Τα παράγωγα προϊόντα βασίζονται σε πρωτογενή προϊόντα που είναι ανταλλάξιμα και αυτό έχει σημασία όπως δείχνει το ακόλουθο σενάριο. Ο διευθυντής μιας ξενοδοχειακής μονάδας στην Κορνουάλη έχει παρατηρήσει ότι οι επισκέπτες του ξενοδοχείου μειώνονται, όταν ο καιρός είναι βροχερός. Για να αντισταθμίσει τον κίνδυνο μειωμένου τζίρου εξ' αιτίας ενός βροχερού καλοκαιριού θέλει να συνάψει την 1η Μαΐου μια συμφωνία με ωρίμανση την 31η Αυγούστου και απόδοση $V_T = A(h_T - k)$, όπου h_T είναι το ύψος της ετήσιας βροχόπτωσης στις 31 Αυγούστου, k είναι ένα προσυμφωνημένο ύψος και A μια σταθερά (με μονάδες £/cm). Έτσι, αν βρέξει πολύ θα έχει να λάβει χρήματα από το συμβόλαιο. Έχοντας διαβάσει λίγο Χρηματοοικονομία, παρατηρεί ότι η συμφωνία είναι ένα προθεσμιακό συμβόλαιο επί του ύψους της βροχόπτωσης, και σκέφτεται ότι η αξία της την 1η Μαΐου θα πρέπει να είναι $V_0 = A\big(h_0 - kB(0,T)\big)$. Εσείς συμφωνείτε μ' αυτό και γιατί;

Άσκηση 3 Μια μετοχή έχει τρέχουσα τιμή €50,25 και πρόκειται να αποδώσει μέρισμα €2 ανά μετοχή σε 2 μήνες. Το ετήσιο επιτόκιο είναι σταθερό 5% υπολογισμένο με συνεχή απόδοση. Για ποια τιμή του K είναι ίσες οι σημερινές αξίες των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με ωρίμανση σε 6 μήνες και τιμή άσκησης K;

Άσκηση 4 Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο ενός έτους συνάπτεται επί μιας μετοχής. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €62 και είναι γνωστό ότι η μετοχή πληρώνει μερίσματα €1 ανά μετοχή σε ένα μήνα και €2 ανά μετοχή σε 7 μήνες. Οι τιμές ομολόγων όψεως €1.000 είναι €996,7 για 1 μήνα, €974,1 για 7 μήνες και €951,2 για 12 μήνες. Ποια είναι η προθεσμιακή τιμή της μετοχής;

Άσκηση 5 Την $1^η$ Σεπτεμβρίου μια εταιρεία Α σύναψε προθεσμιακό συμβόλαιο για την αγορά από την εταιρεία Β 1000 βαρελιών πετρελαίου την $30^η$ Δεκεμβρίου του ίδιου έτους. Η τρέχουσα τιμή του πετρελαίου είναι €60 το βαρέλι και το μηνιαίο επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με 0,4% (με μηνιαίο ανατοκισμό.)
α) Υπολογίστε την προθεσμιακή τιμή του συμβολαίου χωρίς να λάβετε υπ' όψιν το κόστος αποθήκευσης του πετρελαίου.
β) Υπολογίστε την προθεσμιακή τιμή του συμβολαίου, αν για την αποθήκευση του πετρελαίου απαιτείται μηνιαίο ενοίκιο €1.000 πληρωτέο την $1^η$ κάθε μήνα.

Άσκηση 6 Η σημερινή συναλλαγματική ισοτιμία ευρώ και ελβετικού φράγκου είναι 0,6676 €/CHF. Η τιμή ενός ομολόγου 180 ημερών με τιμή όψεως €100 είναι €98,0199. Η τιμή του αντίστοιχου ελβετικού ομολόγου όψεως 100 CHF είναι 98,5631CHF.
α) Βρείτε την προθεσμιακή τιμή του ελβετικού φράγκου για συμβόλαια με ωρίμανση σε 180 ημέρες.
β) Αν μπορείτε να συνάψετε συμβόλαια με προθεσμιακή τιμή 0,67 €/CHF, περιγράψτε μια στρατηγική επιτηδειότητας. Πόσα ευρώ θα κερδίζατε για ένα συμβόλαιο 1000CHF;

Άσκηση 7 Σε μια αγορά διατίθενται: α) μια μετοχή προς €20, β) ένα ετήσιο ομόλογο όψεως €1.000, προς €960, γ) ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς της μετοχής με ωρίμανση σε 1 έτος και τιμή άσκησης €25, προς €4,40 και δ) ένα δικαίωμα πώλησης της μετοχής με ωρίμανση σε ένα έτος και τιμή άσκησης €25, προς €6. Κατασκευάστε μια στρατηγική επιτηδειότητας.

Άσκηση 8 Ένας επενδυτής περιμένει μια μεγάλη πληρωμή σε δυο μήνες και θα ήθελε να χρησιμοποιήσει τα χρήματα αυτά για να αγοράσει μετοχές μιας εταιρείας. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €25 αλλά ο επενδυτής ανησυχεί μήπως ανέβει μέσα στους επόμενους δυο μήνες. Η τράπεζά του προτείνει το ακόλουθο συμβόλαιο. Σε δυο μήνες, αν η μετοχή τιμάται πάνω από €30, η τράπεζα θα του πληρώσει την διαφορά της τιμής της από τα €30. Αν όμως η τιμή της μετοχής είναι κάτω από €22, τότε ο επενδυτής θα πληρώσει στην τράπεζα τη διαφορά της τιμής της από τα €22. Περιγράψτε ένα χαρτοφυλάκιο από ευρωπαϊκά δικαιώματα που υλοποιεί το παραπάνω συμβόλαιο.

Άσκηση 9 Υπολογίστε την αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου, με ωρίμανση T και τιμή παράδοσης K, επί μιας μετοχής που πληρώνει μερίσματα $D_1, \ldots, D_k$ τις χρονικές στιγμές $t_1, \ldots, t_k$, με $t_1, \ldots, t_k \leq T$.

Άσκηση 10 Ένα ευρωπαϊκό παράγωγο έχει απόδοση στην ωρίμανση που δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T \leq K_1 \text{ ή } S_T \geq K_4 \\ M\frac{S_T - K_1}{K_2 - K_1}, & K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ M, & K_2 \leq S_T \leq K_3 \\ M\frac{K_4 - S_T}{K_4 - K_3}, & K_3 \leq S_T \leq K_4. \end{cases}$$

Συνθέστε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ευρωπαϊκά δικαιώματα μόνο και έχει την ίδια απόδοση. Στη συνέχεια υπολογίστε την αρχική αξία του παραγώγου και αποδείξτε ότι:

$$\frac{c(S_0, T, K_1) - c(S_0, T, K_2)}{K_2 - K_1} \geq \frac{c(S_0, T, K_3) - c(S_0, T, K_4)}{K_4 - K_3}.$$

Άσκηση 11 Στο διευθύνοντα σύμβουλο μιας εταιρείας προτείνεται να αναλάβει υπουργικό αξίωμα. Όταν αυτός είχε προσληφθεί ως διευθύνων σύμβουλος, η εταιρεία του πρόσφερε ως κίνητρο απόδοσης ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς της μετοχής της εταιρείας με χαμηλή τιμή άσκησης, τα οποία μπορεί μόνο να ασκήσει και όχι να πουλήσει. Τα δικαιώματα αυτά δεν έχουν φτάσει ακόμη στην ωρίμανση. Έτσι τώρα έχει προσωπικό συμφέρον στην εταιρεία, αφού όσο υψηλότερη είναι η τιμή της μετοχής της στην ωρίμανση τόσο μεγαλύτερο θα είναι το κέρδος του. Τίθεται λοιπόν ένα ηθικό ζήτημα σε συνδυασμό με την πρόθεσή του να αναλάβει υπουργικά καθήκοντα. Από την άλλη είναι παράλογο να του ζητηθεί να απεμπολήσει τα δικαιώματα αγοράς που κατέχει και που ήδη έχουν αποκτήσει μεγάλη αξία. Κάποιος σύμβουλός του του προτείνει να υπογράψει ένα προθεσμιακό συμβόλαιο ώστε να πουλήσει τις μετοχές που θα πάρει στην ωρίμανση ασκώντας τα δικαιώματα έναντι της προθεσμιακής τιμής $S_0 e^{rT}$. Ο σύμβουλος ισχυρίζεται ότι έτσι θα είναι σαν να έχει πουλήσει τις μετοχές σήμερα και να έχει καταθέσει τη σημερινή τους αξία σε έναν λογαριασμό χωρίς κίνδυνο. Εσείς τι γνώμη έχετε; Αν ακολουθήσει τη συμβουλή, θα πάψει να έχει συμφέροντα στην αξία της μετοχής; Αν όχι, τι θα τον συνέφερε οικονομικά να συμβεί;

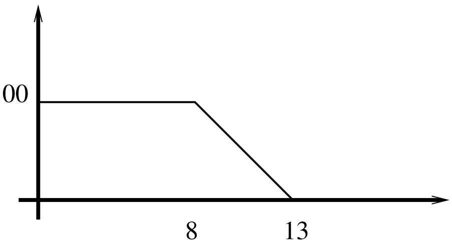
Άσκηση 12 α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0, \infty)$, τότε για κάθε $x \geq 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^\infty (x - y)^+ f''(y)\, dy.$$

β) Θεωρώντας γνωστή την τιμή όλων των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς με ωρίμανση στο χρόνο T, τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό παράγωγο με απόδοση στον χρόνο T ίση με $S_T(2S_0 - S_T)$.

Άσκηση 13 Ένας επενδυτής συνάπτει ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης για την αγορά ενός προϊόντος προς €29.200. Η μελλοντική τιμή του συμβολαίου τις επόμενες πέντε μέρες κυμαίνεται ως εξής: 29.250, 29.300, 29.275, 29.225 και 29.250 (οι τιμές σε ευρώ.) Αν το υπόλοιπο στον λογαριασμό περιθωρίου του επενδυτή είναι αρχικά €2.000, περιγράψτε την κίνηση του λογαριασμού περιθωρίου τις επόμενες πέντε μέρες.

Άσκηση 14



Ένας επενδυτής επιθυμεί να αγοράσει από εσάς ένα παράγωγο μιας μετοχής με ωρίμανση σε 6 μήνες και τη διπλανή συνάρτηση απόδοσης. Η σημερινή τιμή της μετοχής είναι €12, η αξία ενός 6μηνου ομολόγου όψεως €100 είναι €97,5 και στην αγορά διατίθενται και τα ακόλουθα ευρωπαϊκά δικαιώματα επί της μετοχής.

Τύπος Δικαιώματος	Ωρίμανση (μήνες)	Τιμή Άσκησης (€)	Τιμή διαπραγμάτευσης (€)
Αγοράς	6	13	0,2
Αγοράς	6	8	4,30
Πώλησης	6	8	0,10
Πώλησης	6	13	0,875

α) Συνθέστε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από προϊόντα που είναι διαθέσιμα στην αγορά και έχει την ίδια απόδοση με το παραπάνω παράγωγο.
β) Μόλις πουλήσατε το παράγωγο προς €17. Περιγράψτε πώς μπορείτε να πραγματοποιήσετε μια στρατηγική επιτηδειότητας και βρείτε το χωρίς κίνδυνο κέρδος σας από μια τέτοια συμφωνία.

Άσκηση 15 Αποδείξτε ότι

$$p(S_0, T, K) \leq P(S_0, T, K) \leq p(S_0, T, K) + K(1 - e^{-rT}).$$

Άσκηση 16 Αποδείξτε ότι, αν $K_1 \leq K_2$, τότε:

$$P(S_0, T, K_1) \leq P(S_0, T, K_2) \leq P(S_0, T, K_1) + (K_2 - K_1).$$

Άσκηση 17 Είδαμε ότι, για μια μετοχή που δεν δίνει μέρισμα, η αξία $c(S_0, T, K)$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι ίση με την αξία $C(S_0, T, K)$ του αντίστοιχου αμερικανικού δικαιώματος. Επομένως, αν $T_1 \leq T_2$ τότε

$$c(S_0, T_1, K) \leq c(S_0, T_2, K).$$

Μπορείτε να αποδείξετε αυτόν τον ισχυρισμό χωρίς να κάνετε χρήση της έννοιας των αμερικανικών δικαιωμάτων, αλλά με άμεση εφαρμογή της αρχής της μη επιτηδειότητας σε ένα κατάλληλο αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο; Αποδείξτε το ίδιο αν η μετοχή πρόκειται να δώσει μέρισμα D τη στιγμή t με $T_1 < t < T_2$.

Άσκηση 18 Δείξτε ότι η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης είναι κυρτή συνάρτηση της τιμής άσκησης, δηλαδή, αν $0 \leq K_1 \leq K_2$ και $0 \leq \lambda \leq 1$, τότε:

$$p(S_0, T, \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2) \leq \lambda\ p(S_0, T, K_1) + (1-\lambda)\ p(S_0, T, K_2).$$

Κεφάλαιο 2

Υποδείγματα αγορών μιας περιόδου

2.1 Εισαγωγή

Θα αρχίσουμε τώρα να κάνουμε υποθέσεις για τη δυναμική των πρωτογενών προϊόντων και θα ερευνήσουμε αν με αυτές τις επιπλέον υποθέσεις μπορούμε να εξαγάγουμε ακριβέστερα συμπεράσματα για την τιμολόγηση παραγώγων βάσει της αρχής της μη επιτηδειότητας. Σκοπός μας είναι να φτάσουμε στην ανάλυση υποδειγμάτων που θεωρούνται ρεαλιστικά για τις πραγματικές αγορές. Θα φτάσουμε σε αυτήν βήμα βήμα, ξεκινώντας από ένα πολύ απλό υπόδειγμα που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια σαν δομικό στοιχείο για την κατασκευή πιο σύνθετων. Παρόμοιο υλικό μπορείτε να βρείτε εδώ και στις αναφορές [8], [5], [6], [7] και [2].

2.2 Το διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου

Κάθε ρεαλιστικό υπόδειγμα θα πρέπει να ενέχει την τυχαιότητα ως προς την χρονική εξέλιξη της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος και να λαμβάνει υπ΄ όψιν την μεταβολή της αξίας του χρήματος με τον χρόνο. Το διωνυμικό υπόδειγμα (binomial model) μιας περιόδου έχει αυτά τα χαρακτηριστικά στην απλούστερη δυνατή μορφή. Η αγορά μας αποτελείται μόνο από το πρωτογενές προϊόν και ένα ομόλογο. Η τρέχουσα τιμή του προϊόντος είναι $S_0 = s_0$ και μας ενδιαφέρει μόνο μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή T. Η S_T θα είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να λάβει μόνο δύο τιμές: την τιμή s_1 με πιθανότητα p $(0 < p < 1)$ ή την τιμή s_2 με πιθανότητα $1 - p$. Ας υποθέσουμε ότι $s_1 > s_2$. Είναι εύκολο να δείτε ότι η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει κάποιους περιορισμούς στις τιμές που μπορεί να πάρει η S_T. Συγκεκριμένα,

$$s_2 < s_0 e^{rT} < s_1. \tag{2.1}$$

Η αρχική αξία του ομολόγου θα είναι e^{-rT}, ενώ η αξία του στον χρόνο T θα είναι 1.

Η απόδοση $f(S_T)$ ενός ευρωπαϊκού παραγώγου επί αυτού του προϊόντος με χρόνο ωρίμανσης T είναι κι αυτή μια τυχαία μεταβλητή, η οποία μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές: $f_1 = f(s_1)$ με πιθανότητα p και $f_2 = f(s_2)$ με πιθανότητα $1 - p$. Θα θέλαμε να τιμολογήσουμε ένα τέτοιο παράγωγο. Μια απλοϊκή προσέγγιση θα ήταν να το τιμολογήσουμε όσο είναι η σημερινή αξία της αναμενόμενης απόδοσής του στην ωρίμανση. Δηλαδή,

$$A_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^p[f(S_T)] := e^{-rT}(pf_1 + (1-p)f_2). \tag{2.2}$$

Κάτι τέτοιο όμως μπορεί να επιτρέψει στρατηγικές επιτηδειότητας, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα: Έστω $s_0 = \$80$, $s_1 = \$100$, $s_2 = \$70$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 0$. Η αξία που θα δίνει ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού σε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς στην τιμή \$90 (με απόδοση $f_1 = \$(100-90)^+ = \$10$, $f_2 = \$(70-90)^+ = 0$) είναι $A_0 = \frac{1}{2}\$10 + \frac{1}{2}0 = \$5$. Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας, αν η τιμή διαπραγμάτευσης αυτού του παραγώγου στην αγορά ήταν \$5. Φτιάχνουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από αρνητική θέση σε 3 παράγωγα, θετική θέση στο προϊόν και δανεισμό (αρνητική θέση στο ομόλογο) \$65. Η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου είναι:

$-3 \times \$5 + \$80 - \$65 = 0$. Αν στον χρόνο T το προϊόν πάρει την τιμή $s_1 = \$100$, η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα είναι: $-3 \times \$10 + \$100 - \$65 = \$5$. Αν πάλι το προϊόν πάρει την τιμή $s_2 = \$70$, τότε η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα είναι: $-3 \times 0 + \$70 - \$65 = \$5$. Έχουμε δηλαδή κέρδος \$5 χωρίς κίνδυνο. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως θα δούμε, η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει μια τιμή για κάθε παράγωγο στα πλαίσια του διωνυμικού υποδείγματος που στο παράδειγμά μας δεν είναι \$5. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα ξέρουμε πώς να υπολογίσουμε την θεωρητικά δίκαιη αυτή τιμή και πώς να κατασκευάσουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας, αν η τιμή διαπραγμάτευσης είναι διαφορετική.

Για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με απόδοση f θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από ϕ μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και ψ ομόλογα έτσι ώστε η αξία του χαρτοφυλακίου στον χρόνο T να ταυτίζεται με την αξία του παραγώγου, ανεξάρτητα από την τιμή της (τυχαίας μεταβλητής) S_T. Δηλαδή, $\phi S_T + \psi = f(S_T)$. Στο διωνυμικό υπόδειγμα που μελετάμε αυτό ισοδυναμεί με το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} \phi s_1 + \psi & = f_1 \\ \phi s_2 + \psi & = f_2. \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό λύνεται για κάθε (f_1, f_2) και η λύση του δίνεται από τις

$$\phi = \frac{f_1 - f_2}{s_1 - s_2}, \qquad \psi = \frac{s_1 f_2 - s_2 f_1}{s_1 - s_2}. \tag{2.3}$$

Αφού το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει την ίδια αξία με το παράγωγο στον χρόνο T, από την αρχή της μη επιτηδειότητας θα πρέπει να έχουν και την ίδια αρχική αξία. Επομένως η θεωρητικά δίκαιη τιμή του παραγώγου είναι

$$f_0 = \phi s_0 + \psi e^{-rT},$$

και αντικαθιστώντας τα ϕ, ψ από την (2.3) παίρνουμε

$$f_0 = e^{-rT}\left(q f_1 + (1-q) f_2\right) = e^{-rT}\mathbb{E}^q[f(S_T)], \tag{2.4}$$

όπου

$$q = \frac{e^{rT} s_0 - s_2}{s_1 - s_2}. \tag{2.5}$$

Εδώ αξίζει να κάνουμε μερικές σημαντικές παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 7 Από την (2.1), η οποία είναι συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας, έχουμε ότι $0 < q < 1$.

Παρατήρηση 8 Προσέξτε την ομοιότητα της (2.4) με την (2.2). Μπορεί η δίκαιη αρχική αξία του παραγώγου να είναι η παρούσα αξία της αναμενόμενης απόδοσής του, αυτή όμως η αναμενόμενη απόδοση πρέπει να υπολογιστεί ως προς το μέτρο που αποδίδει πιθανότητα q στο ενδεχόμενο το πρωτογενές προϊόν να πάρει την τιμή s_1 και $1-q$ στο ενδεχόμενο το πρωτογενές προϊόν να πάρει την τιμή s_2. Όπως φαίνεται από την (2.5), το q αυτό *δεν εξαρτάται από την πιθανότητα* p που το μοντέλο μας αποδίδει στο ενδεχόμενο το πρωτογενές προϊόν να πάρει την τιμή s_1.

Παρατήρηση 9 Το ίδιο το πρωτογενές προϊόν μπορεί να εκληφθεί σαν παράγωγο με συνάρτηση απόδοσης $f(S_T) = S_T$. Εφαρμόζοντας την (2.4) σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι

$$S_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^q[S_T]. \tag{2.6}$$

Είναι εύκολο να δείτε ότι η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την (2.5) και επομένως ορίζει το μέτρο πιθανότητας ως προς το οποίο υπολογίζεται η αναμενόμενη τιμή στην (2.4). Η ιδιότητα αυτή διέπει όλα τα υποδείγματα που θα μελετήσουμε και είναι το σημείο αφετηρίας της σύγχρονης προσέγγισης στην τιμολόγηση παραγώγων. Θα καλούμε τα μέτρα πιθανότητας που ικανοποιούν την (2.6) *αδιάφορα κινδύνου* (risk-neutral).

Συνοψίζοντας όσα είδαμε στα πλαίσια του διωνυμικού υποδείγματος μιας περιόδου έχουμε:

- Κάθε παράγωγο μπορεί να τιμολογηθεί βάσει της αρχής της μη επιτηδειότητας. Όταν συμβαίνει αυτό, λέμε ότι η αγορά που περιγράφεται από το υπόδειγμά μας είναι *πλήρης (complete)*.
- Υπάρχει ένα μοναδικό $q \in (0,1)$ για το οποίο ισχύει η (2.6).
- Για το συγκεκριμένο q η θεωρητικά δίκαιη τιμή ενός παραγώγου δίνεται από την (2.4).

Ας δούμε τέλος πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας, αν η τιμή διαπραγμάτευσης ενός παραγώγου F_0 είναι διαφορετική από τη θεωρητικά δίκαιη f_0. Συνθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο X που αποτελείται από το παράγωγο, αρνητική θέση στο χαρτοφυλάκιο που το αναπαράγει και μετρητά $f_0 - F_0$. Η αρχική αξία του X είναι μηδενική. Από την κατασκευή του χαρτοφυλακίου αυτού, η αξία του X στον χρόνο T θα είναι

$$V_T(X) = f(S_T) - f(S_T) + (f_0 - F_0)e^{rT} = (f_0 - F_0)e^{rT}$$

Παίρνοντας θετική ή αρνητική θέση στο X, ανάλογα αν η f_0 είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της F_0, έχουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας.

Το χαρακτηριστικό του χαρτοφυλακίου του προηγούμενου παραδείγματος είναι ότι, αν και περιέχει το παράγωγο, η απόδοσή του δεν εξαρτάται από την έκβαση της τιμής του προϊόντος με κίνδυνο. Μια τέτοια στρατηγική ονομάζεται *αντιστάθμιση* του κινδύνου (hedging) και το χαρτοφυλάκιο που την υλοποιεί αντισταθμιστικό (replicating portfolio).

2.3 Το υπόδειγμα Arrow-Debreu

Στο γενικότερο υπόδειγμα μιας περιόδου θα θεωρήσουμε N προϊόντα, εκ των οποίων το πρώτο είναι πάντα ομόλογο. Οι αρχικές τιμές των προϊόντων θα περιγράφονται από ένα διάνυσμα $p \in \mathbb{R}^N$, $p^\top = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, όπου $p_\alpha = S_\alpha(0)$ είναι η αρχική αξία του προϊόντος α για $\alpha = 1, \ldots, N$. Και πάλι μας ενδιαφέρει μόνο μια μεταγενέστερη στιγμή T στην οποία η αγορά μας μπορεί να βρεθεί σε M δυνατές καταστάσεις. Οι καταστάσεις αυτές περιγράφονται από ένα $N \times M$ πίνακα D. Κάθε μια από τις M στήλες του D περιγράφει τις τιμές των N προϊόντων στην αντίστοιχη κατάσταση. Έτσι,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ D_{21} & D_{22} & \ldots & D_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \ldots & D_{NM} \end{pmatrix}$$

όπου $D_k^\top = (D_{1k}, D_{2k}, \ldots, D_{Nk})$ είναι οι τιμές των N προϊόντων στην κατάσταση k. Επειδή η τελική αξία του ομολόγου είναι 1 σε όλες τις τελικές καταστάσεις, έχουμε πάντοτε $D_{1k} = 1$, για κάθε $k = 1, \ldots, M$. Αντίστοιχα, επειδή η αρχική του ομολόγου είναι e^{-rT}, έχουμε $p_1 = e^{-rT}$.

Μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα $\pi_k > 0, k = 1, \ldots, M$ στο ενδεχόμενο η αγορά μας να βρεθεί στην k-οστή κατάσταση στον χρόνο T, οπότε η αξία των προϊόντων $S(T)$ θα είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^N$ που παίρνει την τιμή D_k με πιθανότητα π_k.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι μπορούμε να πάρουμε θετική ή αρνητική θέση σε κάθε προϊόν της αγοράς χωρίς περιορισμούς ως προς το μέγεθος της θέσης. Έτσι, ένα χαρτοφυλάκιο περιγράφεται από ένα διάνυσμα $\theta \in \mathbb{R}^N$ τα στοιχεία του οποίου είναι η θέση μας σε κάθε προϊόν. Η αρχική αξία ενός χαρτοφυλακίου θ είναι επομένως $\theta \cdot S(0) = \sum_\alpha \theta_\alpha p_\alpha$, ενώ η αξία του στον χρόνο T ($=\theta \cdot S(T)$) είναι μια τυχαία μεταβλητή. Στο ενδεχόμενο που το σύστημα βρεθεί στην κατάσταση k ($k = 1, \ldots, M$), η αξια του χαρτοφυλακίου θ είναι $(D^\top \theta)_k := \sum_\alpha \theta_\alpha D_{\alpha k}$.

Για παράδειγμα, στο διωνυμκό υπόδειγμα που μελετήσαμε έχουμε $p^\top = (e^{-rT}, s_0)$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix},$$

$\pi_1 = p$, $\pi_2 = 1 - p$, ενώ ένα χαρτοφυλάκιο από ϕ μέρη του πρωτογενούς προϊόντος και ψ ομόλογα περιγράφεται από το διάνυσμα $\theta = (\psi, \phi)$.

Παρακάτω θα γράφουμε $u \geq 0$ (αντίστοιχα > 0) για ένα διάνυσμα u, αν όλες οι συνιστώσες του είναι μη αρνητικές (αντίστοιχα θετικές).

Η αρχή της μη επιτηδειότητας αξιώνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει δυνατότητα κέρδους χωρίς την ανάληψη κινδύνου. Με τον συμβολισμό που αναπτύξαμε η αρχή της μη επιτηδειότητας στο υπόδειγμα Arrow-Debreu μπορεί να διατυπωθεί ως

$$(D^\top \theta) \geq 0 \text{ και } \theta \cdot p = 0 \implies (D^\top \theta) = 0. \tag{2.7}$$

Στις Ασκήσεις θα δούμε ότι η (2.7) συνεπάγεται την ακόλουθη πρόταση, την οποία χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο:

Πρόταση 6 Έστω ότι ο πίνακς D και το διάνυσμα p ικανοποιούν την (2.7). Τότε,
α. Αν $(D^\top \theta) \geq 0$, τότε $\theta \cdot p \geq 0$.
β. Αν $(D^\top \theta) = 0$, τότε $\theta \cdot p = 0$.

Μια ενδιαφέρουσα ισοδύναμη διατύπωση της αρχής της μη επιτηδειότητας προσφέρει το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3 Η συνθήκη (2.7) ικανοποιείται τότε και μόνο, όταν το γραμμικό σύστημα $Du = p$ έχει λύση $u \in \mathbb{R}^M$ με $u > 0$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το παραπάνω σύστημα έχει λύση $u > 0$ και ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο $\theta \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $(D^\top \theta) \geq 0$ και $\theta \cdot p = 0$. Τότε,

$$0 = \theta \cdot p = \theta \cdot (Du) = (D^\top \theta) \cdot u.$$

Εφόσον όμως $(D^\top \theta) \geq 0$ και $u > 0$, ο μόνος τρόπος ώστε $(D^\top \theta) \cdot u = 0$ είναι να έχουμε $D^\top \theta = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα υποθέσουμε ότι η (2.7) ικανοποιείται και θα αποδείξουμε ότι το σύστημα $Du = p$ έχει λύση $u > 0$. Η ύπαρξη λύσης του παραπάνω συστήματος είναι σχετικά εύκολο να δειχθεί. Πράγματι, αν $\mathcal{N}(D^\top)$ είναι ο πυρήνας του $D^\top$ και $\langle p \rangle$ είναι ο γραμμικός χώρος διάστασης 1 που παράγει το διάνυσμα p τότε η πρόταση (6β) δίνει ότι

$$\mathcal{N}(D^\top) \subset \langle p \rangle^\perp \text{ και άρα } p \in \mathcal{N}(D^\top)^\perp = \mathfrak{Im}(D).$$

Είναι σημαντικά δυσκολότερο να δείξουμε ότι υπάρχει *θετική* λύση. Αυτό απαιτεί την επίκληση του Θεωρήματος του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου (separating hyperplane theorem) (6) που αποδεικνύεται στην Παράγραφο 2.4. Έστω λοιπόν L η εικόνα του $\langle p \rangle^\perp$ κάτω από τον μετασχηματισμό $D^\top$, δηλαδή

$$L = \{D^\top \theta \mid \theta \in \mathbb{R}^N;\ \theta \cdot p = 0\},$$

και

$$C = \{w \in \mathbb{R}^M \mid w \geq 0 \text{ και } \sum_{k=1}^{M} w_k = 1\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο L είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^M$, ενώ το C είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^M$. Επιπλέον, από την (2.7) έχουμε ότι $L \cap C = \emptyset$. Το Θεώρημα 6 εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $x^* \in \mathbb{R}^M$ τέτοιου ώστε

$$x^* \cdot y = 0, \text{ για κάθε } y \in L \text{ και}$$

$$x^* \cdot u > 0, \text{ για κάθε } u \in C.$$

Εφόσον για $k = 1, 2, \ldots, M$, το μοναδιαίο διάνυσμα e_k ανήκει στο C, έχουμε $x_k^* = x^* \cdot e_k > 0$. Επιπλέον, κάθε διάνυσμα κάθετο στο p είναι και κάθετο στο Dx^*, αφού αν $\theta \cdot p = 0$ τότε

$$(Dx^*) \cdot \theta = x^* \cdot (D^\top \theta) = 0, \text{ διότι } D^\top \theta \in L.$$

Επομένως, $Dx^* = \lambda p$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Το λ αυτό μπορεί να υπολογιστεί ως εξής. Σύμφωνα με την παραδοχή που έχουμε κάνει, το πρώτο προϊόν είναι ομόλογο με αρχική αξία $p_1 = e^{-rT}$ και τελική αξία 1 σε όλες τις δυνατές καταστάσεις. Εξισώνοντας τις πρώτες συντεταγμένες των Dx^* και λp λαμβάνουμε

$$\lambda p_1 = \lambda e^{-rT} = (Dx^*)_1 = \sum_{k=1}^{M} D_{1k} x_k^* = \sum_{k=1}^{M} x_k =: \|x^*\|_1 .$$

Συνεπώς $\lambda = \|x^*\|_1 e^{rT}$ και άρα το διάνυσμα

$$u = \frac{e^{-rT}}{\|x^*\|_1} x^*$$

είναι λύση του γραμμικού συστήματος $Du = p$ με $u > 0$. □

Αν ορίσουμε $q_k := u_k e^{rT}$, έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{M} q_k = 1.$$

Εφόσον $u > 0$, μπορούμε να φανταστούμε ότι τα q_k ορίζουν ένα νέο μέτρο πιθανότητας q, το οποίο αποδίδει πιθανότητα q_k στο ενδεχόμενο που η αγορά βρεθεί στην κατάσταση k στον χρόνο T. Όπως και στο διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου, οι πιθανότητες αυτές δεν έχουν καμιά σχέση και δεν πρέπει να συγχέονται με τις πιθανότητες π_k που αποδίδει το μοντέλο μας σε αυτά τα ενδεχόμενα. Επιπλέον, οι υπόλοιπες εξισώσεις του γραμμικού συστήματος ($\alpha = 2, 3, \ldots, N$) γράφονται ως εξής:

$$\sum_{k=1}^{M} D_{\alpha k} u_k = p_\alpha \Leftrightarrow e^{-rT} \sum_{k=1}^{M} q_k D_{\alpha k} = p_\alpha \Leftrightarrow e^{-rT} \mathbb{E}^q[S_\alpha(T)] = S_\alpha(0), \qquad \alpha = 2, 3, \ldots, N.$$

Το q είναι λοιπόν ένα αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας. Εφόσον $u > 0$, έχουμε ακόμα ότι $q_k > 0 \Leftrightarrow \pi_k > 0$. Όταν συμβαίνει αυτό, λέμε ότι τα μέτρα πιθανότητας π και q είναι ισοδύναμα και γράφουμε $q \sim \pi$. Μπορούμε τώρα να επαναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 3 ως εξής.

Θεώρημα 4 Η αρχή της μη επιτηδειότητας ικανοποιείται τότε και μόνο, όταν υπάρχει ένα αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας q τέτοιο ώστε $q \sim \pi$.

Γιατί να προτιμήσουμε αυτήν τη διατύπωση; Οι έννοιες του αδιάφορου κινδύνου μέτρου πιθανότητας και της ισοδυναμίας δυο μέτρων μπορούν να οριστούν για κάθε υπόδειγμα που θα εξετάσουμε. Έτσι, η διατύπωση στο Θεώρημα 4 είναι καθολική για όλα τα υποδείγματα, ενώ αντίθετα η διατύπωση στο θεώρημα 3 αναφέρεται αποκλειστικά στο υπόδειγμα Arrow-Debreu.

Έχοντας προσδιορίσει σαφώς τους περιορισμούς που οφείλει να πληροί το μοντέλο μας ώστε να ικανοποιείται η αρχή της μη επιτηδειότητας, θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στην τιμολόγηση παραγώγων των προϊόντων της αγοράς μας. Η απόδοση ενός τέτοιου παραγώγου στον χρόνο T θα είναι συνάρτηση των τιμών των πρωτογενών προϊόντων στον χρόνο T και θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα $f \in \mathbb{R}^M : f^\top = (f_1, \ldots, f_M)$, όπου f_k θα είναι η απόδοση του παραγώγου, αν η αγορά βρεθεί στην κατάσταση k. Αν θέλουμε να αναπαραγάγουμε την απόδοση του παραγώγου αυτού, πρέπει να βρούμε ένα χαρτοφυλάκιο, δηλαδή ένα $\theta \in \mathbb{R}^N$, που η αξία του σε κάθε μια από τις M καταστάσεις ταυτίζεται με την αξία του χαρτοφυλακίου, δηλαδή

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} = f_k, \qquad k = 1, \ldots, M. \tag{2.8}$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα ($D^\top \theta = f$) με M εξισώσεις και N αγνώστους. Αν το σύστημα αυτό έχει λύση $\theta \in \mathbb{R}^N$, τότε η αρχική αξία του παραγώγου επιβάλλεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας και πρέπει να ταυτίζεται με την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου που αναπαράγει την απόδοσή του, δηλαδή $V_0(f) = \theta \cdot p$.

Παράδειγμα 6 Θεωρήστε ένα υπόδειγμα αγοράς μιας περιόδου με

$$p = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι έχουμε δύο προϊόντα με κίνδυνο καθένα από τα οποία ακολουθεί το διωνυμικό υπόδειγμα. Για παράδειγμα, το δεύτερο προϊόν της αγοράς έχει σημερινή αξία 8, ενώ στον χρόνο T η αξία του είναι είτε 10 (καταστάσεις 1 και 2) είτε 6 (καταστάσεις 3 και 4). Θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο για το οποίο $f^\top = (13, 16, 5, 8)$. Είναι εύκολο να δείτε ότι το σύστημα $D^\top \theta = f$ έχει μοναδική λύση με $\theta^\top = (1, 2, -1)$, άρα η αρχική αξία αυτού του παραγώγου είναι $V_0 = 1 \times 0,9 + 8 \times 2 + 6 \times (-1) = 10,9$. Προσέξτε και πάλι ότι οι πιθανότητες π_k δεν παίζουν ρόλο στην τιμολόγηση του παραγώγου.

Παρατήρηση 10 Το γραμμικό σύστημα $D^\top \theta = f$ ενδέχεται να μην έχει μονοσήμαντη λύση. Επομένως είναι δυνατόν να υπάρχουν διαφορετικά χαρτοφυλάκια που αναπαράγουν την απόδοση του παραγώγου. Σε αυτήν την περίπτωση δεν έχει σημασία ποιο από αυτά θα χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε την αρχική αξία του παραγώγου, καθώς όλα τα χαρτοφυλάκια που αναπαράγουν την απόδοση του παραγώγου έχουν την ίδια αρχική αξία. Αυτός ο ισχυρισμός είναι συνέπεια της αρχής της μη επιτηδειότητας και μπορούμε να τον αποδείξουμε ως εξής. Γνωρίζουμε ότι από την αρχή της μη επιτηδειότητας υπάρχει $u \in \mathbb{R}^M$ ώστε $Du = p$. Επομένως, αν $D^\top \theta_1 = D^\top \theta_2 = f$, έχουμε:

$$(\theta_1 - \theta_2) \cdot p = (\theta_1 - \theta_2) \cdot (Du) = D^\top (\theta_1 - \theta_2) \cdot u = 0.$$

Παράδειγμα 7 Θεωρήστε ένα υπόδειγμα αγοράς μιας περιόδου με

$$p = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 8 \\ 6 \\ 10,9 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 8 & 5 \\ 13 & 16 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρήστε τώρα ότι η αγορά μας είναι η ίδια του προηγούμενου παραδείγματος με την προσθήκη του παραγώγου που τιμολογήσαμε στα προς διαπραγμάτευση προϊόντα. Κάθε παράγωγο που μπορεί να αναπαραχθεί με ένα χαρτοφυλάκιο θ, όπου $\theta^\top = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$, μπορεί επίσης να αναπαραχθεί και από το χαρτοφυλάκιο $\tilde{\theta}$ με $\tilde{\theta}^\top = (\theta_1 + \theta_4, \theta_2 + 2\theta_4, \theta_3 - \theta_4, 0)$. Αυτό συμβαίνει γιατί το παράγωγο του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί, όπως είδαμε, να συντεθεί από τα άλλα προϊόντα. Προσέξτε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} \cdot p &= 0,9 \times (\theta_1 + \theta_4) + 8 \times (\theta_2 + 2\theta_4) + 6 \times (\theta_3 - \theta_4) + 10,9 \times 0 \\ &= 0,9 \times \theta_1 + 8 \times \theta_2 + 6 \times \theta_3 + 10,9 \times \theta_4 \\ &= \theta \cdot p. \end{aligned}$$

Από τη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι το γραμμικό σύστημα $D^\top\theta = f$ έχει λύση $\theta \in \mathbb{R}^N$ για κάθε $f \in \mathbb{R}^M$, αν και μόνο αν η τάξη του πίνακα D είναι M. Σε αυτήν την περίπτωση κάθε παράγωγο μπορεί να αναπαραχθεί και να τιμολογηθεί, οπότε η αγορά που περιγράφει το μοντέλο μας είναι πλήρης. Στην αντίθετη περίπτωση, υπάρχουν παράγωγα για τα οποία το σύστημα (2.8) δεν έχει λύση και η αρχή της μη επιτηδειότητας δεν αρκεί για να προσδιορίσουμε την αξία του παραγώγου. Και πάλι όμως η αρχή της μη επιτηδειότητας μπορεί να δώσει εκτιμήσεις για την αρχική αξία του παραγώγου. Πιο συγκεκριμένα, αν ένα χαρτοφυλάκιο έχει σε όλες τις δυνατές τελικές καταστάσεις μεγαλύτερη αξία από αυτήν του παραγώγου, τότε η αρχική αξία του παραγώγου δεν μπορεί να ξεπερνά αυτή του χαρτοφυλακίου:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} \geq f_k, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, M\} \Longrightarrow V_0(f) \leq \theta \cdot p.$$

Επομένως, αν $\mathcal{M}_+ = \{\theta \in \mathbb{R}^N : \ \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} \geq f_k, \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, M\}\} = \{\theta \in \mathbb{R}^N : \ D^\top\theta \geq f\}$, τότε

$$V_0(f) \leq \min_{\theta \in \mathcal{M}_+} \ \theta \cdot p. \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\min_{\theta \in \mathcal{M}_+} \theta \cdot p &= \min_{\theta \in \mathbb{R}^N} \max_{u \geq 0} \ \theta \cdot p + \sum_{k=1}^{M} u_k \left(f_k - \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} \right) \\
&= \max_{u \geq 0} \min_{\theta \in \mathbb{R}^N} \ \theta \cdot p + \sum_{k=1}^{M} u_k \left(f_k - \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} \right) \\
&= \max_{u \geq 0} \min_{\theta \in \mathbb{R}^N} \ \sum_{k=1}^{M} u_k f_k + \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha \left(p_\alpha - \sum_{k=1}^{M} u_k D_{\alpha k} \right) \\
&= \max_{u \geq 0, Du = p} \ \sum_{k=1}^{M} u_k f_k \\
&= e^{-rT} \max_{q \in \mathcal{I}} q \cdot f,
\end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{I} = \{q \in \mathbb{R}^M : \ q \geq 0, \ Dq = e^{rT} p\}. \tag{2.10}$$

Η πρώτη ισότητα παραπάνω ισχύει γιατί

$$\max_{u_k \geq 0} \ u_k \left(f_k - \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} \right) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f_k \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha D_{\alpha k} \\ +\infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από εφαρμογή του θεωρήματος δυϊσμού του γραμμικού προγραμματισμού. Η προτελευταία ισότητα προκύπτει όπως και η πρώτη, αφού

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^N} \ \sum_{\alpha=1}^{N} \theta_\alpha \left(p_\alpha - \sum_{k=1}^{M} u_k D_{\alpha k} \right) = \begin{cases} 0, & \text{αν } Du = p, \\ -\infty, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι το εφικτό σύνολο I του δυϊκού προγράμματος είναι ακριβώς τα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας, ενώ η αντικειμενική συνάρτηση $q \cdot f$ είναι η αναμενόμενη (κάτω από το q) απόδοση του παραγώγου στον χρόνο T. Επιπλέον, το σύνολο $\mathcal{I}$ είναι μη κενό και συμπαγές. Επομένως, το ελάχιστο στην (2.9) λαμβάνεται για κάποιο $\theta \in \mathcal{M}_+$ και ισούται με τη λύση του δυϊκού προβλήματος,

$$V_0(f) \leq V_0^{max} := \max_{q \in \mathcal{I}} e^{-rT} \mathbb{E}^q[f(S(T))].$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε ένα κάτω φράγμα για την αρχική αξία του παραγώγου:

$$V_0(f) \geq V_0^{min} := e^{-rT} \min_{q \in \mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f(S(T))].$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, ακόμη και σε μια μη πλήρη αγορά, η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει περιορισμούς στην αρχική αξία ενός παραγώγου. Είναι εύλογο να διερευνήσουμε αν οι παραπάνω εκτιμήσεις είναι οι ακριβέστερες που μπορεί να πάρει κανείς. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική.

Πρόταση 7 Αν το αρχικό μας υπόδειγμα αγοράς ικανοποιεί την αρχή της μη επιτηδειότητας και $V_0^{\min} \neq V_0^{\max}$, τότε οποιαδήποτε αρχική αξία v_0 του παραγώγου στο διάστημα $(V_0^{\min}, V_0^{\max})$ αποκλείει την ύπαρξη στρατηγικής επιτηδειότητας.

Απόδειξη: Διευρύνουμε την αγορά μας συμπεριλαμβάνοντας και το παράγωγο στα προϊόντα που είναι διαθέσιμα προς διαπραγμάτευση με αρχική τιμή v_0. Η διευρυμένη αυτή αγορά έχει διάνυσμα αρχικών τιμών και πίνακα τελικής κατάστασης

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} e^{-rT} \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad \text{και} \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N1} & D_{N2} & \dots & D_{NM} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_M \end{pmatrix} \in \Pi_{(N+1)\times M},$$

αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $u \in \mathbb{R}^M$ τέτοιο ώστε $u > 0$ και $\tilde{D}u = \tilde{p}$, οπότε από το Θεώρημα 3 δεν μπορεί να κατασκευαστεί στρατηγική επιτηδειότητας χρησιμοποιώντας τα προϊόντα της διευρυμένης αυτής αγοράς.

Πράγματι, εφόσον το $\mathcal{I}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^M$, το μέγιστο και το ελάχιστο στα δυϊκά προβλήματα που θεωρήσαμε παραπάνω λαμβάνονται, υπάρχουν δηλαδή $x, y \in \mathbb{R}^M$ τέτοια ώστε $x, y \geq 0$, $Dx = Dy = p$ και

$$V_0^{\min} = x \cdot f, \; V_0^{\max} = y \cdot f.$$

Επιπλέον, από την αρχή της μη επιτηδειότητας για το αρχικό μας υπόδειγμα, υπάρχει $w \in \mathbb{R}^M$ με $w > 0$ και $Dw = p$. Αν λοιπόν $v_0 \in (V_0^{\min}, V_0^{\max})$, υπάρχουν θετικές σταθερές α, β, γ τέτοιες ώστε $\alpha + \beta + \gamma = 1$ και

$$v_0 = \alpha V_0^{\min} + \beta V_0^{\max} + \gamma(w \cdot f) = (\alpha x + \beta y + \gamma w) \cdot f.$$

Ορίζουμε τώρα $u = \alpha x + \beta y + \gamma w$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $Du = p$ και $u > 0$. Επιπλέον,

$$\tilde{D}u = \begin{pmatrix} Du \\ f \cdot u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ v_0 \end{pmatrix} = \tilde{p},$$

άρα στη διευρυμένη αγορά δεν υπάρχουν ευκαιρίες επιτηδειότητας. □

Πόρισμα 1 Η αρχική αξία ενός παραγώγου καθορίζεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας, αν και μόνο αν η $\mathbb{E}^q[f(S(T))]$ έχει την ίδια τιμή για όλα τα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας $q \in \mathcal{I}$.

Θεώρημα 5 Η αγορά που περιγράφει το υπόδειγμα Arrow-Debreu είναι πλήρης, αν και μόνο αν υπάρχει μοναδικό αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα η αγορά είναι πλήρης, αν και μόνο αν τα $\sup_{q\in\mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f(S_T)]$ και $\inf_{q\in\mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f(S_T)]$ ταυτίζονται για κάθε $f \in \mathbb{R}^M$. Όμως

$$\sum_{k=1}^{M} q_k f_k = \sum_{k=1}^{M} \tilde{q}_k f_k, \; \forall f \in \mathbb{R}^M \Leftrightarrow q = \tilde{q}.$$

Επομένως, είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη, προκειμένου η τιμή κάθε παραγώγου f να καθορίζεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας, να είναι μονοσύνολο το σύνολο $\mathcal{I}$. □

Παράδειγμα 8 (Τριωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου). Θεωρήστε ένα υπόδειγμα αγοράς μιας περιόδου με

$$p = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ας βρούμε πρώτα τα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας q. Θα πρέπει:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ (12q_1 + 10q_2 + 8q_3) \times 0,9 = 9 \end{cases}$$

Η γενική λύση αυτού του συστήματος είναι $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1-t}{2}, t, \frac{1-t}{2})$ με $t \in \mathbb{R}$. Για να έχουμε $q \geq 0$ θα πρέπει $t \in [0,1]$. Επομένως,

$$\mathcal{I} = \Big\{ \begin{pmatrix} (1-t)/2 \\ t \\ (1-t)/2 \end{pmatrix} : \ t \in [0,1] \Big\}.$$

Η αγορά αυτού του υποδείγματος ικανοποιεί την αρχή της μη επιτηδειότητας και δεν είναι πλήρης. Έστω τώρα ένα παράγωγο με διάνυσμα απόδοσης $f \in \mathbb{R}^3$. Τότε, αν $q \in \mathcal{I}$ έχουμε

$$\mathbb{E}^q[f] = \frac{1-t}{2} f_1 + t f_2 + \frac{1-t}{2} f_3 = \frac{f_1 + f_3}{2} + t(f_2 - \frac{f_1 + f_3}{2}).$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να τιμολογείται ένα παράγωγο από την αρχή της μη επιτηδειότητας είναι να μην εξαρτάται από το t η παραπάνω έκφραση. Επομένως, ένα παράγωγο με απόδοση f μπορεί να τιμολογηθεί, αν και μόνο αν $f_1 + f_3 = 2f_2$ και τότε η αρχική του αξία θα είναι $V_0(f) = 0,9 \times f_2$.

Έστω τώρα ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης 9, δηλαδή $f^\top = (3,1,0)$. Τότε

$$\max_{q \in \mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f] = \max_{t \in [0,1]} \frac{3-t}{2} = \frac{3}{2}$$

και

$$\min_{q \in \mathcal{I}} \mathbb{E}^q[f] = \min_{t \in [0,1]} \frac{3-t}{2} = 1.$$

Επομένως στο υπόδειγμα αυτό έχουμε τις εκτιμήσεις: $0,9 \leq c(9,T,9) \leq 1,35$.

Συνοψίζοντας όσα είδαμε στο πλαίσιο του γενικού υποδείγματος μιας περιόδου των Arrow & Debreu έχουμε:

- Η αρχή της μη επιτηδειότητας ικανοποιείται τότε και μόνο, όταν υπάρχει αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας ($q \in \mathcal{I}$) ώστε $q \sim \pi$.
- Η αγορά που περιγράφει το υπόδειγμα είναι πλήρης, όταν υπάρχει *μοναδικό* τέτοιο μέτρο.
- Σε κάθε περίπτωση, αν η απόδοση ενός παραγώγου στον χρόνο T είναι $f(S(T))$, τότε η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει τις παρακάτω ανισότητες για την αρχική του αξία:

$$\min_{q \in \mathcal{I}} e^{-rT} \mathbb{E}^q[f(S(T))] \ \leq \ V_0(f) \leq \ \max_{q \in \mathcal{I}} e^{-rT} \mathbb{E}^q[f(S(T))].$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα που αποδείξαμε για υποδείγματα μιας περιόδου παραμένουν (στην ουσία τους) σε ισχύ και για πολύ γενικότερα υποδείγματα και αναφέρονται συνήθως ως το *Θεμελιώδες Θεώρημα* της τιμολόγησης παραγώγων (fundamental theorem of asset pricing).

Είδαμε στην Πρόταση 7 ότι, σε μια αγορά που δεν είναι πλήρης η αξία ενός παραγώγου δεν μπορεί να καθοριστεί από την αρχή της μη επιτηδειότητας, αλλά υπάρχει εν γένει ένα ολόκληρο διάστημα από τιμές που είναι συμβατές με την αρχή της μη επιτηδειότητας. Έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι για τη συστηματική επιλογή μίας από τις δυνατές τιμές του παραγώγου. Ένας από τους πιο διαδεδομένους είναι χρήση των συναρτήσεων ωφέλειας (utility functions). Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει περισσότερες πληροφορίες σε εισαγωγικό επίπεδο στο βιβλίο [2].

Είπαμε στην αρχή του κεφαλαίου ότι σκοπός μας είναι να αναλύσουμε υποδείγματα που θεωρούνται ρεαλιστικά. Τα υποδείγματα μιας περιόδου που μελετήσαμε έχουν δυο βασικά μειονεκτήματα. Αφενός, τα προϊόντα που μοντελοποιούμε μπορούν να καταλήξουν μόνο σε ένα διακριτό σύνολο καταστάσεων. Αφετέρου, τα υποδείγματα μιας περιόδου δεν επιτρέπουν συναλλαγές μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης. Έτσι, δεν μπορούμε να εξετάσουμε παράγωγα αμερικανικού τύπου, αλλά ούτε και να χρησιμοποιήσουμε δυναμικά αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια ώστε να αναπαραγάγουμε αποδόσεις ευρωπαϊκών παραγώγων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πώς μπορούμε να άρουμε τον τελευταίο περιορισμό.

2.4 Το Θεώρημα του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου

Θεώρημα 6 Έστω C μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν L είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $L \cap C = \emptyset$, τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $x_* \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε:

$$y \cdot x_* = 0 \text{ για κάθε } y \in L$$

και

$$u \cdot x_* > 0 \text{ για κάθε } u \in C.$$

Επομένως, το υπερεπίπεδο $H = \{u \in \mathbb{R}^N : u \cdot x_* = 0\}$ περιέχει τον L, ενώ το κυρτό σύνολο C βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στον έναν από τους δύο ημιχώρους που αφορίζονται από το H.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $G = C - L = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = u - y, \ \text{ με } u \in C, y \in L\}$. Το G είναι μη κενό και κυρτό (εύκολο), ενώ είναι και κλειστό. Πράγματι, έστω $x_n = u_n - y_n$ είναι μια ακολουθία στο G τέτοια ώστε $x_n \to x$. Η u_n είναι μια ακολουθία στο συμπαγές σύνολο C, επομένως υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία της $u_{n_k} \to u \in C$. Η ακολουθία y_{n_k} στον L θα συγκλίνει επίσης, αφού $y_{n_k} = u_{n_k} - x_{n_k} \to u - x$, ενώ $u - x \in L$, αφού ο L ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό σύνολο. Επομένως $x = u - (u - x) \in G$ και άρα το G είναι κλειστό.

Έστω x_* εκείνο το σημείο του G με την ελάχιστη απόσταση από το μηδέν. $L \cap C = \emptyset \implies \|x_*\| > 0$. Από την κυρτότητα του G, αν $x \in G$, τότε για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ έχουμε $\alpha x + (1 - \alpha)x_* \in G$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \|x_*\|^2 &\leq \|\alpha x + (1 - \alpha)x_*\|^2 \\ &= \alpha^2\|x\|^2 + (1 - \alpha)^2\|x_*\|^2 + 2\alpha(1 - \alpha)x \cdot x_* \\ &= \|x_*\|^2 + \alpha^2\|x - x_*\|^2 + 2\alpha(x \cdot x_* - \|x_*\|^2). \end{aligned}$$

Από την παραπάνω (εφόσον $\alpha > 0$) έχουμε

$$2(\|x_*\|^2 - x \cdot x_*) \leq \alpha\|x - x_*\|^2, \ \forall \alpha \in (0, 1).$$

Παίρνοντας $\alpha \to 0$ λαμβάνουμε την

$$x \cdot x_* \geq \|x_*\|^2 > 0, \ \forall x \in G. \tag{2.11}$$

Αν $u \in C$ τότε $u = u - 0 \in G$, επομένως από την (2.11) έχουμε $u \cdot x_* > 0$.
Επιπλέον, αν $y \in L$ τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $u - \lambda y \in G$ οπότε

$$\lambda y \cdot x_* < u \cdot x_*, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αυτό όμως μπορεί να συμβεί μόνο αν $y \cdot x_* = 0$. □

2.5 Ασκήσεις

Άσκηση 19 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι €50, ενώ η τιμή ενός ομολόγου έξι μηνών όψεως €100 είναι €96. Υποθέτουμε ότι σε έξι μήνες η τιμή της μετοχής θα είναι είτε €60 είτε €42. Βάσει του παραπάνω υποδείγματος:
α) Τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς εκατό μετοχών με ωρίμανση σε έξι μήνες και τιμή άσκησης €48 ανά μετοχή.
β) Συνθέστε ένα χαρτοφυλάκιο από μετοχές και εξάμηνα ομόλογα, το οποίο έχει την ίδια απόδοση με το παραπάνω δικαίωμα.
γ) Τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης εκατό μετοχών με την ίδια ωρίμανση και τιμή άσκησης.
δ) Αν η τιμή διαπραγμάτευσης ενός δικαιώματος πώλησης όπως αυτό του ερωτήματος (γ) είναι €23, κατασκευάστε μια στρατηγική επιτηδειότητας.

Άσκηση 20 Θεωρούμε την εξής αγορά μιας περιόδου με τρία προϊόντα και τέσσερις καταστάσεις. Το προϊόν 1 είναι ένα άνευ κινδύνου ομόλογο με $r = 0$, το προϊόν 2 είναι μια μετοχή με αρχική τιμή 1, το προϊόν 3 είναι μια άλλη μετοχή με αρχική τιμή 1. Ας αριθμήσουμε τις 4 δυνατές τελικές καταστάσεις ως εξής:
1) και οι δυό μετοχές αξίζουν $1 + \epsilon$ για κάποιο $\epsilon > 0$
2) το προϊόν 2 αξίζει $1 + \epsilon$ και το προϊόν 3 αξίζει $1 - \epsilon$
3) το προϊόν 3 αξίζει $1 + \epsilon$ και το προϊόν 2 αξίζει $1 - \epsilon$
4) και οι δυο μετοχές αξίζουν $1 - \epsilon$.

α. Γράψτε τον πίνακα D των δυνατών τελικών καταστάσεων σύμφωνα με το υπόδειγμα Arrow-Debreu.
β. Βρείτε όλα τα μέτρα πιθανότητας π στον χώρο των τελικών καταστάσεων για τα οποία

$$\mathbb{E}^{\pi}[X_i(T)] = e^{rT} X_i(0), \ i = 1, 2, 3.$$

Με $X_i(0)$ (αντίστοιχα $X_i(T)$) συμβολίζουμε την αρχική (αντίστοιχα τελική) αξία του προϊόντος i.
γ. Έστω ένα παράγωγο με απόδοση f_k στην τελική κατάσταση $k, \ k = 1, 2, 3, 4$. Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη αρχική αξία που επιτρέπεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας;
δ. Ποια παράγωγα μπορούν να τιμολογηθούν ακριβώς;
ε. Ποια είναι η 'δίκαιη' αρχική αξία του παραγώγου με απόδοση $f_k = 0,1k$ στην κατάσταση k;
στ. Βρείτε το χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει την απόδοση αυτού του παραγώγου.

Άσκηση 21 Το κουπόνι στοιχήματος του ΟΠΑΠ της 24ης Οκτωβρίου δίνει τις ακόλουθες αποδόσεις για τον ποδοσφαιρικό αγώνα ΑΕΚ -Παναθηναϊκός. 1: 2,65- Χ: 3,05- 2: 2,45. Αυτό σημαίνει ότι στοίχημα €1 σε νίκη της ΑΕΚ πληρώνει €2,65 σε ενδεχόμενη νίκη της ΑΕΚ και 0 διαφορετικά, στοίχημα €1 σε ισόπαλο αποτέλεσμα πληρώνει €3,05 σε περίπτωση ισοπαλίας και 0 διαφορετικά, ενώ στοίχημα €1 σε νίκη του Παναθηναϊκού πληρώνει €2,45 σε ενδεχόμενη νίκη του Παναθηναϊκού και 0 διαφορετικά.
Θεωρήστε μια αγορά με τα εξής τρία προϊόντα: στοίχημα €1 σε νίκη της ΑΕΚ, στοίχημα €1 σε νίκη του Παναθηναϊκού και στοίχημα €1 στην ισοπαλία. Γράψτε τον πίνακα D των τελικών καταστάσεων κατά το υπόδειγμα Arrow-Debreu. Κατασκευάστε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο με αρνητικές θέσεις σε όλα τα προϊόντα και αρχική αξία -€100 τέτοιο ώστε η τελική του αξία να μην εξαρτάται από το αποτέλεσμα του αγώνα. Ποια είναι η τελική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου; Είναι αυτό το χαρτοφυλάκιο μια στρατηγική επιτηδειότητας για το γραφείο στοιχημάτων;

Άσκηση 22 Σαν γενίκευση της προηγούμενης άσκησης, θεωρήστε μια αγορά που περιλαμβάνει ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με τελική αξία 1 και σημερινή αξία 1 (την αποχή από το στοίχημα) και τα τρία στοιχήματα με αποδόσεις: $1 : p_1$, Χ: p_2, $2 : p_3$. Βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε στην αγορά αυτή να μην υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας.

Άσκηση 23 Στο υπόδειγμα Arrow-Debreu δείξτε ότι, αν για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $\theta \cdot p = 0$ και $D^\top \theta \geq 0$, έχουμε $D^\top \theta = 0$, τότε

$$D^\top \theta \geq 0 \Longrightarrow \theta \cdot p \geq 0$$

Άσκηση 24 Σε μια αγορά υπάρχουν τρία προϊόντα. Το πρώτο είναι χωρίς κίνδυνο και έχει σημερινή αξία $p_1 = 0,8$. Τα άλλα δύο είναι μετοχές με σημερινή αξία $p_2 = 8$ και $p_3 = 4,8$. Υποθέτουμε ότι μετά από κάποιο χρόνο η αγορά μπορεί να βρεθεί σε μια από τις ακόλουθες τέσσερις καταστάσεις.

Κατάσταση	Αξία προϊόντος 1	Αξία προϊόντος 2	Αξία προϊόντος 3
Α	1	10	8
Β	1	12	8
Γ	1	10	4
Δ	1	6	4

α) Είναι η αγορά πλήρης;
β) Ποια παράγωγα μπορούν να τιμολογηθούν ακριβώς από την αρχή της μη επιτηδειότητας;
γ) Τιμολογήστε το παράγωγο με απόδοση 3, 5, 7 και 3, στις καταστάσεις Α, Β, Γ και Δ, αντίστοιχα.
δ) Ποια είναι η ελάχιστη και η μέγιστη αρχική αξία που είναι συμβατή με την αρχή με της μη επιτηδειότητας, για ένα δικαίωμα αγοράς του προϊόντος 2 με τιμή άσκησης 9;
ε) Διευρύνουμε την προηγούμενη αγορά, προσθέτοντας στα διαθέσιμα προϊόντα το δικαίωμα του προηγούμενου ερωτήματος με τιμή διαπραγμάτευσης 1,2. Δείξτε ότι η διευρυμένη αυτή αγορά είναι πλήρης και βρείτε την αρχική αξία ενός παραγώγου που έχει απόδοση 0, 2, 0 και 2, στις καταστάσεις Α, Β, Γ και Δ, αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 3

Το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε ένα διακριτό αλλά περισσότερο ρεαλιστικό υπόδειγμα αγοράς, το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων. Θα διαμερίσουμε το χρονικό διάστημα αναφοράς $[0, T]$ σε μικρότερα διαστήματα, σε καθένα από τα οποία η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος ακολουθεί την απλή δυναμική του διωνυμικού υποδείγματος μιας περιόδου. Με τον τρόπο αυτό, καθώς η λεπτότητα της διαμέρισης μικραίνει, οι τροχιές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος πλησιάζουν περισσότερο στην ιδέα που έχουμε για το πώς μεταβάλλονται π.χ. οι τιμές των μετοχών, ενώ ταυτόχρονα διατηρούμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε αναλυτικά το μοντέλο. Επιπλέον, καθόσον το υπόδειγμα είναι διακριτό, προσφέρεται εύκολα για αριθμητικούς υπολογισμούς. Μια πολύ καλή αναφορά για το περιεχόμενο αυτού του Κεφαλαίου είναι η [8].

3.2 Το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων

Στο υπόδειγμα αυτό η αγορά που θα μελετήσουμε αποτελείται από δύο προϊόντα, το ένα από τα οποία είναι χωρίς κίνδυνο, ενώ το άλλο είναι ένα προϊόν με κίνδυνο. Επειδή συνήθως θέλουμε να τιμολογήσουμε και να αντισταθμίσουμε παράγωγα του προϊόντος με κίνδυνο, θα αναφερόμαστε σε αυτό ως *πρωτογενές προϊόν* και θα θεωρήσουμε ένα χρονικό ορίζοντα T ως τον χρόνο ωρίμανσης του παραγώγου που θέλουμε να αναλύσουμε. Το χρονικό διάστημα $[0, T]$ διαμερίζεται από τους χρόνους $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$ σε N μικρότερα διαστήματα τα οποία θα θεωρήσουμε για απλότητα ίσα. Επομένως, κάθε τέτοιο διάστημα έχει εύρος $h = T/N$ ενώ $t_k = kh,\ k = 0, 1, \ldots, N$.

Θα υποθέσουμε ότι η σημερινή αξία του άνευ κινδύνου προϊόντος είναι $B_0 = 1$, ενώ μεταβάλλεται στον χρόνο με ένα σταθερό ρυθμό, δηλαδή $B_{t_{k+1}}/B_{t_k} = \Lambda$. Εδώ θα ακολουθήσουμε τη σύμβαση ότι το προϊόν χωρίς κίνδυνο είναι ένας λογαριασμός με συνεχή ανατοκισμό και σταθερό επιτόκιο r, οπότε $\Lambda = e^{rh}$.

Η σημερινή αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι $S_0 > 0$, ενώ η εξέλιξη της στο χρόνο είναι στοχαστική. Αν τη στιγμή t_k η αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_{t_k}, τότε

$$S_{t_{k+1}} = S_{t_k}\xi_{k+1}, \tag{3.1}$$

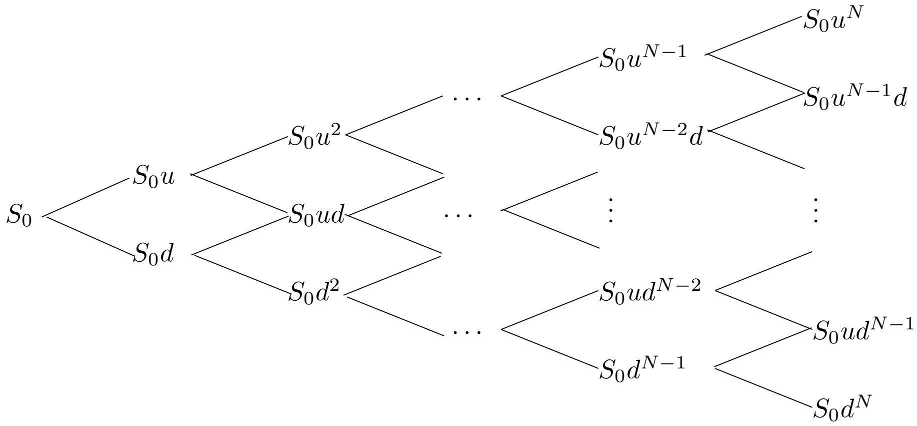
όπου η $\{\xi_k\}_{k\in\{1,2,\ldots,N\}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Η κατανομή των ξ_k είναι η ακόλουθη:

$$\xi_k = \begin{cases} u, & \text{με πιθανότητα } p \\ d, & \text{με πιθανότητα } 1-p. \end{cases} \tag{3.2}$$

Για παράδειγμα, αν πιστεύουμε ότι σε κάθε διάστημα η τιμή μιας μετοχής είτε θα ανέβει κατά 5% είτε θα πέσει κατά 4% με ίσες πιθανότητες, αυτό αντιστοιχεί στην επιλογή $u = 1,05$, $d = 0,96$ και $p = \frac{1}{2}$ στο μοντέλο μας. Παρατηρήστε ότι σε κάθε διάστημα η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος είναι ίδια με αυτή του διωνυμικού υποδείγματος μιας περιόδου, όπου $s_0 = S_{t_k}$, $s_1 = S_{t_k}u$ και $s_2 = S_{t_k}d$. Όπως είδαμε στο αντίστοιχο υπόδειγμα μιας περιόδου, προκειμένου να μην παρουσιάζονται ευκαιρίες επιτηδειότητας, θα πρέπει τα u, d να ικανοποιούν τον περιορισμό

$$d < e^{rh} < u. \tag{3.3}$$

Επιπλέον, θα απαιτήσουμε $d > 0$, ώστε η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος να είναι πάντα αυστηρά θετική. Αυτό το μοντέλο για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος ονομάζεται διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων (multiperiod binomial model) ή υπόδειγμα των Cox, Ross & Rubinstein (CRR). Η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος στο διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων μπορεί να παρασταθεί διαγραμματικά με το ακόλουθο ανασυνδυασμένο δέντρο.



Σε κάθε κόμβο του δέντρου το ενδεχόμενο να μετακινηθούμε προς τα πάνω έχει πιθανότητα p.

Από την σχέση (4.8) βλέπουμε ότι

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{j=1}^{k} \xi_j. \tag{3.4}$$

Οι πιθανές τροχιές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος στο διάστημα $[0, T]$ είναι 2^N, όσες και οι συνδυασμοί τιμών που μπορούν να πάρουν οι τυχαίες μεταβλητές $\{\xi_k\}_{k=1,\ldots,N}$.

Η αφετηρία της σύγχρονης θεωρίας της Μαθηματικής Χρηματοοικονομίας είναι να θεωρήσουμε (όπως και στα υποδείγματα μιας περιόδου) το μοντέλο μας σαν ένα χώρο πιθανότητας Ω, κάθε σημείο του οποίου αντιστοιχεί σε ένα από τα πιθανά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Επομένως, στο διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων, κάθε σημείο του Ω είναι ένα μονοπάτι N βημάτων στο παραπάνω δέντρο που ξεκινά από την S_0 και καταλήγει σε μια από τις $N + 1$ δυνατές τιμές της S_T.

Για παράδειγμα, αν $N = 3$, τότε το μοντέλο μας είναι ένας χώρος πιθανότητας $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$ όπου

$$\begin{aligned}
\omega_1 &\mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u, u, u),\\
\omega_2 &\mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u, u, d),\\
\omega_3 &\mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u, d, u),\\
\omega_4 &\mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u, d, d),\\
\omega_5 &\mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (d, u, u),\\
\omega_6 &\mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (d, u, d),\\
\omega_7 &\mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (d, d, u),\\
\omega_8 &\mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (d, d, d).
\end{aligned}$$

Οι $\{\xi_k\}$ είναι απεικονίσεις από τον Ω (δηλαδή τυχαίες μεταβλητές) στο σύνολο $\{u, d\}$. Έτσι στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε $\xi_1(\omega_1) = \cdots \xi_1(\omega_4) = u$ και $\xi_1(\omega_5) = \cdots = \xi_1(\omega_8) = d$. Όπως φαίνεται από την (4.8), η αξία S_{t_k} του προϊόντος με κίνδυνο τη χρονική στιγμή t_k είναι και αυτή μια τυχαία μεταβλητή, επομένως η αξία του προϊόντος με κίνδυνο είναι μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου ορισμένη στον Ω.

Το μοντέλο μας καθορίζει επίσης πόσο πιθανή είναι η εμφάνιση καθενός από αυτά τα σενάρια. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι εφοδιάζουμε τον Ω με ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$. Η πιθανότητα $\mathbb{P}$ κάθε ενδεχομένου αντικατοπτρίζει τις πεποιθήσεις μας για την εξέλιξη της αγοράς. Έτσι στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = p^2(1-p)$.

Αξίζει τον κόπο να ξεκαθαρίσουμε στο σημείο αυτό ένα λεπτό ζήτημα. Μια τυχαία μεταβλητή, καθώς είναι απλά μια απεικόνιση από τον Ω σε κάποιο σύνολο, δεν έχει ανάγκη από κάποιο μέτρο πιθανότητας στον Ω για να οριστεί. Αυτό που καθορίζεται από το μέτρο πιθανότητας είναι το *πόσο πιθανή* είναι κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή η *κατανομή* της τυχαίας μεταβλητής. Για παράδειγμα, η από κοινού κατανομή των $\{\xi_k\}$ κάτω από το $\mathbb{P}$ τις καθιστά ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με την κοινή τους κατανομή να δίνεται από την (3.2). Αν στον Ω θεωρήσουμε ένα άλλο μέτρο πιθανότητας, οι ίδιες τυχαίες μεταβλητές θα έχουν διαφορετική κατανομή. Π.χ. αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον Ω ώστε $\mu(\{\omega_1\}) = \mu(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$, τότε κάτω από το μ οι ξ_1, ξ_2 παίρνουν την τιμή u με πιθανότητα 1, ενώ η ξ_3 παίρνει τις τιμές u και d με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ την καθεμία.

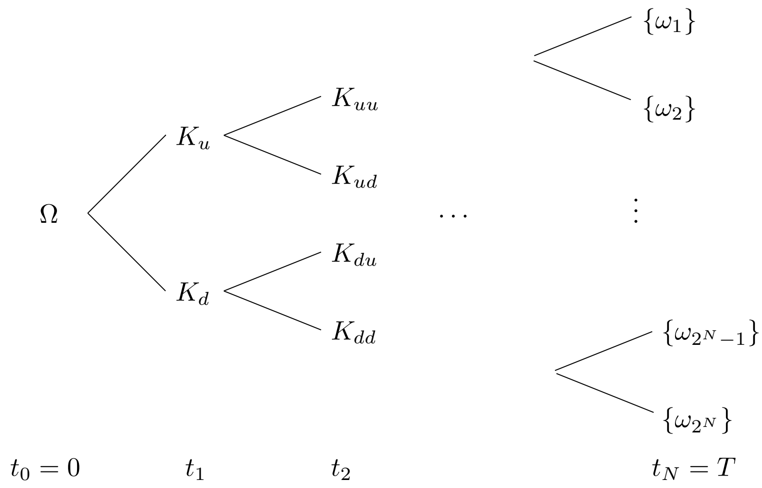
Αυτό που λείπει από το μοντέλο μας είναι μια έννοια που να προσδίδει την κατεύθυνση του χρόνου και το ρόλο αυτό παίζει η έννοια της *διήθησης* (filtration) που θα εξηγήσουμε παρακάτω. Ας φανταστούμε τον Ω του παραπάνω παραδείγματος σαν ένα σύνολο από τις δυνατές εκβάσεις της αγοράς και ας φανταστούμε την εξέλιξη της αγοράς σαν ένα πείραμα που πραγματοποιείται και το παρακολουθούμε καθώς αναπτύσσεται. Παρατηρώντας την εξέλιξη της αγοράς, θα επιχειρήσουμε να αποκαλύψουμε ποιο από αυτά τα σενάρια πραγματοποιείται. Στην αρχή, δεν μπορούμε, όπως είναι φυσικό, να εκφέρουμε κάποια κρίση. Όλα τα σενάρια είναι δυνατά. Στο τέλος αντίθετα, έχοντας παρατηρήσει την αγορά μέχρι τον χρόνο T, μπορούμε να αποφανθούμε ποιο από τα δυνατά σενάρια πραγματοποιήθηκε. Τι μπορούμε όμως να πούμε για τους ενδιάμεσους χρόνους; Έχοντας παρατηρήσει την αγορά μέχρι τη στιγμή t_1, η πληροφορία που μπορούμε να συλλέξουμε είναι αν $S_{t_1} = S_0 u$ ή $S_{t_1} = S_0 d$. Μπορεί λοιπόν κανείς να αποφανθεί αν το πείραμα που πραγματοποιείται ανήκει στο ενδεχόμενο

$$K_u = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \text{ ή στο } K_d = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}.$$

Ομοίως, έχοντας παρατηρήσει την αγορά μέχρι τη στιγμή t_2, κανείς μπορεί να αποφανθεί σε ποιο από τα παρακάτω σύνολα ανήκει το σενάριο που εκτυλίσσεται.

$$K_{uu} = \{\omega_1, \omega_2\},\ K_{ud} = \{\omega_3, \omega_4\},\ K_{du} = \{\omega_5, \omega_6\},\ K_{dd} = \{\omega_7, \omega_8\}.$$

Τέλος, όπως είπαμε, έχοντας παρατηρήσει την αγορά μέχρι τη στιγμή t_3, κανείς μπορεί να αποφασίσει ακριβώς ποιο σενάριο πραγματοποιήθηκε, δηλαδή σε ποιό από τα μονοσύνολα $K_{uuu} = \{\omega_1\}, K_{uud} = \{\omega_2\}$ κ.λπ. ανήκει το ενδεχόμενο που πραγματοποιήθηκε. Βλέπουμε λοιπόν ότι καθώς εξελίσσεται η αγορά, η πληροφορία που έχουμε συλλέξει από την S_t διαμερίζει τον χώρο πιθανότητας σε όλο και λεπτότερα ενδεχόμενα. Μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά αυτήν την προοδευτικά λεπτότερη διαμέριση του χώρου πιθανότητας ως εξής.



Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_k$ τη διαμέριση του Ω που επάγει η συνελεχθείσα από την αξία του πρωτογενούς προϊόντος πληροφορία μέχρι τη στιγμή t_k. Έτσι, έχουμε διαδοχικά:

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega\},$$

$$\mathcal{F}_1 = \{K_u, K_d\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{K_{uu}, K_{ud}, K_{du}, K_{dd}\},$$

κ.τ.λ. Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{F}_k$ αντιστοιχεί σε έναν από τους κόμβους του παραπάνω δέντρου στον χρόνο t_k και παριστάνει μια δυνατή εξέλιξη της αγοράς μέχρι τη στιγμή t_k.

Η απόδοση ενός παραγώγου με ωρίμανση T είναι μια τυχαία μεταβλητή X ορισμένη στον Ω. Κάθε $\omega \in \Omega$ αντιστοιχεί σε ένα πιθανό σενάριο εξέλιξης της αγοράς και η $X(\omega)$ είναι η απόδοση του παραγώγου σε αυτό το σενάριο. Πολλές φορές θα έχουμε να κάνουμε με παράγωγα ευρωπαϊκού τύπου, των οποίων η απόδοση εξαρτάται μόνο από την τιμή του πρωτογενούς προϊόντος στην ωρίμανση. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε $X(\omega) = f(S_T(\omega))$. Για παράδειγμα, ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K έχει απόδοση $X(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$. Άλλες φορές πάλι η απόδοση του παραγώγου θα εξαρτάται από όλη την τροχιά της τιμής του πρωτογενούς προϊόντος. Για παράδειγμα, ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με κάτω και εκτός φράγμα αποδίδει όσο ένα απλό ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, μόνο όμως αν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος παραμείνει μέχρι την ωρίμανση πάνω από ένα φράγμα M. Δηλαδή,

$$X(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+ \times \mathbb{1}\{\min_{t\in[0,T]} S_t(\omega) > M\}.$$

Προκειμένου να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο, θα θέλαμε να αναπαραγάγουμε την απόδοσή του, χρησιμοποιώντας ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από τα δυο προϊόντα της αγοράς μας. Εν γένει, δεν είναι δυνατό να κάνουμε μια στατική αντιστάθμιση, να συνθέσουμε δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή $t = 0$ το οποίο να έχει την ίδια απόδοση με το εν λόγω παράγωγο τη στιγμή T. Στο μοντέλο μας όμως έχει νόημα να επιτρέψουμε τις συναλλαγές στους χρόνους $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$. Μπορούμε να ξεκινήσουμε από ένα χαρτοφυλάκιο (ϕ_0, ψ_0), να αλλάξουμε τη θέση μας με ένα αυτοχρηματοδοτούμενο τρόπο τη στιγμή t_1 σε (ϕ_1, ψ_1) ανάλογα με την τιμή της S_{t_1}, τη στιγμή t_2 να αλλάξουμε και πάλι τη θέση μας σε (ϕ_2, ψ_2) ανάλογα με την πληροφορία που έχουμε διαθέσιμη ως τότε (δηλαδή τις τιμές των S_{t_1}, S_{t_2}) κ.λπ. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πώς, τροποποιώντας το χαρτοφυλάκιο που κατέχουμε ανάλογα με την ως τότε εξέλιξη της αγοράς, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δυναμικό αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που αναπαράγει την απόδοση του παραγώγου στην ωρίμανση και άρα να τιμολογήσουμε οποιοδήποτε παράγωγο με ωρίμανση T.

3.3 Αναδρομικός αλγόριθμος τιμολόγησης και αντιστάθμισης

Θα λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη, όταν η τιμή της εξαρτάται μόνο από τις τιμές του πρωτογενούς προϊόντος μέχρι τη στιγμή t_k, δηλαδή

$$X(\omega) = \Phi(S_{t_0}(\omega), S_{t_1}(\omega), \ldots, S_{t_k}(\omega)),$$

για κάποια συνάρτηση Φ. Από τον παραπάνω ορισμό, μια $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή είναι μια σταθερά.

Ορισμός 3 Μια *αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική* θα είναι μια ακολουθία χαρτοφυλακίων $\{(\phi_k, \psi_k)\}_k$ τέτοια ώστε για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N-1$ έχουμε ότι

1. οι ϕ_k, ψ_k είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές και

2. $\phi_k S_{t_{k+1}} + \psi_k B_{t_{k+1}} = \phi_{k+1} S_{t_{k+1}} + \psi_{k+1} B_{t_{k+1}}$.

Η πρώτη από τις δύο παραπάνω συνθήκες σημαίνει ότι η θέση που λαμβάνουμε τη στιγμή t_k στα προϊόντα της αγοράς εξαρτάται μόνο από τη γνώση που έχουμε για την εξέλιξη της αγοράς μέχρι τότε. Η δεύτερη συνθήκη σημαίνει ότι η αλλαγή θέσης που κάνουμε τη στιγμή t_{k+1} είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Το αριστερό μέλος της σχέσης είναι η αξία του χαρτοφυλακίου (ϕ_k, ψ_k) αμέσως πριν την αλλαγή θέσης, ενώ το δεξί της μέλος είναι η αξία του χαρτοφυλακίου (ϕ_{k+1}, ψ_{k+1}) που θέλουμε να συνθέσουμε τη στιγμή t_{k+1}.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με δεδομένη απόδοση τη στιγμή T ίση με

$$V_T = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_N}).$$

Προσέξτε ότι επιτρέπουμε στην απόδοση του παραγώγου να εξαρτάται από όλη την τροχιά της τιμής του πρωτογενούς προϊόντος. Θα κατασκευάσουμε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που αναπαράγει την παραπάνω απόδοση στη ωρίμανση, δηλαδή

$$\phi_{N-1} S_T + \psi_{N-1} B_T = V_T.$$

Για να ισχύει η παραπάνω, τόσο στο ενδεχόμενο $\{\xi_N = u\}$ όσο και στο $\{\xi_N = d\}$, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} \phi_{N-1} S_{t_{N-1}} u + \psi_{N-1} B_{t_N} &= U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} u) \\ \phi_{N-1} S_{t_{N-1}} d + \psi_{N-1} B_{t_N} &= U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} d), \end{cases}$$

από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τις (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) όπως στο διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου. Έτσι, αν ορίσουμε

$$V_N^{\uparrow} = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} u), \qquad V_N^{\downarrow} = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} d),$$

τότε έχουμε

$$\phi_{N-1} = \frac{V_N^{\uparrow} - V_N^{\downarrow}}{S_{t_{N-1}}(u-d)}, \qquad \psi_{N-1} = \frac{V_N^{\downarrow} \times u - V_N^{\uparrow} \times d}{B_{t_N}(u-d)}. \tag{3.5}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει αμέσως ότι οι (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) είναι συναρτήσεις των $S_{t_0}, \ldots, S_{t_{N-1}}$, είναι δηλαδή $\mathcal{F}_{N-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές όπως επιθυμούμε. Πετύχαμε να κατασκευάσουμε, ανάλογα με τη γνώση μας για την εξέλιξη της αγοράς έως τη στιγμή t_{N-1}, ένα χαρτοφυλάκιο (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}), η αξία του οποίου τη στιγμή t_N θα ταυτίζεται με αυτήν του παραγώγου. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αξία του παραγώγου τη στιγμή t_{N-1} ως την αξία του χαρτοφυλακίου (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) που έχει την ίδια αξία με το παράγωγο τη στιγμή t_N. Συγκεκριμένα,

$$V_{t_{N-1}} = U_{t_{N-1}}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}) := \phi_{N-1} S_{t_{N-1}} + \psi_{N-1} B_{t_{N-1}}$$

Αντικαθιστώντας τα (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) από την (3.5) παίρνουμε

$$V_{t_{N-1}} = e^{-rh}(qV_N^{\uparrow} + (1-q)V_N^{\downarrow}),$$

όπου

$$q = \frac{e^{rh} - d}{u - d}.$$

Μπορούμε τώρα να επαναλάβουμε τα παραπάνω βήματα, οπισθοδρομώντας μέχρι τον χρόνο t_0. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

- Ορίζουμε $V_{t_N} = V_T = U_{t_N}(S_0, \dots, S_{t_N})$.
- Για $k = N, N-1, N-2, \dots, 1$, έχοντας ορίσει την $V_{t_k} = U_{t_k}(S_{t_0}, \dots, S_{t_k})$,
  1. βρίσκουμε χαρτοφυλάκιο (ϕ_{k-1}, ψ_{k-1}) ώστε οι ϕ_{k-1}, ψ_{k-1} να είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές και
  $$\phi_{k-1}S_{t_k} + \psi_{k-1}B_{t_k} = V_{t_k}, \tag{3.6}$$
  2. ορίζουμε την αξία του παραγώγου τη στιγμή t_{k-1} ως την αξία του χαρτοφυλακίου (ϕ_{k-1}, ψ_{k-1})
  $$\begin{aligned} V_{t_{k-1}} = U_{t_{k-1}}(S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_{k-1}}) \quad &:= \quad \phi_{k-1}S_{t_{k-1}} + \psi_{k-1}B_{t_{k-1}} && (3.7)\\ &= \quad e^{-rh}\left(qV_k^{\uparrow} + (1-q)V_k^{\downarrow}\right). && (3.8)\end{aligned}$$

Από την κατασκευή του το χαρτοφυλάκιο (ϕ_{j-1}, ψ_{j-1}) έχει τη στιγμή t_j αξία ίση με αυτού του χαρτοφυλακίου (ϕ_j, ψ_j), όπως φαίνεται από τις (3.7) και (3.6). Επομένως η αλλαγή θέσης από (ϕ_{j-1}, ψ_{j-1}) σε (ϕ_j, ψ_j) που χρειάζεται να κάνουμε τη στιγμή t_j είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Κατασκευάζουμε λοιπόν έτσι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που αναπαράγει την απόδοση του παραγώγου στην ωρίμανση. Η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει σε αυτή την περίπτωση την αρχική αξία του παραγώγου. Προκειμένου να μην υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας, θα πρέπει $V_{t_0} = \phi_0 S_{t_0} + \psi_0$.

Πράγματι, αν η τιμή διαπραγμάτευσης του παραγώγου είναι V τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αρχικά αποτελείται από:

- Αρνητική θέση στο παράγωγο,
- ϕ_0 πρωτογενή προϊόντα,
- $V - \phi_0 S_{t_0} = V - V_{t_0} + \psi_0$ προϊόντα χωρίς κίνδυνο.

Το χαρτοφυλάκιο αυτό προφανώς κατασκευάζεται χωρίς κόστος. Αν τις στιγμές $t_1, \dots, t_{N-1}$ κάνουμε τις αυτοχρηματοδοτούμενες αλλαγές θέσεις ώστε τη στιγμή t_k να κατέχουμε το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από:

- Αρνητική θέση στο παράγωγο,
- ϕ_k πρωτογενή προϊόντα,
- $V - V_{t_0} + \psi_k$ προϊόντα χωρίς κίνδυνο,

τότε η αξία της θέσης μας στην ωρίμανση θα είναι:

$$-V_T + \phi_{N-1}S_T + \psi_{N-1}B_T + (V - V_{t_0})B_T = (V - V_{t_0})e^{rT}.$$

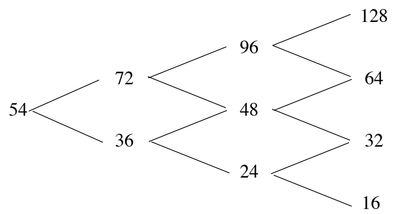
Είναι φανερό λοιπόν ότι, αν $V \neq V_{t_0}$, τότε παίρνοντας θετική ή αρνητική θέση στην προηγούμενη στρατηγική, ανάλογα με το αν $V > V_{t_0}$ ή $V < V_{t_0}$, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μια στρατηγική επιτηδειότητας.

Παρατήρηση 11 Η υποκειμενική πιθανότητα $\mathbb{P}$ που το μοντέλο μας αποδίδει σε κάθε τροχιά ΔΕΝ υπεισέρχεται στον προσδιορισμό της αρχικής αξίας του παραγώγου.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω μέθοδο μέσα από δύο παραδείγματα, ένα στο όποιο η απόδοση του παραγώγου εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή S_T του πρωτογενούς προϊόντος και ένα στο οποίο η απόδοση του παραγώγου εξαρτάται από ολόκληρη την τροχιά $S.$ της τιμής του προϊόντος.

Έστω λοιπόν ότι η σημερινή τιμή μιας μετοχής είναι $S_{t_0} = 54$ και στα επόμενα τρια τρίμηνα ($h = 0,25$ έτη) η τιμή της ακολουθεί το διωνυμικό υπόδειγμα με $u = \frac{4}{3},\ d = \frac{2}{3}$ και $e^{rh} = \frac{16}{15}$.

Η δυναμική της μετοχής μπορεί να παρασταθεί από το ανασυνδυασμένο δυωνυμικό δέντρο



Παράδειγμα 9 Θα τιμολογήσουμε με βάση το παραπάνω υπόδειγμα ένα δικαίωμα πώλησης της μετοχής με τιμή άσκησης $K = 48$ και ωρίμανση σε 9 μήνες.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, αν η απόδοση του παραγώγου εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή του πρωτογενούς προϊόντος, αν δηλαδή έχουμε $V_T = f(S_T)$, τότε το χαρτοφυλάκιο (ϕ_k, ψ_k) που πρέπει να κατέχουμε τη στιγμή t_k εξαρτάται *μόνο από την τρέχουσα τιμή* του πρωτογενούς προϊόντος S_{t_k}. Πράγματι, έχουμε ότι

$$V_N^{\uparrow} = f(S_{t_{N-1}}u), \qquad V_N^{\downarrow} = f(S_{t_{N-1}}d).$$

Επομένως, από την (3.5)

$$\phi_{N-1} = \frac{f(S_{t_{N-1}}u) - f(S_{t_{N-1}}d)}{S_{t_{N-1}}u - S_{t_{N-1}}d}, \qquad \psi_{N-1}B_{t_N} = \frac{f(S_{t_{N-1}}d) \times u - f(S_{t_{N-1}}u) \times d}{u-d}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι ϕ_{N-1}, ψ_{N-1} εξαρτώνται μόνο από την $S_{t_{N-1}}$, άρα και η

$$V_{t_{N-1}} = \phi_{N-1}S_{t_{N-1}} + \psi_{N-1}B_{t_{N-1}}$$

εξαρτάται μόνο από την $S_{t_{N-1}}$. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μέχρι να φτάσουμε στον χρόνο t_k συμπεραίνουμε ότι οι ϕ_k και ψ_k εξαρτώνται μόνο από την S_{t_k}.

Στην αναπαράσταση της δυναμικής της αγοράς ως ένα δέντρο, ο κάθε κόμβος του δέντρου αντιστοιχεί σε μια καθορισμένη αξία για το παράγωγο και ένα καθορισμένο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο, αφού αυτά εξαρτώνται μόνο από την τρέχουσα τιμή του πρωτογενούς προϊόντος (τον κόμβο που βρισκόμαστε) και όχι από όλη την τροχιά του πρωτογενούς προϊόντος μέχρι εκείνη τη στιγμή (πώς καταλήξαμε σε αυτόν τον κόμβο). Αρκεί λοιπόν για $k = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$ να προσδιορίσουμε σε κάθε κόμβο του δέντρου που αντιστοιχεί στη στιγμή t_k το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο και την αξία του παραγώγου στον κόμβο αυτό. Στο παράδειγμά μας έχουμε

$$V_T(\{S_T = 128\}) = V_T(\{S_T = 64\}) = 0,\ V_T(\{S_T = 32\}) = 48-32 = 16,\ V_T(\{S_T = 16\}) = 48-16 = 32.$$

Επομένως, στους κόμβους που αντιστοιχούν στον χρόνο t_2 έχουμε

$$\phi_2(\{S_{t_2} = 24\}) = \frac{16-32}{32-16} = -1, \qquad \psi_2(\{S_{t_2} = 24\})e^{3rh} = \frac{32 \times 4/3 - 16 \times 2/3}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = 48$$

και άρα

$$V_{t_2}(\{S_{t_2}=24\}) = -1\times 24 + 48\times(\frac{15}{16}) = 21.$$

Ομοίως,

$$\phi_2(\{S_{t_2}=48\}) = \frac{0-16}{64-32} = -\frac{1}{2}, \qquad \psi_2(\{S_{t_2}=48\})e^{3rh} = \frac{16\times 4/3 - 0\times 2/3}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = 32$$

και άρα

$$V_{t_2}(\{S_{t_2}=48\}) = -\frac{1}{2}\times 48 + 32\times(\frac{15}{16}) = 6.$$

Αντίστοιχα,

$$\phi_2(\{S_{t_2}=96\}) = \psi_2(\{S_{t_2}=96\}) = V_{t_2}(\{S_{t_2}=96\}) = 0.$$

Έχοντας προσδιορίσει την V_{t_2} σε κάθε ενδεχόμενο προχωρούμε για να υπολογίσουμε την V_{t_1}. Συγκεκριμένα,

$$\phi_1(\{S_{t_1}=36\}) = \frac{6-21}{48-24} = -\frac{5}{8}, \qquad \psi_1(\{S_{t_1}=36\})e^{2rh} = \frac{21\times 4/3 - 6\times 2/3}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = 36,$$

άρα

$$V_{t_1}(\{S_{t_1}=36\}) = -\frac{5}{8}\times 36 + 36\times(\frac{15}{16}) = \frac{45}{4}.$$

Στο ενδεχόμενο $\{S_{t_1}=72\}$ έχουμε αντίστοιχα,

$$\phi_1(\{S_{t_1}=72\}) = \frac{0-6}{96-48} = -\frac{1}{8}, \qquad \psi_1(\{S_{t_1}=72\})e^{2rh} = \frac{6\times 4/3 - 0\times 2/3}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = 12,$$

άρα

$$V_{t_1}(\{S_{t_1}=72\}) = -\frac{1}{8}\times 72 + 12\times(\frac{15}{16}) = \frac{9}{4}.$$

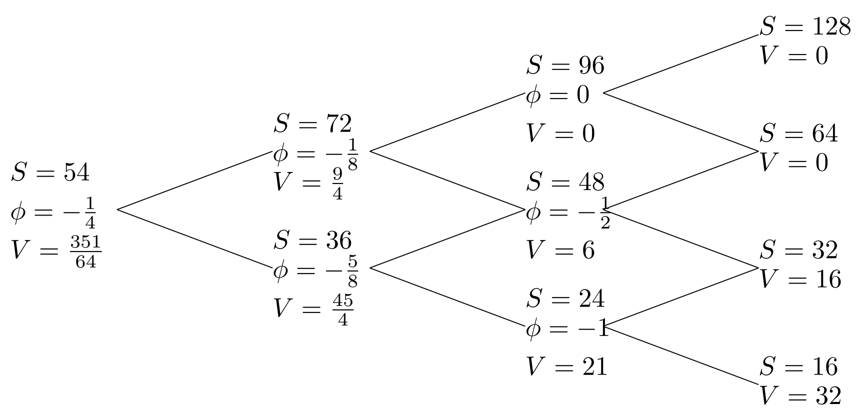
Τέλος, προσδιορίζουμε το χαρτοφυλάκιο (ϕ_0, ψ_0).

$$\phi_0 = \frac{9/4 - 45/4}{72-36} = -\frac{1}{4}, \qquad \psi_0 e^{rh} = \frac{\frac{45}{4}\times 4/3 - \frac{9}{4}\times 2/3}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = \frac{81}{4},$$

συνεπώς

$$V_{t_0} = -\frac{1}{4}\times 54 + \frac{81}{4}\times(\frac{15}{16}) = \frac{351}{64} = 5,484375.$$

Μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσουμε για να αναπαραγάγουμε την απόδοση του παραγώγου με το επόμενο ανασυνδυασμένο διωνυμικό δέντρο.



Για να αντισταθμίσουμε λοιπόν το παράγωγο πρέπει να ξεκινήσουμε με αρνητική θέση σε $1/4$ της μετοχής και $1215/64$ μετρητά, θέση που αξίζει $V_{t_0} = 351/64$. Τη στιγμή t_1 το ποσό που είχαμε επενδύσει χωρίς κίνδυνο θα έχει ανέλθει σε $1215/64 \times 16/15 = 81/4$. Αν τώρα για παράδειγμα η τιμή της μετοχής έχει ανέλθει σε 72, η νέα θέση που πρέπει να πάρουμε στη μετοχή ($\phi_1(\{S_{t_1} = 72\})$) είναι αρνητική σε $1/8$ της μετοχής. Χρειάζεται λοιπόν να αγοράσουμε $1/8$ της μετοχής προς 72, επομένως στον λογαριασμό χωρίς κίνδυνο θα απομείνουν $81/4 - 72 \times 1/8 = 45/4$. Τη στιγμή t_2 τα χρήματα αυτά θα έχουν γίνει $45/4 \times 16/15 = 12$. Αν πάλι για παράδειγμα η τιμή της μετοχής τη στιγμή t_2 έχει πέσει σε 48, η νέα θέση που πρέπει να αποκτήσουμε στη μετοχή ($\phi_2(\{S_{t_2} = 48\})$) είναι $-\frac{1}{2}$. Θα πρέπει λοιπόν να διαθέσουμε $3/8$ της μετοχής προς 48 τα οποία θα μας αποφέρουν 18, επομένως στο λογαριασμό χωρίς κίνδυνο θα έχουμε 12+18=30. Στην ωρίμανση του δικαιώματος το ποσό αυτό θα έχει γίνει $30 \times 16/15 = 32$. Παρατηρήστε ότι, αν στην ωρίμανση η τιμή της μετοχής είναι 64, η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα είναι $-\frac{1}{2} \times 64 + 32 = 0$, ενώ αν η τιμή της μετοχής είναι 32, τότε η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα είναι $-\frac{1}{2} \times 32 + 32 = 16$. Βλέπουμε λοιπόν πώς αναπαράγεται η απόδοση του δικαιώματος πώλησης στο ενδεχόμενο $\{S_{t_1} = 72,\ S_{t_2} = 48\}$. Αξίζει τον κόπο να ελέγξετε μόνοι σας πώς μπορούμε να αναπαραγάγουμε την απόδοση του παραγώγου σε ένα άλλο ενδεχόμενο, π.χ. στο $\{S_{t_1} = 36,\ S_{t_2} = 24\}$.

Παράδειγμα 10 Θα τιμολογήσουμε τώρα βάσει του ιδίου μοντέλου για τη δυναμική της μετοχής ένα παράγωγο η απόδοση του οποίου εξαρτάται από όλη την τροχιά της τιμής της μετοχής. Θα χρησιμοποιήσουμε σκοπίμως μια παραλλαγή του προηγούμενου δικαιώματος, ένα δικαίωμα πώλησης της μετοχής προς 48 με άνω και εκτός φράγμα στην τιμή 60. Το παράγωγο αυτό αποδίδει στην ωρίμανση $(48 - S_T)^+$ με την προϋπόθεση όμως η αξία της μετοχής να μην έχει ξεπεράσει την τιμή 60 πριν την ωρίμανση. Αν κάποια στιγμή πριν την ωρίμανση η αξία της μετοχής υπερβεί την τιμή 60, τότε το δικαίωμα πώλησης αυτομάτως καταργείται και το παράγωγο έχει μηδενική απόδοση.

Είναι σαφές ότι η τελική τιμή της μετοχής δεν αρκεί για να προσδιορίσουμε την απόδοση αυτού του παραγώγου. Για παράδειγμα, στο ενδεχόμενο $\{S_{t_1} = 36,\ S_{t_2} = 48,\ S_{t_3} = 32\}$ η απόδοση του παραγώγου είναι 16 όπως και πριν, όμως στο ενδεχόμενο $\{S_{t_1} = 72,\ S_{t_2} = 48,\ S_{t_3} = 32\}$ η απόδοση του παραγώγου είναι μηδέν, αφού το φράγμα των 60 έχει ξεπεραστεί. Σε αντίθεση λοιπόν με το προηγούμενο παράδειγμα, εδώ η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε στον χρόνο t_2 για την αντιστάθμιση, αν $\{S_{t_1} = 36,\ S_{t_2} = 48\}$, θα είναι διαφορετική από αυτήν που θα ακολουθήσουμε, αν $\{S_{t_1} = 72,\ S_{t_2} = 48\}$.

Στην πράξη, για να τιμολογήσουμε με τον αναδρομικό αλγόριθμο παράγωγα η απόδοση των οποίων εξαρτάται από ολόκληρη την τροχιά της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος, θα πρέπει στο δέντρο που θα κατασκευάσουμε για να παραστήσουμε τη στρατηγική αντιστάθμισης να ΜΗΝ ανασυνδυάζουμε κόμβους που αντιστοιχούν σε διαφορετική απόδοση του παραγώγου. Έτσι σε κάθε χρονική στιγμή t_k θα έχουμε εν γένει 2^k κόμβους - ένα για κάθε δυνατή τροχιά. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι η αξία του παραγώγου είναι καλά ορισμένη σε κάθε κόμβο του δέντρου.

Στο παράδειγμά μας έχουμε για τη στιγμή t_2 τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Στο ενδεχόμενο $K_{u,u} = \{S_{t_1} = 72, S_{t_2} = 96\}$,

  $$V_{t_3}(\{S_{t_1} = 72, S_{t_2} = 96, S_{t_3} = 128\}) = V_{t_3}(\{S_{t_1} = 72, S_{t_2} = 96, S_{t_3} = 64\}) = 0,$$

  άρα

  $$\phi_2(K_{u,u}) = \psi_2(K_{u,u}) = 0$$

  και

  $$V_{t_2}(K_{u,u}) = 0.$$

- Στο ενδεχόμενο $K_{u,d} = \{S_{t_1} = 72, S_{t_2} = 48\}$,

  $$V_{t_3}(\{S_{t_1} = 72, S_{t_2} = 48, S_{t_3} = 64\}) = V_{t_3}(\{S_{t_1} = 72, S_{t_2} = 48, S_{t_3} = 32\}) = 0,$$

άρα

$$\phi_2(K_{u,d}) = \psi_2(K_{u,d}) = 0$$

και

$$V_{t_2}(K_{u,d}) = 0.$$

- Στο ενδεχόμενο $K_{d,u} = \{S_{t_1} = 36, S_{t_2} = 48\}$,

$$V_{t_3}(\{S_{t_1} = 36, S_{t_2} = 48, S_{t_3} = 64\}) = 0,\ V_{t_3}(\{S_{t_1} = 36, S_{t_2} = 48, S_{t_3} = 32\}) = 16,$$

άρα

$$\phi_2(K_{d,u}) = \frac{0-16}{64-32} = -\frac{1}{2}, \qquad \psi_2(K_{d,u})e^{3rh} = \frac{16 \times 4/3 - 0 \times 2/3}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = 32$$

και

$$V_{t_2}(K_{d,u}) = -\frac{1}{2} \times 48 + 32 \times (\frac{15}{16}) = 6.$$

- Στο ενδεχόμενο $K_{d,d} = \{S_{t_1} = 36, S_{t_2} = 24\}$,

$$V_{t_3}(\{S_{t_1} = 36, S_{t_2} = 24, S_{t_3} = 32\}) = 16,\ V_{t_3}(\{S_{t_1} = 36, S_{t_2} = 24, S_{t_3} = 16\}) = 32,$$

άρα

$$\phi_2(K_{d,d}) = \frac{16-32}{32-16} = -1, \qquad \psi_2(K_{d,d})e^{3rh} = \frac{32 \times 4/3 - 16 \times 2/3}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = 48$$

και

$$V_{t_2}(K_{d,d}) = -1 \times 24 + 48 \times (\frac{15}{16}) = 21.$$

Συνεχίζοντας, για τη στιγμή t_1 έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Στο ενδεχόμενο $K_u = \{S_{t_1} = 72\}$,

$$V_{t_2}(\{S_{t_1} = 72, S_{t_2} = 96\}) = V_{t_2}(\{S_{t_1} = 72, S_{t_2} = 48\}) = 0,$$

άρα

$$\phi_1(K_u) = \psi_1(K_u) = 0$$

και

$$V_{t_1}(K_u) = 0.$$

- Στο ενδεχόμενο $K_d = \{S_{t_1} = 36\}$,

$$V_{t_2}(\{S_{t_1} = 36, S_{t_2} = 48\}) = 6,\ V_{t_2}(\{S_{t_1} = 36, S_{t_2} = 24\}) = 21,$$

άρα

$$\phi_1(K_d) = \frac{6-21}{48-24} = -\frac{5}{8}, \qquad \psi_1(K_d)e^{2rh} = \frac{21 \times 4/3 - 6 \times 2/3}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = 36$$

και

$$V_{t_1}(K_d) = -\frac{5}{8} \times 36 + 36 \times (\frac{15}{16}) = \frac{45}{4}.$$

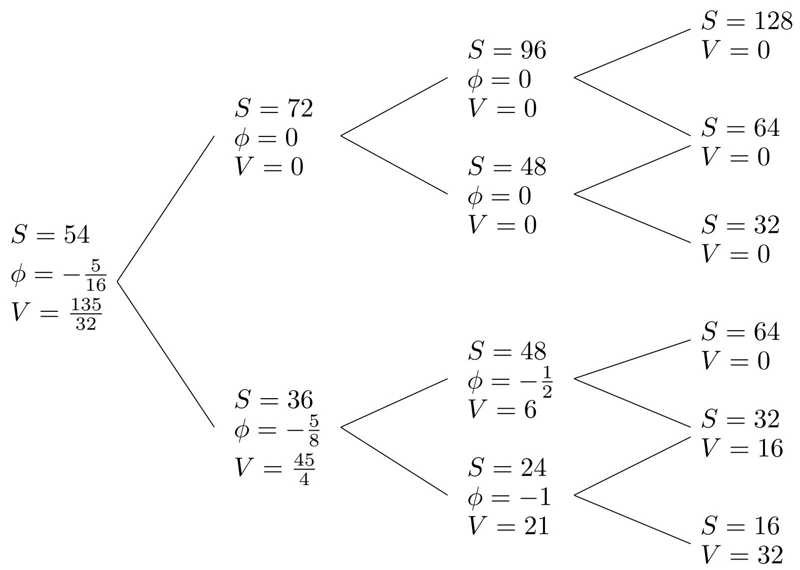
Υπολογίζουμε τέλος τα ϕ_0, ψ_0, V_{t_0} :

$$\phi_0 = \frac{0 - 45/4}{72-36} = -\frac{5}{16}, \qquad \psi_0 e^{rh} = \frac{\frac{45}{4} \times 4/3 - 0 \times 2/3}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{45}{2},$$

συνεπώς

$$V_{t_0} = -\frac{5}{16} \times 54 + \frac{45}{2} \times (\frac{15}{16}) = \frac{135}{32} = 4,21875.$$

Μπορούμε και πάλι να παραστήσουμε με ένα διωνυμικό δέντρο τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει κανείς για να αναπαραγάγει την απόδοση του παραγώγου ως εξής:



3.4 Ασκήσεις

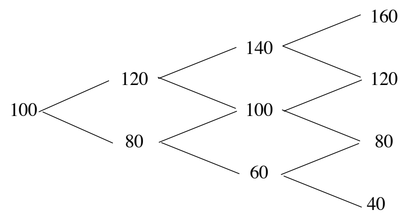
Άσκηση 25 Έχετε μόλις πουλήσει το προηγούμενο παράγωγο προς 4,21875. Περιγράψτε ακριβώς τις συναλλαγές που θα κάνατε ώστε να αντισταθμίσετε τον κίνδυνο από τυχούσα πτώση της τιμής της μετοχής στο ενδεχόμενο που αυτή ακολουθεί την τροχιά 54,36,24,16. Επαναλάβετε για το ενδεχόμενο που η τιμή της μετοχής ακολουθεί την τροχιά 54,72,48,32. Οι συναλλαγές που θα κάνετε θα πρέπει φυσικά να βασίζονται μόνο στην πληροφορία για την τιμή της μετοχής που είναι διαθέσιμη ως τη στιγμή που πραγματοποιούνται.

Άσκηση 26 Για τη δυναμική μας μετοχής με S_0 =€86,40 θεωρήστε ένα διωνυμικό υπόδειγμα τριών περιόδων με $e^{rh} = 4/3,\ u = 5/3,\ d = 2/3$. Βάσει αυτού του υποδείγματος τιμολογήστε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με ωρίμανση σε τρεις περιόδους και τιμή άσκησης €86,40.

Άσκηση 27 Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης €90 πρόκειται να ωριμάσει σε ένα χρόνο. Η τρέχουσα τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_0 =€100 και το άνευ κινδύνου ετήσιο επιτόκιο είναι 8,6% υπολογισμένο με συνεχή απόδοση. Διαιρέστε τον χρόνο σε τέσσερα τρίμηνα και χρησιμοποιήστε ένα ανασυνδυασμένο διωνυμικό δέντρο με $u = 1,173$ και $d = 0,884$.
α) Προσδιορίστε την τιμή αυτού του δικαιώματος εργαζόμενοι αναδρομικά στο διωνυμικό δέντρο.
β) Περιγράψτε το χαρτοφυλάκιο που πρέπει να έχουμε προκειμένου να αναπαραγάγουμε την απόδοση του παραγώγου στις εξής δύο περιπτώσεις:
- Το πρωτογενές προϊόν ακολουθεί την τροχιά $S_0, S_0u, S_0u^2, S_0u^2d$.
- Το πρωτογενές προϊόν ακολουθεί την τροχιά $S_0, S_0d, S_0ud, S_0u^2d$.

Άσκηση 28 Η τιμή μιας μετοχής είναι σήμερα €50. Σε καθένα από τα επόμενα δύο τρίμηνα αναμένεται να παρουσιάσει είτε 10% αύξηση είτε 10% μείωση. Το ετήσιο άνευ κινδύνου επιτόκιο είναι 12% υπολογισμένο με συνεχή απόδοση.
α. Ποια είναι η σημερινή αξία που επιβάλλει η αρχή της μη επιτηδειότητας για ένα εξάμηνο ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης €52,50;
β. Κατασκευάστε μια στρατηγική επιτηδειότητας, αν η τρέχουσα τιμή διαπραγμάτευσης αυτού του δικαιώματος είναι €2,2.

Άσκηση 29 Δίνεται το ακόλουθο δυωνυμικό υπόδειγμα για τη δυναμική μιας μετοχής.



Η κάθε περίοδος στο παραπάνω δέντρο αντιστοιχεί σε διάστημα τεσσάρων μηνών. Στην αγορά υπάρχει επίσης ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο 14,637% υπολογισμένο με συνεχή ανατοκισμό.
α) Τιμολογήστε βάσει του παραπάνω υποδείγματος ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής με ωρίμανση σε ένα έτος και τιμή άσκησης €100.
β) Τιμολογήστε βάσει του παραπάνω υποδείγματος ένα δικάιωμα πώλησης της μετοχής με ωρίμανση σε ένα έτος και τιμή άσκησης €100. Επιβεβαιώστε τη σχέση ισοτιμίας των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.

Άσκηση 30 α) Τιμολογήστε βάσει του υποδείγματος αγοράς της προηγούμενης άσκησης ένα παράγωγο με ωρίμανση $T = 1$ έτος και απόδοση

$$V_T(\omega) = \max_{i \in \{0,1,2,3\}} S_{t_i}(\omega) - S_T(\omega).$$

β) Περιγράψτε ακριβώς τις συναλλαγές που θα έπρεπε να κάνετε τις στιγμές $t = t_0, t_1, t_2$ ώστε να αντισταθμίσετε το παράγωγο αυτό στα παρακάτω δύο ενδεχόμενα:

- $\omega_1 = \{S_0 = 100,\ S_{t_1} = 120,\ S_{t_2} = 100,\ S_T = 80\}$
- $\omega_2 = \{S_0 = 100,\ S_{t_1} = 80,\ S_{t_2} = 100,\ S_T = 80\}$.

Σημείωση: το παράγωγο αυτό ουσιαστικά επιτρέπει στον κάτοχό του να πουλήσει το πρωτογενές προϊόν στη μέγιστη τιμή που σημείωσε μέχρι την ωρίμανση και είναι γνωστό σαν European lookback put option.

Άσκηση 31 Θεωρούμε ένα ιδιαίτερο δικαίωμα πώλησης επί μιας μετοχής με ωρίμανση σε ένα έτος που περιγράφεται ως εξής. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €40 και η τρέχουσα τιμή άσκησης είναι €40. Αν η τιμή της μετοχής έπειτα από 6 μήνες είναι μικρότερη από €35, τότε η τιμή άσκησης στην ωρίμανση επανακαθορίζεται σε €35, διαφορετικά παραμένει στα €40.
α. Είναι η τιμή αυτού του δικαιώματος μικρότερη ή μεγαλύτερη από αυτήν ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με την ίδια ωρίμανση και τιμή άσκησης €40; Απαντήστε χωρίς να υποθέσετε κάποιο υπόδειγμα για τη δυναμική της μετοχής.
β. Τιμολογήστε το παράγωγο χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων με $u = 1,2737$ και $d = 0,7764$.
γ. Τιμολογήστε το παράγωγο χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό δέντρο τεσσάρων περιόδων με $u = 1,1879$ και $d = 0,8371$.
Δίνεται το επιτόκιο του προϊόντος χωρίς κίνδυνο $r = 6\%$ με συνεχή ανατοκισμό.

Κεφάλαιο 4

Μέτρα martingale

4.1 Εισαγωγή

Είδαμε στο Κεφάλαιο 2 ότι σε αγορές μιας περιόδου, αν ένα παράγωγο μπορεί να αναπαραχθεί, τότε μπορούμε να το τιμολογήσουμε σύμφωνα με την αρχή της μη επιτηδειότητας και ότι η σημερινή του αξία είναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη τιμή της απόδοσής του στην ωρίμανση ως προς ένα αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας. Αφού ορίσουμε τις έννοιες της δεσμευμένης μέσης τιμής και του martingale, θα δούμε τα μέτρα martingale για υποδείγματα αγοράς πολλών περιόδων. Θα γενικεύσουμε συμπεράσματα του Δεύτερου Κεφαλαίου στο διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων και θα αποδείξουμε έναν κλειστό τύπο για τη σημερινή αξία ενός παραγώγου. Παρόμοιο υλικό μπορείτε να βρείτε στις [8] και [7].

4.2 Δεσμευμένη μέση τιμή

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας, που παίρνουν τιμές στα πεπερασμένα σύνολα $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$αντίστοιχα. Ας συμβολίζουμε με p_{XY} την από κοινού σ.μ.π. των X και Y, δηλαδή

$$p_{XY}(x, y) = \mathbb{P}\big[X = x, Y = y\big], \qquad x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y}.$$

Οι περιθώριες σ.μ.π. των X, Y μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από την από κοινού σ.μ.π. ως εξής:

$$p_X(x) = \mathbb{P}\big[X = x\big] = \sum_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{P}\big[X = x, Y = y\big], \qquad x \in \mathbb{X}$$

και

$$p_Y(y) = \mathbb{P}\big[Y = y\big] = \sum_{x \in \mathbb{X}} \mathbb{P}\big[X = x, Y = y\big], \qquad y \in \mathbb{X}.$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη ότι $p_Y(y) > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{Y}$, αφού, αν $p_Y(y_0) = 0$, μπορούμε να αφαιρέσουμε το y_0 από το Y. Η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X = x\}$ δεδομένου του ενδεχομένου $\{Y = y\}$ είναι

$$\mathbb{P}\big[X = x \,|\, Y = y\big] = \frac{\mathbb{P}\big[X = x, Y = y\big]}{\mathbb{P}\big[Y = y\big]}.$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X = x\}$ ως προς την τυχαία μεταβλητή Y είναι μια τυχαία μεταβλητή, η οποία είναι συνάρτηση της Y και η τιμή της, όταν $Y = y$, είναι $\mathbb{P}\big[X = x \big| Y = y\big]$. Έχει σημασία να έχουμε κατά νου ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ως προς μια τυχαία μεταβλητή είναι εν γένει μια τυχαία μεταβλητή και όχι ένας αριθμός. Η τιμή της αλλάζει ανάμεσα στα σημεία του δειγματικού χώρου Ω. Αν όμως θεωρήσουμε τη διαμέριση του Ω,

$$\Omega = \bigcup_{y \in \mathbb{Y}} \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y\} = \bigcup_{y \in \mathbb{Y}} \{Y = y\},$$

τότε σε καθένα από τα ενδεχόμενα $\{Y = y\}$, η τιμή της $\mathbb{P}\big[X = x\,|\,Y\big]$ παραμένει σταθερή και ίση προς $\mathbb{P}\big[X = x\big|\,Y = y\big]$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\mathbb{P}\big[X = x\,|\,Y\big] = p(x|Y), \qquad \text{όπου}\;\; p(x|y) = \mathbb{P}\big[X = x\big|\,Y = y\big] = \frac{\mathbb{P}\big[X = x, Y = y\big]}{\mathbb{P}\big[Y = y\big]},\; y \in \mathbb{Y}.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $y \in \mathbb{Y}$, η $p(\cdot\,|y)$ είναι μια σ.μ.π. στο $\mathbb{X}$. Επομένως, μπορούμε να φανταζόμαστε την $\mathbb{P}\big[X = \cdot\,|\,Y\big]$, ως μια τυχαία σ.μ.π.

Ορισμός 4 Έστω X μια πραγματική τυχαία μεταβλητή με τιμές σ' έναν πεπερασμένο χώρο καταστάσεων $\mathbb{X}$. Ορίζουμε τη *δεσμευμένη μέση τιμή* (conditional expectation) της X ως προς τη διακριτή τυχαία μεταβλητή Y, ως την αναμενόμενη τιμή της X που υπολογίζεται με βάση την τυχαία σ.μ.π. $\mathbb{P}\big[X = \cdot\,|\,Y\big]$, δηλαδή

$$\mathbb{E}\big[X\big|\,Y\big] = \sum_{x \in \mathbb{X}} x\; \mathbb{P}\big[X = x\,|\,Y\big]. \tag{4.1}$$

Παρατηρήστε ότι η $\mathbb{E}\big[X\big|\,Y\big]$, ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbb{P}\big[X = x\,|\,Y\big]$, είναι κι αυτή μια πραγματική τυχαία μεταβλητή, η οποία είναι συνάρτηση της Y. Αυτή η συνάρτηση, $g(Y) = \mathbb{E}\big[X\big|\,Y\big]$, έχει τη σταθερή τιμή $g(y) = \sum_{x\in\mathbb{X}} x\; \mathbb{P}\big[X = x\,|\,Y = y\big]$ σε καθένα από τα ενδεχόμενα $\{Y = y\}$.

Παράδειγμα 11 Ρίχνετε ένα ζάρι και στη συνέχεια στρίβετε τόσα κέρματα όσα η ένδειξη του ζαριού $Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Αν $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι το πλήθος των κεφαλών που θα φέρετε, τότε, δεδομένου ότι $Y = y$, η δεσμευμένη κατανομή της X είναι διωνυμική $\mathrm{bin}(y, \frac{1}{2})$, δηλαδή

$$\mathbb{P}\big[X = x\,\big|\,Y = y\big] = \binom{y}{x}\frac{1}{2^y}.$$

Η δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς την Y είναι μια τυχαία μεταβλητή που στο ενδεχόμενο $\{Y = y\}$ έχει την τιμή

$$\sum_{x=0}^{y} x\binom{y}{x}\frac{1}{2^y} = \frac{y}{2}.$$

Επομένως, $\mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big] = \frac{Y}{2}$.

Παράδειγμα 12 Στο Παράδειγμα 9, θέλουμε να υπολογίσουμε την $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{t_3}|S_{t_1}]$. Παρατηρήστε ότι ο χώρος πιθανότητας, ο οποίος αποτελείται από τις πιθανές τροχιές της μετοχής, διαμερίζεται ανάλογα με την τιμή της S_{t_1} σε δύο ενδεχόμενα, τα $\{S_{t_1} = 36\}$ και $\{S_{t_1} = 72\}$. Το καθένα από αυτά περιλαμβάνει τέσσερις τροχιές. Η $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{t_3}|S_{t_1}]$ έχει επομένως δύο δυνατές τιμές, μια για τις τέσσερις τροχιές στο ενδεχόμενο $\{S_{t_1} = 36\}$ και μια για τις τέσσερις τροχιές στο ενδεχόμενο $\{S_{t_1} = 72\}$. Συγκεκριμένα,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{t_3}|S_{t_1}] = \begin{cases} p^2 128 + 2p(1-p)64 + (1-p)^2 32, & \text{όταν } S_{t_1} = 72 \\ p^2 64 + 2p(1-p)32 + (1-p)^2 16, & \text{όταν } S_{t_1} = 36. \end{cases}$$

Έστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{t_2}|S_{t_3}]$. Ο χώρος πιθανότητας διαμερίζεται τώρα σε τέσσερα ενδεχόμενα, ανάλογα με την τιμή της S_{t_3}. Σε καθένα από αυτά η $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{t_2}|S_{t_3}]$ είναι σταθερή. Δεν είναι δύσκολο τώρα να δείτε ότι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_{t_2}|S_{t_3}] = \begin{cases} 96, & \text{όταν } S_{t_3} = 128 \\ 64, & \text{όταν } S_{t_3} = 64 \\ 40, & \text{όταν } S_{t_3} = 32 \\ 24, & \text{όταν } S_{t_3} = 16. \end{cases}$$

Θεώρημα 7 Έστω ότι οι X, Y είναι πραγματικές τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες σ' έναν δειγματικό χώρο Ω, με τιμές στα πεπερασμένα σύνολα $\mathbb{X}$ και $\mathbb{Y}$, αντίστοιχα. Η $g(Y) = \mathbb{E}\big[X \,\big|\, Y\big]$ της σχέσης (4.1) είναι η μοναδική συνάρτηση της Y για την οποία

$$\mathbb{E}\big[Xh(Y)\big] = \mathbb{E}\big[g(Y)h(Y)\big], \quad \text{για κάθε συνάρτηση } h : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι η $g(Y) = \mathbb{E}\big[X \,\big|\, Y\big]$ της (4.1) έχει την ιδιότητα (4.2). Πράγματι, από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[Xh(Y)\big] &= \sum_{x \in \mathbb{X}} \sum_{y \in \mathbb{Y}} x h(y)\, \mathbb{P}\big[X = x, Y = y\big] \\
&= \sum_{x \in \mathbb{X}} \sum_{y \in \mathbb{Y}} x h(y)\, \mathbb{P}\big[X = x \,\big|\, Y = y\big]\ \mathbb{P}\big[Y = y\big] \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Y}} h(y) \left(\sum_{x \in \mathbb{X}} x\, \mathbb{P}\big[X = x \,\big|\, Y = y\big] \right) \mathbb{P}\big[Y = y\big] \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Y}} h(y) g(y)\, \mathbb{P}\big[Y = y\big] = \mathbb{E}\big[g(Y)h(Y)\big].
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η g είναι η μοναδική συνάρτηση της Y που έχει την ιδιότητα (4.2). Έστω $\phi(Y)$ μια συνάρτηση της Y για την οποία

$$\mathbb{E}\big[Xh(Y)\big] = \mathbb{E}\big[\phi(Y)h(Y)\big],$$

για οποιαδήποτε συνάρτηση $h : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$. Επιλέγοντας

$$h_y(Y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } Y = y \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

παίρνουμε

$$\sum_{x \in \mathbb{X}} x \mathbb{P}\big[X = x, Y = y\big] = \phi(y) \mathbb{P}\big[Y = y\big].$$

Επομένως, για κάθε $y \in \mathbb{Y}$ έχουμε

$$\phi(y) = \sum_{x \in \mathbb{X}} x \frac{\mathbb{P}\big[X = x, Y = y\big]}{\mathbb{P}\big[Y = y\big]} = g(y). \qquad \square$$

Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει έναν εναλλακτικό ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής που έχει δύο πλεονεκτήματα. Αφενός, δεν κάνει αναφορά στο είδος των τυχαίων μεταβλητών X, Y, ενώ ο αρχικός ορισμός υποθέτει ότι οι X, Y έχουν διακριτή κατανομή. Πράγματι, ο πιο γενικός ορισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής X, με οποιαδήποτε κατανομή για την οποία $\mathbb{E}\big[|X|\big] < \infty$, βασίζεται στο προηγούμενο Θεώρημα. Αφετέρου, αυτός ο εναλλακτικός ορισμός απλοποιεί συχνά τις αποδείξεις ισχυρισμών που αφορούν τη δεσμευμένη μέση τιμή, όπως θα δούμε και στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 8 Θεωρούμε Y, Z διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Η δεσμευμένη μέση τιμή έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

1. $\mathbb{E}\big[c_1 X_1 + c_2 X_2 \,\big|\, Y\big] = c_1 \mathbb{E}\big[X_1 \,\big|\, Y\big] + c_2 \mathbb{E}\big[X_2 \,\big|\, Y\big]$, για κάθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. $\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[X|Y\big]\Big] = \mathbb{E}\big[X\big]$.

3. Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε η $\mathbb{E}\big[X|Y\big]$ είναι σταθερή και έχει την τιμή $\mathbb{E}\big[X\big]$.
   Ειδικότερα, $\mathbb{E}\big[1\big|\, Y\big] = 1$, ενώ, αν η Y είναι σταθερή, τότε $\mathbb{E}\big[X|Y\big] = \mathbb{E}\big[X\big]$.

4. Για κάθε $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ έχουμε $\mathbb{E}\big[Xf(Y)\,\big|\,Y\big] = f(Y)\mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big]$.

5. $\big|\mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big]\big| \le \mathbb{E}\big[|X|\,\big|\,Y\big]$.

6. $\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y, Z\big]\,\Big|\,Y\Big] = \mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big]$.

7. Αν $X_1 \le X_2$, τότε $\mathbb{E}\big[X_1\,\big|\,Y\big] \le \mathbb{E}\big[X_2\,\big|\,Y\big]$.

Απόδειξη: Για την (1), αν $g_1(Y) = \mathbb{E}\big[X_1\,\big|\,Y\big]$ και $g_2(Y) = \mathbb{E}\big[X_2\,\big|\,Y\big]$, από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(c_1X_1 + c_2X_2)h(Y)\big] &= c_1\mathbb{E}\big[X_1h(Y)\big] + c_2\mathbb{E}\big[X_2h(Y)\big]\\ &= c_1\mathbb{E}\big[g_1(Y)h(Y)\big] + c_2\mathbb{E}\big[g_2(Y)h(Y)\big] = \mathbb{E}\big[(c_1g_1(Y) + c_2g_2(Y))h(Y)\big].\end{aligned}$$

Επομένως, από το Θεώρημα 7,

$$\mathbb{E}\big[c_1X_1 + c_2X_2\,\big|\,Y\big] = c_1g_1(Y) + c_2g_2(Y) = c_1\mathbb{E}\big[X_1\,\big|\,Y\big] + c_2\mathbb{E}\big[X_2\,\big|\,Y\big].$$

Για την (2), αρκεί να επιλέξουμε $h(Y) = 1$ στο Θεώρημα 7.
Για την (3), έχουμε

$$\mathbb{E}\big[Xh(Y)\big] = \mathbb{E}\big[X\big]\ \mathbb{E}\big[h(Y)\big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[X\big]\,h(Y)\Big].$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω της ανεξαρτησίας των X, Y και η δεύτερη γιατί η $\mathbb{E}\big[X\big]$ είναι μια σταθερά. Από το Θεώρημα 7 έχουμε λοιπόν ότι $\mathbb{E}\big[X|Y\big] = \mathbb{E}\big[X\big]$. Υπενθυμίζουμε ότι, όταν η Y είναι σταθερή, τότε είναι ανεξάρτητη από κάθε άλλη τυχαία μεταβλητή, επομένως $\mathbb{E}\big[X\big|Y\big] = \mathbb{E}\big[X\big]$ για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X. Για τον ίδιο λόγο, έχουμε ότι $\mathbb{E}\big[c\big|\,Y\big] = c$ για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή Y και $c \in \mathbb{R}$.
Για την (4), εφόσον η $f \times h$ είναι κι αυτή μια συνάρτηση από το $\mathbb{Y}$ στο $\mathbb{R}$, το Θεώρημα 7 δίνει ότι

$$\mathbb{E}\big[Xf(Y)\ h(Y)\big] = \mathbb{E}\big[Xf \times h(Y)\big] = \mathbb{E}\big[g(Y)f \times h(Y)\big] = \mathbb{E}\big[g \times f(Y)h(Y)\big],$$

όπου $g(Y) = \mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big]$. Επομένως, $\mathbb{E}\big[Xf(Y)\,\big|\,Y\big] = f(Y)\mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big]$.
Για την (5), παρατηρήστε ότι, αν ορίσουμε το θετικό και το αρνητικό μέρος της X ως $X^+ = \max\{X, 0\} \ge 0$ και $X^- = \max\{-X, 0\} \ge 0$, αντίστοιχα, τότε $X = X^+ - X^-$ και $|X| = X^+ + X^-$. Επομένως, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\Big|\mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big]\Big| = \Big|\mathbb{E}\big[X^+\,\big|\,Y\big] - \mathbb{E}\big[X^-\,\big|\,Y\big]\Big| \le \mathbb{E}\big[X^+\,\big|\,Y\big] + \mathbb{E}\big[X^-\,\big|\,Y\big] = \mathbb{E}\big[|X|\,\big|\,Y\big].$$

Για την (6), αν ορίσουμε $G(Y, Z) = \mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y, Z\big]$ και εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7, αρχικά για την $G(Y, Z)$ και στη συνέχεια για τη X, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\big[G(Y, Z)h(Y)\big] = \mathbb{E}\big[Xh(Y)\big] = \mathbb{E}\big[g(Y)h(Y)\big].$$

Επομένως, $\mathbb{E}\big[G(Y, Z)\,\big|\,Y\big] = g(Y) = \mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big]$.
Τέλος για την (7), από την γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής (ιδιότητα 1) αρκεί να δείξουμε ότι

$$X \ge 0 \Rightarrow \mathbb{E}\big[X\,\big|\,Y\big] \ge 0.$$

Αυτό όμως είναι προφανές από τον ορισμό. □

Παράδειγμα 13 Πενήντα φοιτητές από το ΕΜΠ, εβδομήντα φοιτητές από το ΕΚΠΑ και 30 φοιτητές από το ΟΠΑ παίρνουν μέρος σ΄ ένα διαγώνισμα. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους φοιτητές, μπορούμε να θεωρήσουμε σαν δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης το σύνολο των φοιτητών και τότε το πανεπιστήμιο προέλευσής τους Y είναι μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη σ΄ αυτόν τον χώρο, ενώ ο βαθμός τους στο διαγώνισμα X είναι μια άλλη τυχαία μεταβλητή. Η $\mathbb{E}\big[X|Y\big]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που δίνει σ΄ όλους τους φοιτητές του Πανεπιστημίου Y τον μέσο όρο $M(Y)$ των φοιτητών του Y. Τότε η ιδιότητα 2 του Θεωρήματος 8 σημαίνει ότι ο μέσος όρος M των βαθμών όλων των φοιτητών δίνεται από την

$$M = \frac{50}{150}M(EM\Pi) + \frac{70}{150}M(EK\Pi A) + \frac{30}{150}M(O\Pi A),$$

δηλαδή ο μέσος όρος των βαθμών όλων των φοιτητών μπορεί να υπολογιστεί ως ένας ζυγισμένος μέσος των μέσων βαθμών κατά πανεπιστήμιο, με βάρη τις πιθανότητες ο τυχαία επιλεγμένος φοιτητής να προέρχεται από κάθε πανεπιστήμιο.

Παράδειγμα 14 Έστω Ω ένας πεπερασμένος δειγματικός χώρος, όπως π.χ. αυτός του διωνυμικού υποδείγματος πολλών περιόδων. Θέλουμε να προσεγγίσουμε μια τυχαία μεταβλητή X από μια συνάρτηση μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής Y, ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης

$$\mathbb{E}\big[(X - f(Y))^2\big].$$

Αν $g(Y) = \mathbb{E}\big[X \,\big|\, Y\big]$ και f οποιαδήποτε συνάρτηση από το $\mathbb{Y}$ στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X - f(Y))^2\big] &= \mathbb{E}\big[(X - g(Y) + g(Y) - f(Y))^2\big] \\ &= \mathbb{E}\big[(X - g(Y))^2\big] + \mathbb{E}\big[\big(g(Y) - f(Y)\big)^2\big] + 2\mathbb{E}\big[\big(X - g(Y)\big)\big(g(Y) - f(Y)\big)\big].\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 7 έχουμε όμως ότι

$$\mathbb{E}\big[X\big(g(Y) - f(Y)\big)\big] = \mathbb{E}\big[g(Y)\big(g(Y) - f(Y)\big)\big].$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(X - f(Y))^2\big] &= \mathbb{E}[(X - g(Y))^2] + \mathbb{E}[(g(Y) - f(Y))^2] \\ &\geq \mathbb{E}[(X - g(Y))^2],\end{aligned}$$

για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(Y)$. Επομένως, η $g(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$ είναι η συνάρτηση του Y που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης.

4.3 Martingales

Είπαμε στο Κεφάλαιο 3 ότι μια τυχαία μεταβλητή που εξαρτάται μόνο από τις τιμές των $S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_k}$ θα χαρακτηρίζεται ως $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη. Ένας συνηθισμένος τρόπος για να κατασκευάσει κανείς μια $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή είναι να δεσμεύσει μια τυχαία μεταβλητή ως προς τις $S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_k}$. Έστω λοιπόν μ ένα μέτρο πιθανότητας στον Ω, τον χώρο όλων των δυνατών μονοπατιών της στοχαστικής διαδικασίας $\{S_{t_k}\}_{0 \leq k \leq N}$. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$\mathbb{E}^{\mu}[\,\cdot\,|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}^{\mu}[\,\cdot\,|S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_k}]$$

παρατηρούμε ότι, αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή, τότε η $\mathbb{E}^{\mu}[X|\mathcal{F}_k]$ είναι μια $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 5 Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N}$ στον χώρο Ω θα ονομάζεται $(\mu, \mathcal{F}_k)$-martingale, αν για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N-1$ έχουμε $\mathbb{E}^{\mu}[X_{t_{k+1}}\,|\mathcal{F}_k] = X_{t_k}$.

Από τον ορισμό προκύπτει αμέσως ότι, αν η $\{X_{t_k}\}$ είναι $(\mu, \mathcal{F}_k)$-martingale, τότε η X_{t_k} είναι μια $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Είναι επίσης εύκολο να δούμε με επάλληλες εφαρμογές της ιδιότητας (4) ότι

$$\mathbb{E}^{\mu}[X_{t_j}|\mathcal{F}_k] = X_{t_k}, \text{ για κάθε } j \geq k. \tag{4.3}$$

Θεώρημα 9 Αν η διαδικασία $\{X_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N}$ είναι $(\mu, \mathcal{F}_k)$-martingale, τότε για κάθε $k, j \in \{0, 1, \ldots, N\}$

$$\mathbb{E}^\mu[X_{t_k}] = \mathbb{E}^\mu[X_{t_j}].$$

Δηλαδή, η αναμενόμενη τιμή των όρων μιας martingale είναι σταθερή.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη ας υποθέσουμε ότι $j \geq k$. Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή ως προς το μ στα δύο μέλη της (4.3) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (1) των δεσμευμένων μέσων τιμών που δείξαμε νωρίτερα, έχουμε:

$$\mathbb{E}^\mu[X_{t_k}] = \mathbb{E}^\mu[\ \mathbb{E}^\mu[X_{t_j}|\mathcal{F}_k]\ ] = \mathbb{E}^\mu[X_{t_j}]. \qquad \square$$

Τα επόμενα δύο Θεωρήματα μας δίνουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε martingale οι οποίες όπως θα δούμε είναι πολύ χρήσιμες στην τιμολόγηση παραγώγων.

Θεώρημα 10 Έστω X μια τυχαία μεταβλητή, ορισμένη στον Ω. Η διαδικασία $\{V_{t_k}\}_{0\leq k\leq N}$ με

$$V_{t_k} = \mathbb{E}^\mu[X\,|\mathcal{F}_k]$$

είναι martingale. Επιπλέον, $V_T = X$ και $V_0 = \mathbb{E}^\mu[X]$.

Απόδειξη: Από την ιδιότητα 6 του Θεωρήματος 8 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}^\mu[V_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}^\mu[\mathbb{E}^\mu[X|\mathcal{F}_{k+1}]\,|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}^\mu[X\,|\mathcal{F}_k] = V_{t_k}.$$

Από την ιδιότητα 3 του ίδιου Θεωρήματος έχουμε ότι $V_0 = \mathbb{E}\big[X\big]$. Εφόσον κάθε τυχαία μεταβλητή στον Ω είναι μια συνάρτηση των $S_0, S_{t_1}, \ldots, S_T$, η ιδιότητα 4 του ίδιου Θεωρήματος δίνει ότι $V_T = X$. $\square$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι $\{X_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N}$ και $\{Y_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N-1}$ είναι στοχαστικές διαδικασίες τέτοιες ώστε οι X_{t_k}, Y_{t_k} να είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες για κάθε $k \in \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$. Σχηματίζουμε μια καινούργια διαδικασία $\{(Y \cdot X)_{t_k}\}_{k=0,1,\ldots,N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$(Y \cdot X)_{t_0} = 0 \ \text{ και } \ (Y \cdot X)_{t_k} := \sum_{j=0}^{k-1} Y_{t_j}(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}),\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

Η στοχαστική διαδικασία $(Y \cdot X)$ ονομάζεται *μετασχηματισμός martingale (martingale transform)* της Y ως προς την X. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η $(Y \cdot X)_{t_k}$ είναι επίσης $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη.

Θεώρημα 11 Αν η διαδικασία X είναι martingale, τότε και η $(Y \cdot X)$ είναι martingale.

Απόδειξη: Έχουμε

$$(Y \cdot X)_{t_{k+1}} - (Y \cdot X)_{t_k} = Y_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}).$$

Από την ιδιότητα 4 του Θεωρήματος 8 παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}^\mu[(Y \cdot X)_{t_{k+1}} - (Y \cdot X)_{t_k} \mid \mathcal{F}_k] = Y_{t_k}(\mathbb{E}^\mu[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} \mid \mathcal{F}_k]) = Y_{t_k}(\mathbb{E}^\mu[X_{t_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k] - X_{t_k}) = 0.$$

Επομένως, η $(Y \cdot X)$ είναι επίσης martingale. $\square$

4.4 Μέτρα martingale

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πώς τα αδιάφορα κινδύνου μέτρα πιθανότητας που μελετήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο γενικεύονται στα διωνυμικά υποδείγματα πολλών περιόδων και μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην τιμολόγηση παραγώγων.

Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο $(\phi_k, \psi_k)_{k=0,1,\ldots,N}$ με αξία στους χρόνους $t_k,\ k = 0, 1, \ldots, N$

$$V_{t_k} = \phi_k S_{t_k} + \psi_k B_{t_k}.$$

Έχουμε λοιπόν για $k \leq N-1$

$$\frac{V_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{V_{t_k}}{B_{t_k}} = \phi_{k+1}\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \phi_k \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} + \psi_{k+1} - \psi_k. \tag{4.4}$$

Από τη συνθήκη αυτοχρηματοδότησης έχουμε ότι

$$\phi_k S_{t_{k+1}} + \psi_k B_{t_{k+1}} = \phi_{k+1} S_{t_{k+1}} + \psi_{k+1} B_{t_{k+1}}.$$

Διαιρώντας τα δύο μέλη με $B_{t_{k+1}}$ παίρνουμε ότι

$$\phi_k \frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \phi_{k+1}\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} = \psi_{k+1} - \psi_k.$$

Μπορούμε λοιπόν να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση (4.4) ως

$$\frac{V_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{V_{t_k}}{B_{t_k}} = \phi_k \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} \right).$$

Αν τώρα $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, αθροίζοντας τις παραπάνω σχέσεις για $k = 0, 1, \ldots, n-1$ προκύπτει ότι

$$\frac{V_{t_n}}{B_{t_n}} = V_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{B_{t_{k+1}}} - \frac{S_{t_k}}{B_{t_k}} \right). \tag{4.5}$$

Άρα η $e^{-rt_k} V_{t_k} - V_0$ είναι ένας μετασχηματισμός martingale.

Ορισμός 6 Ένα μέτρο πιθανότητας στον χώρο των τροχιών του πρωτογενούς προϊόντος ως προς το οποίο η προεξοφλημένη αξία του πρωτογενούς προϊόντος $e^{-rt} S_t$ είναι martingale ονομάζεται αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας ή μέτρο martingale (martingale measure).

Από το Θεώρημα 11 και τη σχέση (4.5) παραπάνω προκύπτει αμέσως το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 12 Αν το $\mathbb{Q}$ είναι μέτρο martingale στον Ω, τότε η προεξοφλημένη αξία κάθε αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου $e^{-rt_k} V_{t_k}$ είναι $(\mathbb{Q}, \mathcal{F}_k)$-martingale.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα παράγωγο με απόδοση στην ωρίμανση $U_T = U_T(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_N})$. Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι υπάρχει μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική $(\phi_k, \psi_k)_{k=0,1,\ldots,N-1}$ που αναπαράγει την απόδοση του παραγώγου, δηλαδή:

$$U_T = \phi_{N-1} S_{t_N} + \psi_{N-1} B_{t_N}.$$

Θεώρημα 13 Αν το $\mathbb{Q}$ είναι ένα μέτρο martingale στον Ω, τότε η σημερινή αξία ενός παραγώγου με απόδοση στην ωρίμανση U_T δίνεται από τη σχέση

$$U_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U_T]. \tag{4.6}$$

Απόδειξη: Έστω $(\phi_k, \psi_k)_{k=0,1,\ldots,N-1}$ η αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που αναπαράγει την απόδοση του παραγώγου. Αν ορίσουμε $\phi_N = \phi_{N-1}$ και $\psi_N = \psi_{N-1}$ το χαρτοφυλάκιο $(\phi_k, \psi_k)_{k=0,1,\ldots,N}$ είναι φυσικά επίσης αυτοχρηματοδοτούμενο. Από το Θεώρημα (12) η $e^{-rt_k} V_{t_k}$ είναι $(\mathbb{Q}, \mathcal{F}_k)$-martingale. Επομένως, από το Θεώρημα 9 έχουμε

$$U_0 = V_{t_0} = e^{-rt_N} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t_N}] = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[U_T]. \qquad \square$$

Παρατήρηση 12 Προσέξτε ότι η απόδειξη των Θεωρημάτων 12 και 13 κάνει ελάχιστη χρήση των ειδικών χαρακτηριστικών του υποδείγματός μας. Για το Θεώρημα 12 το μόνο που χρησιμοποιήσαμε είναι ότι στην αγορά υπάρχουν δύο προϊόντα και ότι μπορούμε να συναλλασσόμαστε στους χρόνους t_k. Για την (4.6) χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι η απόδοση του παραγώγου αναπαράγεται από μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική.

Παρατήρηση 13 Συνέπεια του παραπάνω Θεωρήματος είναι ότι, αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο martingale $\mathbb{Q}$ στον Ω, τότε δεν είναι απαραίτητο να τρέξουμε τον αναδρομικό αλγόριθμο για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο. Η σημερινή αξία *κάθε* παραγώγου είναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη (ως προς το $\mathbb{Q}$) απόδοσή του στην ωρίμανση. Προσέξτε επίσης ότι η (4.6) μας δίνει την παρούσα αξία ενός παραγώγου, χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε το χαρτοφυλάκιο που αντισταθμίζει το παράγωγο. Αν μάλιστα έχουμε να τιμολογήσουμε περισσότερα παράγωγα του ίδιου πρωτογενούς προϊόντος, αντί να ακολουθήσουμε τον αλγόριθμο για καθένα από αυτά χωριστά, μπορούμε εναλλακτικά να κατασκευάσουμε το $\mathbb{Q}$ και κατόπιν να υπολογίσουμε την προεξοφλημένη αναμενόμενη αξία κάθε παραγώγου ως προς αυτό.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο martingale $\mathbb{Q}$ στον χώρο Ω των μονοπατιών του διωνυμικού υποδείγματος πολλών περιόδων. Ορίζουμε για κάθε $k = 1, 2, \dots, N$ την τυχαία μεταβλητή $\xi_k = S_{t_k}/S_{t_{k-1}}$. Στο διωνυμικό υπόδειγμα όλες αυτές οι τυχαίες μεταβλητές μπορούν να πάρουν είτε την τιμή u είτε την τιμή d. Για οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ στον Ω

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] &= S_{t_k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\
&= S_{t_k}\big(u\mathbb{Q}[\xi_{k+1}=u|\mathcal{F}_k] + d\mathbb{Q}[\xi_{k+1}=d|\mathcal{F}_k]\big) \\
&= S_{t_k}\big(d + (u-d)\mathbb{Q}[\xi_{k+1}=u|\mathcal{F}_k]\big).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rt_{k+1}}S_{t_{k+1}}\,\big|\,\mathcal{F}_k\big] = e^{-rt_k}S_{t_k} \times e^{-rh}\big(d + (u-d)\mathbb{Q}[\xi_{k+1}=u|\mathcal{F}_k]\big)$$

Από την παραπάνω σχέση εύκολα βλέπει κανείς ότι το $\mathbb{Q}$ είναι μέτρο martingale, αν και μόνο αν

$$\mathbb{Q}\big[\xi_{k+1}=u\,\big|\,\mathcal{F}_k\big] = \frac{e^{rh}-d}{u-d} = q, \qquad \forall k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{4.7}$$

Υπενθυμίζουμε ότι από την υπόθεση $d < e^{rh} < u$ που έχουμε κάνει προκύπτει ότι $0 < q < 1$. Για $k = 0$ η (4.7) δίνει την κατανομή της ξ_1 κάτω από το $\mathbb{Q}$: η ξ_1 παίρνει την τιμή u με $\mathbb{Q}$-πιθανότητα q και την τιμή d με $\mathbb{Q}$-πιθανότητα $1-q$. Για $k = 1$ η (4.7) δίνει την κατανομή κάτω απ΄ το $\mathbb{Q}$ της ξ_2 δοθείσης της ξ_1: η ξ_2 είναι ανεξάρτητη της ξ_1 (γιατί;) και έχει την ίδια κατανομή. Επαγωγικά, συμπεραίνει κανείς εύκολα ότι, αν ο Ω εφοδιαστεί με ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ που ικανοποιεί την (4.7), τότε οι $\{\xi_j\}_{j=1,\dots,N}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή κατανομή αυτή που περιγράψαμε για την ξ_1.

Επομένως, η συνθήκη (4.7), η οποία υπενθυμίζουμε είναι ικανή και αναγκαία ώστε ένα μέτρο $\mathbb{Q}$ στον Ω να είναι μέτρο martingale, καθορίζει την από κοινού κατανομή των $\{\xi_j\}_{j=1,\dots,N}$ και άρα την $\mathbb{Q}$-πιθανότητα κάθε τροχιάς στον Ω. Για παράδειγμα,

$$\mathbb{Q}(\{S_{t_0}=S_0,\ S_{t_1}=S_0u,\dots,\ S_{t_{N-1}}=S_0u^{N-1}, S_{t_N}=S_0u^{N-1}d\}) = q^{N-1}(1-q).$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, για κάθε τροχιά $\omega \in \Omega$, η $\mathbb{Q}(\omega)$ υπολογίζεται ακριβώς όπως η $\mathbb{P}(\omega)$, αποδίδοντας σε κάθε κόμβο του δέντρου πιθανότητα q να κινηθούμε προς τα πάνω και $1-q$ να κινηθούμε προς τα κάτω. Μάλιστα, επειδή $0 < q < 1$, κάθε ενδεχόμενο που έχει θετική $\mathbb{P}$-πιθανότητα έχει επίσης θετική $\mathbb{Q}$-πιθανότητα και το αντίστροφο, δηλαδή τα μέτρα $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμα. Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι, επειδή η ιδιότητα (4.7) επιβάλλει την $\mathbb{Q}$-πιθανότητα κάθε τροχιάς, το μέτρο $\mathbb{Q}$ που κατασκευάσαμε είναι το μοναδικό μέτρο martingale στον Ω. Προσέξτε ακόμη ότι το μέτρο $\mathbb{Q}$ δεν εξαρτάται από την παράμετρο

p του μοντέλου μας. Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι μέτρο martingale ως εξής:

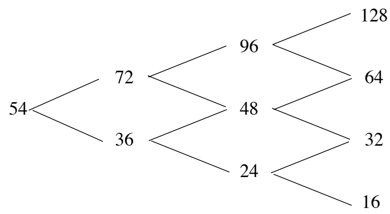
$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{t_k}\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\ &= S_{t_k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\ &= S_{t_k}(qu+(1-q)d) \\ &= S_{t_k}\left(u\frac{e^{rh}-d}{u-d}+d\frac{u-e^{rh}}{u-d}\right) \\ &= S_{t_k}e^{rh}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με $e^{-rt_{k+1}}$ παίρνουμε λοιπόν

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rt_{k+1}}S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] = e^{-rt_{k+1}}e^{rh}S_{t_k} = e^{-rt_k}S_{t_k},\ \forall k\in\{0,1,\ldots,N-1\}.$$

Η σχέση (4.6) είναι ένας κλειστός τύπος για τη σημερινή τιμή που η αρχή της μη επιτηδειότητας επιβάλλει σε ένα παράγωγο με ωρίμανση T και απόδοση στην ωρίμανση U_T. Η εφαρμογή του είναι εξαιρετικά απλή όπως θα δούμε τιμολογώντας ξανά τα παράγωγα που χρησιμοποιήσαμε στα παραδείγματα του προηγούμενου κεφαλαίου.

Παράδειγμα 15 Ας θυμηθούμε πάλι το μοντέλο που υποθέσαμε για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος:



Έχουμε λοιπόν $u=\frac{4}{3},\ d=\frac{2}{3}$, ενώ έχει δοθεί ότι $e^{rh}=\frac{16}{15}$.
Επομένως,

$$q=\frac{e^{rh}-d}{u-d}=\frac{3}{5}.$$

Υπολογίζουμε τώρα την πιθανότητα $\mathbb{Q}$ κάθε τροχιάς:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\omega_1)=\mathbb{Q}(\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(u,u,u)\}) &= q^3=\frac{27}{125}, \\ \mathbb{Q}(\omega_2)=\mathbb{Q}(\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(u,u,d)\}) &= \\ \mathbb{Q}(\omega_3)=\mathbb{Q}(\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(u,d,u)\}) &= \\ \mathbb{Q}(\omega_4)=\mathbb{Q}(\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(d,u,u)\}) &= q^2(1-q)=\frac{18}{125}, \\ \mathbb{Q}(\omega_5)=\mathbb{Q}(\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(u,d,d)\}) &= \\ \mathbb{Q}(\omega_6)=\mathbb{Q}(\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(d,u,d)\}) &= \\ \mathbb{Q}(\omega_7)=\mathbb{Q}(\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(d,d,u)\}) &= q(1-q)^2=\frac{12}{125}, \\ \mathbb{Q}(\omega_8)=\mathbb{Q}(\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(d,d,d)\}) &= (1-q)^3=\frac{8}{125}. \end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα με τη βοήθεια της σχέσης (4.6) την αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με τιμή άσκησης 48.

$$\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T] = e^{-3rh}\sum_{i=1}^{8} V_T(\omega_i)\mathbb{Q}(\omega_i) = \\
&= \left(\frac{15}{16}\right)^3 \left((48-128)^+ \times \frac{27}{125} + 3\times(48-64)^+ \times \frac{18}{125} + 3\times(48-32)^+ \times \frac{12}{125} + (48-16)^+ \times \frac{8}{125}\right) = \\
&= \frac{351}{64}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 16 Οι ιδιότητες του μέτρου $\mathbb{Q}$ μπορούν να φανούν χρήσιμες και στον υπολογισμό του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Ας υπολογίσουμε το χαρτοφυλάκιο (ϕ_0, ψ_0) που θα πρέπει αρχικά να κατέχουμε για να αναπαραγάγουμε την απόδοση του παραγώγου. Μπορούμε να υπολογίσουμε την τυχαία μεταβλητή V_{t_1} από το γεγονός ότι η $e^{-rt_k}V_{t_k}$ είναι $(\mathbb{Q}, \mathcal{F}_k)$-martingale. Επομένως,

$$e^{-rt_1}V_{t_1} = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T|\mathcal{F}_1].$$

Τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης είναι $\mathcal{F}_1$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές (δηλαδή συναρτήσεις της S_{t_1}) και άρα έχουν σταθερή τιμή σε καθένα από τα ενδεχόμενα $K_u = \{S_{t_1} = 72\}$ και $K_d = \{S_{t_1} = 36\}$.

$$\begin{aligned}
V_{t_1}(K_u) &= e^{-r(T-t_1)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T|S_{t_1} = 72] \\
&= = \left(\frac{15}{16}\right)^2 \left((48-128)^+(\frac{3}{5})^2 + 2(48-64)^+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5} + (48-32)^+(\frac{2}{5})^2\right) \\
&= \frac{9}{4},
\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}
V_{t_1}(K_d) &= e^{-r(T-t_1)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T|S_{t_1} = 36] \\
&= = \left(\frac{15}{16}\right)^2 \left((48-64)^+(\frac{3}{5})^2 + 2(48-32)^+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5} + (48-16)^+(\frac{2}{5})^2\right) \\
&= \frac{45}{4}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\phi_0 = \frac{V_{t_1}(K_u) - V_{t_1}(K_d)}{S_0(u-d)} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{45}{4}}{54(\frac{4}{3} - \frac{2}{3})} = -\frac{1}{4}.$$

Η ψ_0 μπορεί τώρα εύκολα να βρεθεί από τη σχέση $\phi_0 S_{t_0} + \psi_0 = V_0$.

Παράδειγμα 17 Ας υπολογίσουμε στη συνέχεια την αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με τιμή άσκησης 48 και άνω και εκτός φράγμα στα 60. Η διαφορά με το πρώτο παράδειγμα είναι ότι εδώ $V_T(\omega_5) = 0$, αφού στην τροχιά που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο ω_5 το άνω και εκτός φράγμα των 60 έχει ξεπεραστεί πριν την ωρίμανση. Το δικαίωμα έχει μη μηδενική αξία στην ωρίμανση μόνο για τις τροχιές $\omega_6, \omega_7, \omega_8$, οπότε:

$$\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T] = e^{-3rh}\sum_{j=1}^{8} V_T(\omega_i)\mathbb{Q}(\omega_i) = \\
&= \left(\frac{15}{16}\right)^3 \left(2\times(48-32)^+ \times \frac{12}{125} + (48-16)^+ \times \frac{8}{125}\right) = \\
&= \frac{135}{32}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 18 Ας εφαρμόσουμε τώρα τον τύπο (4.6) στην περίπτωση ενός γενικού ευρωπαϊκού παραγώγου με ωρίμανση T και απόδοση στην ωρίμανση $f(S_T)$ για ένα διωνυμικό μοντέλο N περιόδων. Υπάρχουν

$$\begin{array}{ll}
1 & \text{τροχιά για την οποία } S_T = S_0 u^N \text{ στην οποία το } \mathbb{Q} \text{ αποδίδει πιθανότητα } q^N, \\
N & \text{τροχιές για τις οποίες } S_T = S_0 u^{N-1} d \text{ στις οποίες το } \mathbb{Q} \text{ αποδίδει πιθανότητα } q^{N-1}(1-q), \\
\binom{N}{2} & \text{τροχιές για τις οποίες } S_T = S_0 u^{N-2} d^2 \text{ στις οποίες το } \mathbb{Q} \text{ αποδίδει πιθανότητα } q^{N-2}(1-q)^2, \\
\vdots & \\
\binom{N}{k} & \text{τροχιές για τις οποίες } S_T = S_0 u^{N-k} d^k \text{ στις οποίες το } \mathbb{Q} \text{ αποδίδει πιθανότητα } q^{N-k}(1-q)^k, \\
\vdots & \\
1 & \text{τροχιά για την οποία } S_T = S_0 d^N \text{ στην οποία το } \mathbb{Q} \text{ αποδίδει πιθανότητα } (1-q)^N.
\end{array}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (4.6), η αρχική αξία του παραγώγου είναι

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(S_T)] = e^{-rT} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \; q^{N-k}(1-q)^k \; f(S_0 u^{N-k} d^k).$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως ο *διακριτός τύπος των Black & Scholes.*

4.5 Ανομοιόμορφα διωνυμικά υποδείγματα

Στο υπόδειγμα που θεωρήσαμε η ποσοστιαία αύξηση ή ελάττωση της τιμής του πρωτογενούς προϊόντος σε κάθε κόμβο του δέντρου, οι παράμετροι u και d δηλαδή, ήταν σταθερές παράμετροι του μοντέλου μας. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6, αυτή η υπόθεση δεν είναι ιδιαίτερα περιοριστική. Αν θεωρήσουμεπως το πλήθος N των περιόδων μας τείνει στο άπειρο και ταυτόχρονα πως η διάρκειά τους h τείνει στο μηδέν, ώστε $Nh = T$, μπορούμε να φτάσουμε σε ένα μη τετριμμένο μοντέλο για την περιγραφή της χρονικής εξέλιξης μετοχών. Η θεωρία που έχουμε αναπτύξει μπορεί όμως εύκολα να γενικευθεί και σε δέντρα όπου οι παράμετροι u και d μεταβάλλονται από κόμβο σε κόμβο. Η πληροφορία αυτή θα εξαρτάται από την ιστορία της αγοράς μέχρι εκείνη τη στιγμή, οι παράμετροι u και d θα είναι δηλαδή $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές. Το ίδιο μπορεί να συμβαίνει και για τις παραμέτρους p, ακόμη και για το επιτόκιο r. Τέτοια υποδείγματα είναι χρήσιμα, ιδιαίτερα για την περιγραφή αγορών με κυμαινόμενα επιτόκια.

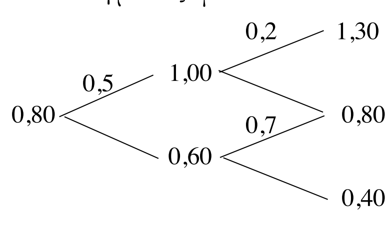
Έστω λοιπόν ότι η σημερινή αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι $S_0 > 0$, ενώ η εξέλιξή της στο χρόνο συμβαίνει ως εξής: αν τη στιγμή t_k η αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_{t_k}, τότε

$$S_{t_{k+1}} = S_{t_k} \xi_{k+1}, \tag{4.8}$$

όπου η $\{\xi_k\}_{k \in \{1,2,\ldots,N\}}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία. Η από κοινού κατανομή των ξ_k περιγράφεται ως εξής: για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[\xi_{k+1} = u_k \big| \mathcal{F}_k\big] &= p_k \\
\mathbb{P}\big[\xi_{k+1} = d_k \big| \mathcal{F}_k\big] &= 1 - p_k,
\end{aligned}$$

όπου οι $u_k = u_k(S_{t_0}, \ldots, S_{t_k})$, $d_k = d_k(S_{t_0}, \ldots, S_{t_k})$ και $p_k = p_k(S_{t_0}, \ldots, S_{t_k})$ είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές. Φυσικά, προκειμένου να μην υπάρχουν ευκαιρίες επιτηδειότητας, θα πρέπει $d_k < e^{rh} < u_k$ για όλα τα k. Το παράδειγμα ενός τέτοιου υποδείγματος φαίνεται στο ακόλουθο δέντρο.



Οι παράμετροι αυτού του μοντέλου μπορούν να βρεθούν ως εξής.

- Στον πρώτο κόμβο:
$$u_0 = \frac{1,00}{0,80} = \frac{5}{4}, \;\; d_0 = \frac{0,60}{0,80} = \frac{3}{4}, \;\; p_0 = 0,5.$$

- Στο ενδεχόμενο $\{S_{t_1} = 1,00\} = \{\xi_1 = u_0\}$ έχουμε:
$$u_1(\{S_{t_1} = 100\}) = \frac{1,30}{1,00} = \frac{13}{10}, \;\; d_1(\{S_{t_1} = 1,00\}) = \frac{0,80}{1,00} = \frac{4}{5}, \;\; p_1(\{S_{t_1} = 1,00\}) = 0,2.$$

- Τέλος, στο ενδεχόμενο $\{S_{t_1} = 0,60\} = \{\xi_1 = d_0\}$ έχουμε:
$$u_1(\{S_{t_1} = 0,60\}) = \frac{0,80}{0,60} = \frac{4}{3}, \;\; d_1(\{S_{t_1} = 0,60\}) = \frac{0,40}{0,60} = \frac{2}{3}, \;\; p_1(\{S_{t_1} = 0,60\}) = 0,7.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα παράγωγο με δεδομένη απόδοση τη στιγμή T ίση με
$$V_T = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_N}).$$
Θα κατασκευάσουμε πάλι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που αναπαράγει την παραπάνω απόδοση στη ωρίμανση, δηλαδή
$$\phi_{N-1} S_T + \psi_{N-1} B_T = V_T.$$
Η παραπάνω σχέση ικανοποιείται, ακριβώς όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο γραμμικές εξισώσεις.
$$\begin{cases} \phi_{N-1} S_{t_{N-1}} u_{N-1} + \psi_{N-1} B_{t_N} & = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} u_{N-1}) \\ \phi_{N-1} S_{t_{N-1}} d_{N-1} + \psi_{N-1} B_{t_N} & = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} d_{N-1}), \end{cases}$$
από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τις (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}). Ορίζοντας,
$$V_N^{\uparrow} = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} u), \qquad V_N^{\downarrow} = U_{t_N}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}, S_{t_{N-1}} d),$$
και
$$S_N^{\uparrow} = S_{t_{N-1}} u_{N-1}, \qquad S_N^{\downarrow} = S_{t_{N-1}} d_{N-1}$$
έχουμε
$$\phi_{N-1} = \frac{V_N^{\uparrow} - V_N^{\downarrow}}{S_N^{\uparrow} - S_N^{\downarrow}}, \qquad \psi_{N-1} = \frac{V_N^{\downarrow} S_N^{\uparrow} - V_N^{\uparrow} \times S_N^{\downarrow}}{B_{t_N}(S_N^{\uparrow} - S_N^{\downarrow})}. \tag{4.9}$$
Παρατηρήστε και πάλι ότι οι (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) είναι συναρτήσεις των $S_{t_0}, \ldots, S_{t_{N-1}}$, είναι δηλαδή $\mathcal{F}_{N-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές. Έχοντας κατασκευάσει τη στιγμή t_{N-1} (και ανάλογα με τη γνώση μας για την εξέλιξη της αγοράς έως τότε) ένα χαρτοφυλάκιο (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) η αξία του οποίου τη στιγμή t_N θα ταυτίζεται με αυτήν του παραγώγου, μπορούμε να ορίσουμε την αξία του παραγώγου τη στιγμή t_{N-1} ως την αξία αυτού του χαρτοφυλακίου.
$$V_{t_{N-1}} = U_{t_{N-1}}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N-1}}) := \phi_{N-1} S_{t_{N-1}} + \psi_{N-1} B_{t_{N-1}}.$$
Αντικαθιστώντας τα (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) από την (4.9), παίρνουμε
$$V_{t_{N-1}} = e^{-rh}(q_{N-1} V_N^{\uparrow} + (1 - q_{N-1}) V_N^{\downarrow}),$$
όπου
$$q_{N-1} = \frac{e^{rh} - d_{N-1}}{u_{N-1} - d_{N-1}} = \frac{S_{t_{N-1}} e^{rh} - S_N^{\downarrow}}{S_N^{\uparrow} - S_N^{\downarrow}}$$
Θα πρέπει τώρα να είναι προφανές πώς θα συνεχίσουμε την οπισθοδρόμηση μέχρι τον χρόνο t_0 ώστε να βρούμε τη σημερινή αξία του παραγώγου και το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο.

Παράδειγμα 19 Στο υπόδειγμα που προαναφέραμε ας υποθέσουμε ότι $e^{rh} = 1,1$. Ας τιμολογήσουμε ένα παράγωγο που τη στιγμή t_2 αποδίδει 242, αν $S_{t_2} > S_{t_1}$ και σε αντίθετη περίπτωση μηδέν, κατασκευάζοντας μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική που αναπαράγει την απόδοσή του.

- Στο ενδεχόμενο $K_u = \{S_{t_1} = 1,00\}$ έχουμε:

$$\phi_1(K_u) = \frac{V_2^{\uparrow}(K_u) - V_2^{\downarrow}(K_u)}{S_2^{\uparrow}(K_u) - S_2^{\downarrow}(K_u)} = \frac{242 - 0}{1,30 - 0,80} = 484,$$

ενώ

$$\psi_1(K_u) = e^{-2rh}\frac{V_2^{\downarrow}(K_u)S_2^{\uparrow}(K_u) - V_2^{\uparrow}(K_u)S_2^{\downarrow}(K_u)}{S_2^{\uparrow}(K_u) - S_2^{\downarrow}(K_u)} = \left(\frac{10}{11}\right)^2 \frac{0 \times 1,30 - 242 \times 0,80}{1,30 - 0,80} = -320.$$

Επομένως,

$$V_1(K_u) = 484 \times 1,00 + (-320) \times 1,1 = 132.$$

- Στο ενδεχόμενο $K_d = \{S_{t_1} = 0,60\}$ έχουμε:

$$\phi_1(K_d) = \frac{V_2^{\uparrow}(K_d) - V_2^{\downarrow}(K_d)}{S_2^{\uparrow}(K_d) - S_2^{\downarrow}(K_d)} = \frac{242 - 0}{0,80 - 0,40} = 605,$$

ενώ

$$\psi_1(K_d) = e^{-2rh}\frac{V_2^{\downarrow}(K_d)S_2^{\uparrow}(K_d) - V_2^{\uparrow}(K_d)S_2^{\downarrow}(K_d)}{S_2^{\uparrow}(K_d) - S_2^{\downarrow}(K_d)} = \left(\frac{10}{11}\right)^2 \frac{0 \times 0,80 - 242 \times 0,40}{0,80 - 0,40} = -200.$$

Επομένως,

$$V_1(K_d) = 605 \times 0,60 + (-200) \times 1,1 = 143.$$

- Τέλος για τον αρχικό κόμβο έχουμε

$$\phi_0 = \frac{V_1^{\uparrow} - V_1^{\downarrow}}{S_1^{\uparrow} - S_1^{\downarrow}} = \frac{132 - 143}{1,00 - 0,60} = -27,5$$

και

$$\psi_0 = e^{-rh}\frac{V_1^{\downarrow}S_2^{\uparrow} - V_2^{\uparrow}S_2^{\downarrow}}{S_2^{\uparrow} - S_2^{\downarrow}} = \frac{10}{11} \cdot \frac{143 \times 1,00 - 132 \times 0,60}{1,00 - 0,60} = 145.$$

Έτσι,

$$V_0 = -27,5 \times 0,80 + 145 = 123.$$

Μπορούμε εναλλακτικά να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο βρίσκοντας ένα μέτρο martingale στο χώρο των τροχιών. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς, επαναλαμβάνοντας τα επιχειρήματα της προηγούμενης παραγράφου, ότι ένα μέτρο $\mathbb{Q}$ στον Ω είναι μέτρο martingale, αν και μόνο αν για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N-1$

$$q_k := \mathbb{Q}\big[\xi_{k+1} = u_k | \mathcal{F}_k\big] = \frac{e^{rh} - d_k}{u_k - d_k} = \frac{S_{t_k}e^{rh} - S_{k+1}^{\downarrow}}{S_{k+1}^{\uparrow} - S_{k+1}^{\downarrow}}. \tag{4.10}$$

Η παραπάνω σχέση καθορίζει την από κοινού κατανομή των ξ_k και άρα την $\mathbb{Q}$-πιθανότητα κάθε τροχιάς. Για $k = 0$ μας δίνει την κατανομή της ξ_1, για $k = 1$ μας δίνει την κατανομή της ξ_2 δοθείσης της ξ_1, για $k = 2$ μας δίνει την κατανομή της ξ_3 δοθέντων των ξ_1, ξ_2 κ.λπ. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\big[\{\xi_1 = u_0, \xi_2 = d_1, \xi_3 = u_2\}\big] &= \mathbb{Q}\big[\{\xi_1 = u_0, \xi_2 = d_1\}\big]q_2(\{\xi_1 = u_0, \xi_2 = d_1\}) \\
&= \mathbb{Q}\big[\{\xi_1 = u_0\}\big]\big(1 - q_1(\{\xi_1 = u_0\})\big)q_2(\{\xi_1 = u_0, \xi_2 = d_1\}) \\
&= q_0\big(1 - q_1(\{\xi_1 = u_0\})\big)q_2(\{\xi_1 = u_0, \xi_2 = d_1\}).
\end{aligned}$$

Η κατασκευή του μέτρου $\mathbb{Q}$ είναι επομένως αντίστοιχη με αυτή της προηγούμενης παραγράφου μόνο που τώρα η παράμετρος q δεν είναι μια σταθερά του υποδείγματος αλλά μια τυχαία μεταβλητή. Για να υπολογίσουμε την $\mathbb{Q}$-πιθανότητα κάθε τροχιάς πολλαπλασιάζουμε τις παραμέτρους (q_k ή $1-q_k$) που αντιστοιχούν στη συγκεκριμενη τροχιά σε κάθε κόμβο της. Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι μέτρο martingale.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{t_k}\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\
&= S_{t_k}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\
&= S_{t_k}(q_k u_k + (1-q_k)d_k) \\
&= S_{t_k}\left(u_k\frac{e^{rh}-d_k}{u_k-d_k} + d_k\frac{u_k-e^{rh}}{u_k-d_k}\right) \\
&= S_{t_k}e^{rh}
\end{aligned}$$

και πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με e^{-rt_k} παίρνουμε ότι η $e^{-rt_k}S_{t_k}$ είναι $(\mathbb{Q},\mathcal{F}_k)$-martingale.

Παρατηρήστε ξανά ότι το μέτρο $\mathbb{Q}$ που κατασκευάσαμε είναι το μοναδικό μέτρο martingale στον Ω, καθώς η επιλογή του επιβλήθηκε από την (4.10). Ομοίως, οι παράμετροι p_k δεν υπεισέρχονται στον υπολογισμό του $\mathbb{Q}$. Τέλος, κάθε $\mathbb{P}$-πιθανή τροχιά είναι και $\mathbb{Q}$-πιθανή και το αντίστροφο, άρα τα $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμα.

Παράδειγμα 20 Ας τιμολογήσουμε σαν παράδειγμα το παράγωγο της προηγούμενης άσκησης κατασκευάζοντας το μέτρο martingale $\mathbb{Q}$.

- Στο ενδεχόμενο $K_u = \{S_{t_1} = 1,00\}$ έχουμε

$$q_1(K_u) = \frac{e^{rh}S_{t_1}(K_u) - S_2^{\downarrow}(K_u)}{S_2^{\uparrow}(K_u) - S_2^{\downarrow}(K_u)} = \frac{1,10-0,80}{1,30-0,80} = 0,6.$$

- Στο ενδεχόμενο $K_d = \{S_{t_1} = 0,60\}$ έχουμε

$$q_1(K_d) = \frac{e^{rh}S_{t_1}(K_d) - S_2^{\downarrow}(K_d)}{S_2^{\uparrow}(K_d) - S_2^{\downarrow}(K_d)} = \frac{0,66-0,40}{0,80-0,40} = 0,65.$$

- Στον αρχικό κόμβο του δέντρου έχουμε

$$q_0 = \frac{e^{rh}S_{t_0} - S_1^{\downarrow}}{S_1^{\uparrow} - S_1^{\downarrow}} = \frac{0,88-0,60}{1,00-0,60} = 0,7.$$

Επομένως η πιθανότητα κάθε τροχιάς βρίσκεται ως εξής.

$$\mathbb{Q}(\omega_1) = \mathbb{Q}\big[\{S_{t_0} = 0,80, \mathcal{S}_{t_1} = 1,00, S_{t_2} = 1,30\}\big] = q_0 q_1(K_u) = 0,7 \times 0,6 = 0,42.$$

$$\mathbb{Q}(\omega_2) = \mathbb{Q}\big[\{S_{t_0} = 0,80, \mathcal{S}_{t_1} = 1,00, S_{t_2} = 0,80\}\big] = q_0(1-q_1(K_u)) = 0,7 \times 0,4 = 0,28.$$

$$\mathbb{Q}(\omega_3) = \mathbb{Q}\big[\{S_{t_0} = 0,80, \mathcal{S}_{t_1} = 0,60, S_{t_2} = 0,80\}\big] = (1-q_0)q_1(K_d) = 0,3 \times 0,65 = 0,195.$$

$$\mathbb{Q}(\omega_4) = \mathbb{Q}\big[\{S_{t_0} = 0,80, \mathcal{S}_{t_1} = 0,60, S_{t_2} = 0,40\}\big] = (1-q_0)(1-q_1(K_d)) = 0,3 \times 0,35 = 0,105.$$

Συνεπώς, από τη σχέση 4.6 έχουμε

$$V_0 = e^{-2rh}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T] = \left(\frac{10}{11}\right)^2 \cdot (242 \times 0,42 + 0 \times 0,28 + 242 \times 0,195 + 0 \times 0,105) = 123.$$

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο ας συνοψίσουμε κάποιες ιδότητες του διωνυμικού υποδείγματος οι οποίες προσφέρονται για γενίκευση. Θεωρήσαμε την αγορά μας σαν ένα χώρο πιθανότητας τα σημεία του οποίου αντιστοιχούν σε τροχιές του πρωτογενούς προϊόντος, εφοδιασμένο με ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$. Στον χώρο αυτόν κατασκευάσαμε ένα άλλο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η προεξοφλημένη αξία του πρωτογενούς προϊόντος $e^{-rt}S_t$ είναι ένα $\mathbb{Q}$-martingale.

2. Κάθε ενδεχόμενο που έχει θετική $\mathbb{P}$-πιθανότητα έχει επίσης θετική $\mathbb{Q}$-πιθανότητα και το αντίστροφο. Επομένως, $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

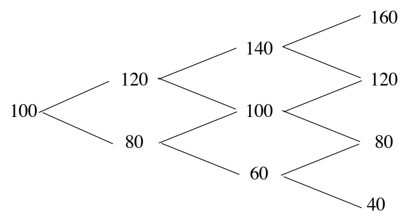
Μέτρα $\mathbb{Q}$ με τις παραπάνω δύο ιδιότητες χαρακτηρίζονται ως *ισοδύναμα μέτρα martingale* (equivalent martingale measures) και παίζουν κεντρικό ρόλο στην ανάλυση χρηματοοικονομικών παραγώγων.

4.6 Ασκήσεις

Στις παρακάτω ασκήσεις βασίστε τις απαντήσεις σας στη μεθοδολογία αυτού του κεφαλαίου. Κάποιες από αυτές συμπεριλαμβάνονται και στις ασκήσεις του προηγούμενου κεφαλαίου. Σ' αυτές τις περιπτώσεις συγκρίνετε τα αποτελέσματα που θα βρείτε με τις δύο μεθοδολογίες, καθώς και την πολυπλοκότητα των υπολογισμών σε κάθε περίπτωση.

Άσκηση 32 Θεωρούμε ένα ιδιαίτερο δικαίωμα πώλησης επί μιας μετοχής με ωρίμανση σε ένα έτος που περιγράφεται ως εξής. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι €40 και η τρέχουσα τιμή άσκησης είναι €40. Αν η τιμή της μετοχής έπειτα από έξι μήνες είναι μικρότερη από €35 τότε η τιμή άσκησης στην ωρίμανση επανακαθορίζεται σε €35, διαφορετικά περαμένει στα €40.
α. Τιμολογήστε το παράγωγο χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων με $u = 1,2737$ και $d = 0,7764$.
β. Τιμολογήστε το παράγωγο χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό δέντρο τεσσάρων περιόδων με $u = 1,1879$ και $d = 0,8371$.
Δίνεται το επιτόκιο του προϊόντος χωρίς κίνδυνο $r = 6\%$ με συνεχή ανατοκισμό.

Άσκηση 33 Δίνεται το ακόλουθο δυωνυμικό υπόδειγμα για τη δυναμική μιας μετοχής.



Η κάθε περίοδος στο παραπάνω δέντρο αντιστοιχεί σε διάστημα 4 μηνών. Στην αγορά υπάρχει επίσης ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο 14,637% υπολογισμένο με συνεχή ανατοκισμό.
α) Τιμολογήστε βάσει του παραπάνω υποδείγματος ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής με ωρίμανση σε ένα έτος και τιμή άσκησης €100.
β) Τιμολογήστε βάσει του παραπάνω υποδείγματος ένα δικαίωμα πώλησης της μετοχής με ωρίμανση σε ένα έτος και τιμή άσκησης €100. Επιβεβαιώστε τη σχέση ισοτιμίας των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.

Άσκηση 34 Τιμολογήστε βάσει του υποδείγματος αγοράς της προηγούμενης άσκησης το παράγωγο που περιγράφεται στην Άσκηση 30.

Άσκηση 35 Τιμολογήστε βάσει του υποδείγματος της Άσκησης 33 ένα παράγωγο με ωρίμανση σε ένα έτος και απόδοση

$$V = (\bar{S}_T - 100)^+,$$

όπου $\bar{S}_T$ είναι ο μέσος όρος των τιμών της μετοχής σε 4, 8 και 12 μήνες.

Άσκηση 36 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι S_0 =100. Θα υποθέσουμε αρχικά ότι σε καθένα από τα επόμενα τέσσερα τρίμηνα η τιμή της είτε θα ανέβει κατά 10% είτε θα κατέβει κατά 10%. Το επιτόκιο του προϊόντος χωρίς κίνδυνο είναι 4%, ενώ είναι γνωστό ότι η μετοχή δεν θα αποδώσει μέρισμα κατά τον επόμενο χρόνο.
α) Τιμολογήστε βάσει αυτού του υποδείγματος ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς τιμή άσκησης $K = 100$ και ωρίμανση T =1 έτος.
β) Τιμολογήστε ένα δικαίωμα που έχει την ίδια απόδοση όπως το προηγούμενο, αλλά ακυρώνεται αν η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από 92.

Άσκηση 37 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι S_0 =€100. Θα υποθέσουμε αρχικά ότι σε καθένα από τα επόμενα τρία τετράμηνα η τιμή της είτε θα ανέβει κατά 10% είτε θα κατέβει κατά 10%. Το ετήσιο άνευ κινδύνου επιτόκιο υπολογισμένο με συνεχή απόδοση είναι 6,186%, ενώ είναι γνωστό ότι η μετοχή δεν θα αποδώσει μέρισμα κατά τον επόμενο χρόνο.
α) Τιμολογήστε βάσει αυτού του υποδείγματος ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με ωρίμανση έπειτα από $T = 1$ έτος και τιμή άσκησης K =€98, καθώς και ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με ωρίμανση έπειτα από $t = 8$ μήνες και τιμή άσκησης M =€96.
Θεωρούμε τώρα ένα *δικαίωμα επιλογής*, ο κάτοχος του οποίου επιλέγει τη χρονική στιγμή t αν θα το ασκήσει στην ωρίμανσή του T ως ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς ή ως ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, με τιμή άσκησης K αμφότερα.
β) Σε ποιους κόμβους του δέντρου που αντιστοιχούν στον χρόνο t είναι η αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς μεγαλύτερη από αυτήν του δικαιώματος πώλησης (άρα ο λογικός επενδυτής θα επιλέξει να ασκήσει το δικαίωμα επιλογής ως δικαίωμα αγοράς);
γ)Τιμολογήστε αυτό το παράγωγο βάσει του διωνυμικού υποδείγματος που θεωρήσαμε και συγκρίνετε την αξία του με το άθροισμα των αξιών των δύο παραγώγων του ερωτήματος (α).
δ) Δείξτε τώρα ότι, *ανεξάρτητα από το υπόδειγμα* αγοράς που υιοθετούμε και για οποιαδήποτε S_0, T, t, K, η αξία του δικαιώματος επιλογής ισούται με το άθροισμα της αξίας ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με ωρίμανση στον χρόνο T και τιμή άσκησης K και αυτής ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με ωρίμανση στον χρόνο t και παραδοτέα τιμή $M = Ke^{-r(T-t)}$.

Άσκηση 38 Η τιμή μιας μετοχής είναι S_0 = €50. Για τη δυναμική της θεωρούμε το ακόλουθο υπόδειγμα δύο μηνιαίων περιόδων. Σε ένα μήνα η αξία της μετοχής S_1 θα είναι €45 ή €60.
- Αν S_1 =€60 κάθε μετοχή θα δώσει μέρισμα €5 (οπότε η αξία της θα γίνει €55) και στο τέλος του δεύτερου μήνα η αξία της θα είναι €60 ή €50.
- Αν S_1 =€45 η μετοχή δεν θα δώσει μέρισμα και στο τέλος του δεύτερου μήνα η αξία της θα είναι €50 ή €30.

α) Τιμολογήστε βάσει του παραπάνω υποδείγματος ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς της μετοχής με τιμή άσκησης €46 και ωρίμανση σε δύο μήνες. Υποθέστε ότι $r = 0$.
β) Έχετε μόλις πουλήσει το ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς προς την τιμή του βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Βρείτε ποιο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να κατασκευάσετε σήμερα και πώς θα αλλάζατε τη θέση σας σε ένα μήνα στο ενδεχόμενο S_1=€60, προκειμένου να εξαλείψετε τον κίνδυνο από την πώληση του δικαιώματος.

Κεφάλαιο 5

Δικαιώματα αμερικανικού τύπου

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πώς μπορούμε να τιμολογήσουμε δικαιώματα αμερικανικού τύπου με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων. Θα δούμε επίσης την έννοια των χρόνων διακοπής και το Θεώρημα Επιλεκτικής Διακοπής για martingale. Με τη βοήθεια αυτών των εργαλείων θα περιγράψουμε το πρόβλημα της βέλτιστης άσκησης ενός αμερικανικού δικαιώματος ως ένα πρόβλημα βέλτιστης διακοπής. Παρόμοιο υλικό μπορείτε να βρείτε στις αναφορές [7] και [8].

5.2 Αλγόριθμος τιμολόγησης αμερικανικών δικαιωμάτων

Ας δούμε τώρα έναν αλγόριθμο για την τιμολόγηση και αντιστάθμιση αμερικανικών δικαιωμάτων που είναι αντίστοιχος με τον αλγόριθμο του Κεφαλαίου 3. Ο αλγόριθμος αυτός ξεκινά από τον χρόνο ωρίμανσης του παραγώγου και κατασκευάζει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο το οποίο οπωσδήποτε αντισταθμίζει τις απαιτήσεις που μπορεί να εγείρει ο κάτοχος το δικαιώματος. Θα δούμε στην τελευταία παράγραφο ότι η αρχική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου είναι η μοναδική τιμή για το αμερικανικό παράγωγο που δεν επιτρέπει ευκαιρίες επιτηδειότητας. Με αυτήν την έννοια, είναι η δίκαια τιμή του παραγώγου.

Προκειμένου να κατανοήσουμε τη μηχανική του αλγορίθμου είναι χρήσιμο να καταλάβουμε τι συμβαίνει στο διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η σημερινή αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι s_0 και ότι, σε μια επόμενη χρονική στιγμή h, το πρωτογενές προϊόν θα έχει αξία είτε s_1 με πιθανότητα $p \in (0,1)$ είτε s_2 με πιθανότητα $1-p$. Όπως πάντα η αγορά μας περιλαμβάνει ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο το οποίο αποδίδει επιτόκιο r με συνεχή ανατοκισμό. Η αξία του προϊόντος χωρίς κίνδυνο τη στιγμή t_k είναι $B_{t_k} = e^{rt_k}$. Προκειμένου να μην υπάρχουν ευκαιρίες επιτηδειότητας με στρατηγικές που χρησιμοποιούν μόνο το πρωτογενές προϊόν και το προϊόν χωρίς κίνδυνο, θα πρέπει

$$s_2 < s_0 e^{rh} < s_1.$$

Ένα αμερικανικού τύπου δικαίωμα, αποδίδει στον κάτοχό του f_1 ή f_2 στην ωρίμανση, ανάλογα με το αν η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι s_1 ή s_2, μπορεί όμως και να ασκηθεί άμεσα αποδίδοντας f_0. Ας φανταστούμε τώρα ότι κατέχουμε αυτό το δικαίωμα και θέλουμε να αποφασίσουμε αν θα το ασκήσουμε άμεσα ή αν θα επιλέξουμε να το κρατήσουμε μέχρι την ωρίμανση. Στην πρώτη περίπτωση το αμερικανικό δικαίωμα θα μας αποδώσει f_0. Στη δεύτερη περίπτωση θα έχουμε στα χέρια μας ένα τίτλο ο οποίος στην επόμενη περίοδο θα αποδώσει είτε f_1 είτε f_2. Μπορούμε να υπολογίσουμε πόσο αξίζει αυτός ο τίτλος ακριβώς όπως στο Κεφάλαιο 2, κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο (ϕ, ψ) το οποίο την επόμενη περίοδο θα αξίζει όσο και το παράγωγο. Θα βρούμε έτσι ότι η παρούσα αξία του δικαιώματός μας, αν επιλέξουμε να μην το ασκήσουμε άμεσα, είναι

$$u_0 = e^{-rh}\big(qf_1 + (1-q)f_2\big), \qquad \text{όπου } q = \frac{e^{rh} - s_2}{s_1 - s_2}.$$

Τι θα αποφασίζαμε λοιπόν, να ασκήσουμε άμεσα ή όχι το δικαίωμά μας; Η απάντηση είναι πώς θα αποφασίζαμε ό,τι μας συμφέρει περισσότερο. Αν $f_0 \geq u_0$, θα συνέφερε να ασκήσουμε άμεσα, ενώ, αν $f_0 < u_0$, θα συνέφερε να περιμένουμε μέχρι την ωρίμανση h. Επομένως, έχει νόημα να ορίσουμε την αξία του αμερικανικού παραγώγου σήμερα ως

$$V_0 = \max\{f_0, u_0\} = f_0 \vee u_0 = f_0 \vee e^{-rh}(qf_1 + (1-q)f_2) = u_0 + \big(f_0 - u_0\big)^+.$$

Αυτή είναι η μόνη τιμή του δικαιώματος η οποία είναι συμβατή με την αρχή της μη επιτηδειότητας. Πράγματι, αν μπορούσατε να πουλήσετε το παράγωγο για $P_0 > V_0$, θα μπορούσατε να κατασκευάσετε μια στρατηγική επιτηδειότητας ως εξής. Αν το δικαίωμα ασκείτο άμεσα, θα έχετε κέρδος $P_0 - f_0 \geq P_0 - V_0 > 0$. Αν το δικαίωμα δεν ασκείτο άμεσα, θα μπορούσατε να πάρετε θετική θέση στο χαρτοφυλάκιο (ϕ, ψ), ξοδεύοντας u_0, ενώ θα σας έμενε ένα ποσόν $P_0 - u_0 \geq P_0 - V_0 > 0$, το οποίο θα μπορούσατε να επενδύσετε χωρίς κίνδυνο. Η θέση σας στο χαρτοφυλάκιο θα σας επέτρεπε να αντισταθμίσετε το παράγωγο που πουλήσατε τη στιγμή h και θα είχατε ένα καθαρό κέρδος με παρούσα αξία $P_0 - u_0$ χωρίς κίνδυνο. Είναι ακόμα πιο εύκολο να δείτε ότι αν $P_0 < V_0$, μπορείτε να κατασκευάσετε μια στρατηγική επιτηδειότητας αγοράζοντας το αμερικανικό παράγωγο. Τέλος, μπορείτε να ελέγξετε ότι, αν $P_0 = V_0$, δεν υπάρχει στρατηγική επιτηδειότητας ούτε για τον αγοραστή ούτε για τον πωλητή του παραγώγου. Θα το δούμε αυτό άλλωστε στην τελευταία παράγραφο σε πιο γενικό πλαίσιο.

Στο διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων, ένα αμερικανικό παράγωγο μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή από τις $t_0, t_1, \ldots, t_N$, αποδίδοντας στον κάτοχό του Y_k, αν ασκηθεί τη στιγμή t_k. Η $\{Y_k\}_{0 \leq k \leq N}$ ονομάζεται *εγγενής αξία* (intrinsic value) του αμερικανικού δικαιώματος. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N$ η Y_k είναι μια $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή, δηλαδή η απόδοση του αμερικανικού παραγώγου τη στιγμή που ασκείται εξαρτάται μόνο από το παρελθόν του χρόνου που ασκείται. Όποτε χρειάζεται, θα το υπενθυμίζουμε αυτό γράφοντας

$$Y_k = Y_k(S_0, S_1, \ldots, S_k),$$

όπου με S_k συμβολίζουμε την τιμή του πρωτογενούς προϊόντος τη στιγμή $t_k = kh$. Για παράδειγμα, η εγγενής αξία ενός αμερικανικού δικαιώματος πώλησης με τιμή άσκησης K είναι $Y_k = K - S_k$.

Αν ένα αμερικανικό δικαίωμα δεν ασκηθεί μέχρι την ωρίμανση, η αξία του θα είναι τότε $V_N = Y_N^+ = Y_N \vee 0$. Αυτό συμβαίνει γιατί ο λογικός επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμα στην τελευταία ευκαιρία που έχει να το κάνει, αν και μόνο αν αυτό έχει θετική εσωτερική αξία. Μία περίοδο πριν την ωρίμανση, τη χρονική στιγμή t_{N-1}, ένα αμερικανικό παράγωγο που δεν έχει ασκηθεί μέχρι τότε είναι στην ουσία ένα αμερικανικό παράγωγο στο διωνυμικό υπόδειγμα μιας περιόδου, όπως αυτό που εξετάσαμε. Η μόνη διαφορά που υπάρχει είναι ότι οι παράμετροι του προβλήματος εξαρτώνται από την ιστορία της αγοράς μέχρι εκείνη τη στιγμή, είναι δηλαδή $\mathcal{F}_{N-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές.

Η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_{N-1} και την επόμενη περίοδο (στην ωρίμανση) πρόκειται να είναι είτε $S_{N-1}u_{N-1}$ είτε $S_{N-1}d_{N-1}$. Το αμερικανικό δικαίωμα έχει εσωτερική αξία Y_{N-1}. Αν δεν ασκηθεί, στην ωρίμανση θα έχει απόδοση είτε $V_N^{\uparrow} = Y_N(S_0, \ldots, S_{N-1}, S_{N-1}u_{N-1})$, αν η αξία του πρωτογενούς προϊόντος γίνει $S_{N-1}u_{N-1}$, είτε $V_N^{\downarrow} = Y_N(S_0, \ldots, S_{N-1}, S_{N-1}d_{N-1})$, αν η αξία του πρωτογενούς προϊόντος γίνει $S_{N-1}d_{N-1}$. Προκειμένου ο κάτοχος του δικαιώματος να αποφασίσει αν θα το ασκήσει τη στιγμή t_{N-1} ή αν τον συμφέρει να περιμένει μέχρι την ωρίμανση, θα πρέπει να συγκρίνει την εσωτερική αξία του παραγώγου Y_{N-1} με την αξία που θα έχει το παράγωγο αν δεν ασκηθεί. Αυτή όμως μπορεί να υπολογιστεί, αφού μπορούμε να φτιάξουμε ένα χαρτοφυλάκιο $(\alpha_{N-1}, \beta_{N-1})$, το οποίο τη στιγμή t_N θα έχει την ίδια απόδοση με το παράγωγο, ακριβώς όπως κάναμε στο Κεφάλαιο 3. Η αξία του παραγώγου, αν δεν ασκηθεί, θα είναι επομένως

$$U_{N-1} = e^{-rh}\big(q_{N-1}V_N^{\uparrow} + (1 - q_{N-1})V_N^{\downarrow}\big) = e^{-rh}\mathbb{E}\big[V_N \,\big|\, \mathcal{F}_{N-1}\big].$$

Αν $Y_{N-1} \geq U_{N-1}$, είναι λογικό ο κάτοχος του αμερικανικού δικαιώματος να το ασκήσει τη χρονική στιγμή t_{N-1}, ενώ, αν $Y_{N-1} < U_{N-1}$, είναι λογικό ο κάτοχος του δικαιώματος να περιμένει μέχρι την ωρίμανση. Προσέξτε όμως ότι οι Y_{N-1}, U_{N-1} είναι $\mathcal{F}_{N-1}$ μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές. Επομένως, μπορεί να εξαρτώνται από την ιστορία της αγοράς μέχρι και τη στιγμή t_{N-1} και είναι εν γένει διαφορετικές ανάμεσα στους κόμβους του διωνυμικού δέντρου που αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή t_{N-1}. Αυτό σημαίνει ότι σε κάποιους από αυτούς τους κόμβους ενδέχεται να συμφέρει τον κάτοχο του δικαιώματος να ασκήσει άμεσα, ενώ σε κάποιους άλλους ενδέχεται να τον συμφέρει να περιμένει.

Ορίζουμε τώρα

$$V_{N-1} = Y_{N-1} \vee e^{-rh}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[V_N \,\big|\, \mathcal{F}_{N-1}\big],$$

η οποία είναι μια $\mathcal{F}_{N-1}$ μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε τώρα να εργαστούμε για τους κόμβους που αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή t_{N-2}, να ορίσουμε την V_{N-2} και τελικά, οπισθοδρομώντας με ανάλογο τρόπο, να ορίσουμε τις V_k, για $k = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$.

Ο αλγόριθμος που περιγράφει αυτή τη διαδικασία είναι ο εξής.

- Ορίζουμε $U_N = 0$ και $V_N = Y_N \vee U_N = Y_N^+(S_0, \ldots, S_N)$.
- Για $k = N, N-1, \ldots, 1$, έχοντας ορίσει την $V_k = V_k(S_0, \ldots, S_{k-1}, S_k) \geq 0$
  1. βρίσκουμε χαρτοφυλάκιο $(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})$ ώστε οι $\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}$ να είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές και
  $$\alpha_{k-1}S_k + \beta_{k-1}e^{rkh} = V_k. \tag{5.1}$$
  2. βρίσκουμε την αξία του χαρτοφυλακίου $(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1})$
  $$\begin{aligned} U_{k-1} = U_{k-1}(S_0, \ldots, S_{k-1}) &:= \alpha_{k-1}S_{k-1} + \beta_{k-1}e^{r(k-1)h} & (5.2)\\ &= e^{-rh}\big(q_{k-1}V_k^{\uparrow} + (1-q_{k-1})V_k^{\downarrow}\big) = e^{-rh}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[V_k \,\big|\, \mathcal{F}_{k-1}\big] \geq 0. & (5.3)\end{aligned}$$
  3. Συγκρίνουμε την U_{k-1} με την εσωτερική αξία του αμερικανικού παραγώγου Y_{k-1} και ορίζουμε
  $$V_{k-1} = Y_{k-1} \vee U_{k-1} = U_{k-1} + (Y_{k-1} - U_{k-1})^+ \tag{5.4}$$
- Για $k = 0, 1, \ldots, N-1$, ορίζουμε το χαρτοφυλάκιο (ϕ_k, ψ_k) ως

$$\phi_k = \alpha_k, \qquad \psi_k = \beta_k + \sum_{j=0}^{k}(Y_j - U_j)^+ e^{-rjh}. \tag{5.5}$$

Λήμμα 1 Το χαρτοφυλάκιο $\{(\phi_k, \psi_k)\}_{0\leq k\leq N-1}$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και η αξία του τη χρονική στιγμή t_k δίνεται από την

$$V_k^{\phi} = V_k + \sum_{j=0}^{k-1}(Y_j - U_j)^+ e^{r(k-j)h}. \tag{5.6}$$

Απόδειξη: Εφόσον οι $Y_k, U_k, \alpha_k, \beta_k$ είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N-1$, οι ϕ_k, ψ_k θα είναι ομοίως $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες από τον ορισμό τους. Η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t_k είναι

$$\begin{aligned} V_k^{\phi} = \phi_k S_k + \psi_k e^{rkh} &= \alpha_k S_k + \beta_k e^{rkh} + \sum_{j=0}^{k}(Y_j - U_j)^+ e^{r(k-j)h}\\ &= U_k + \sum_{j=0}^{k-1}(Y_j - U_j)^+ e^{r(k-j)h} + (Y_k - U_k)^+\\ &= V_k + \sum_{j=0}^{k-1}(Y_j - U_j)^+ e^{r(k-j)h}.\end{aligned}$$

Η προτελευταία ισότητα προκύπτει από την (5.2) και η τελευταία από την (5.4). Για να δείξουμε ότι το χαρτοφυλάκιο $\{(\phi_k,\psi_k)\}_{0\le k\le N-1}$ δεν αλλάζει αξία όταν αλλάζουμε θέση, παρατηρούμε ότι κατά την αλλαγή θέσης τη χρονική στιγμή t_k, από (ϕ_{k-1},ψ_{k-1}) σε (ϕ_k,ψ_k) έχουμε

$$\begin{aligned}\phi_{k-1}S_k+\psi_{k-1}e^{rkh} &= \alpha_{k-1}S_k+\beta_{k-1}e^{rkh}+\sum_{j=0}^{k-1}(Y_j-U_j)^+e^{r(k-j)h}\\ &= V_k+\sum_{j=0}^{k-1}(Y_j-U_j)^+e^{r(k-j)h}\\ &= V_k^{\phi},\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει από την (5.1) και η τελευταία ισότητα από το πρώτο μέρος της απόδειξης. □

Στο υπόλοιπο αυτού του Κεφαλαίου θα αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

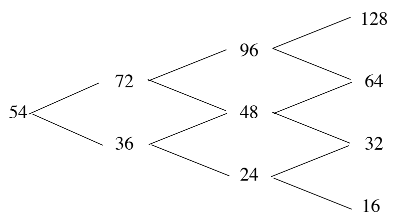
Θεώρημα 14 α) Η μόνη αρχική αξία για το αμερικάνικο δικαίωμα με εσωτερική αξία $\{Y_k\}_{0\le k\le N}$ η οποία δεν επιτρέπει στρατηγικές επιτηδειότητας είναι η V_0 που προσδιορίζεται από τον αλγόριθμο.
β) Η βέλτιστη περίοδος άσκησης του δικαιώματος είναι η

$$k_*=\inf\big\{k: Y_k\ge U_k=e^{-rh}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[V_{k+1}\,\big|\,\mathcal{F}_k\big]\big\}. \tag{5.7}$$

γ) Η στρατηγική αντιστάθμισης του αμερικανικού δικαιώματος από τον πωλητή του δίνεται από το χαρτοφυλάκιο $\{(\phi_k,\psi_k)\}_{0\le k\le N-1}$.

Παρατήρηση 14 Παρατηρήστε ότι η βέλτιστη πολιτική άσκησης για τον κάτοχο του αμερικανικού δικαιώματος είναι να περιμένει μέχρι τη στιγμή που η εσωτερική αξία του δικαιώματος είναι τουλάχιστον όση η αναμενόμενη (ως προς το μέτρο martingale $\mathbb{Q}$) αξία του δικαιώματος την αμέσως επόμενη περίοδο.

Παράδειγμα 21 Ας δούμε πώς μπορούμε να τιμολογήσουμε ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης 56, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε. Η δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος περιγράφεται από το παρακάτω διωνυμικό υπόδειγμα και $e^{rh}=\frac{10}{9}$.



Ξεκινάμε προσδιορίζοντας την αξία V_3 του παραγώγου, αν αυτό δεν ασκηθεί μέχρι την ωρίμανση. Αν $S_3=128$ ή $S_3=64$ το δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης 56 έχει αρνητική εσωτερική αξία, επομένως δεν θα ασκηθεί ούτε στην ωρίμανση. Αντίθετα, αν $S_3=32$ ή $S_3=16$, το δικαίωμα θα ασκηθεί στην ωρίμανση. Επομένως,

$$V_3\big(\{S_3=128\}\big)=V_3\big(\{S_3=64\}\big)=0,\ V_3\big(\{S_3=32\}\big)=56-32=24,\ V_3\big(\{S_3=16\}\big)=56-16=40.$$

Συνεχίζουμε προσδιορίζοντας το χαρτοφυλάκιο (α_2,β_2) που αναπαράγει την V_3 στην ωρίμανση.

$$\alpha_2\big(\{S_2=24\}\big)=\frac{24-40}{32-16}=-1,\quad \beta_2\big(\{S_2=24\}\big)=\left(\frac{9}{10}\right)^3\frac{40\times 32-24\times 16}{32-16}=\left(\frac{9}{10}\right)^3 56.$$

Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t = 2$ είναι $(-1) \times 24 + \frac{9}{10} \times 56 = 26,4$, δηλαδή

$$U_2\big(\{S_2 = 24\}\big) = 26,4.$$

Η εσωτερική αξία του δικαιώματος όταν $S_2 = 24$ είναι

$$Y_2\big(\{S_2 = 24\}\big) = 56 - 24 = 32 > 26,4.$$

Επομένως,

$$V_2\big(\{S_2 = 24\}\big) = 32.$$

Στο ενδεχόμενο $\{S_2 = 48\}$ έχουμε

$$\alpha_2\big(\{S_2 = 48\}\big) = \frac{0 - 24}{64 - 32} = -\frac{3}{4}, \quad \beta_2\big(\{S_2 = 48\}\big) = \left(\frac{9}{10}\right)^3 \frac{24 \times 64 - 0 \times 32}{64 - 32} = \left(\frac{9}{10}\right)^3 48.$$

Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t = 2$ είναι $(-\frac{3}{4}) \times 48 + \frac{9}{10} \times 48 = 7,2$, δηλαδή

$$U_2\big(\{S_2 = 48\}\big) = 7,2.$$

Η εσωτερική αξία του δικαιώματος όταν $S_2 = 48$ είναι

$$Y_2\big(\{S_2 = 48\}\big) = 56 - 48 = 8 > 7,2.$$

Επομένως,

$$V_2\big(\{S_2 = 48\}\big) = 8.$$

Στο ενδεχόμενο $\{S_2 = 96\}$ έχουμε $\alpha_2\big(\{S_2 = 96\}\big) = \beta_2\big(\{S_2 = 96\}\big) = 0$ και $U_2\big(\{S_2 = 96\}\big) = 0$. Η εσωτερική αξία του δικαιώματος όταν $S_2 = 96$ είναι $Y_2\big(\{S_2 = 96\}\big) = 56 - 96 = -40 < 0$. Επομένως,

$$V_2\big(\{S_2 = 96\}\big) = 0.$$

Έχοντας βρει την τυχαία μεταβλητή V_2, θα προσδιορίσουμε ένα χαρτοφυλάκιο (α_1, β_1) που αναπαράγει την V_2 τη στιγμή $t = 2$.

$$\alpha_1\big(\{S_1 = 36\}\big) = \frac{8 - 32}{48 - 24} = -1, \quad \beta_1\big(\{S_1 = 36\}\big) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{32 \times 48 - 8 \times 24}{48 - 24} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 56.$$

Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t = 1$είναι $(-1) \times 36 + \frac{9}{10} \times 56 = 14,4$, δηλαδή

$$U_1\big(\{S_1 = 36\}\big) = 14,4.$$

Η εσωτερική αξία του δικαιώματος όταν $S_1 = 36$ είναι

$$Y_1\big(\{S_1 = 36\}\big) = 56 - 36 = 20 > 14,4.$$

Επομένως,

$$V_1\big(\{S_1 = 36\}\big) = 20.$$

Στο ενδεχόμενο $\{S_1 = 72\}$ έχουμε

$$\alpha_1\big(\{S_1 = 72\}\big) = \frac{0 - 8}{96 - 48} = -\frac{1}{6}, \quad \beta_1\big(\{S_1 = 72\}\big) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{8 \times 96 - 0 \times 48}{96 - 48} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 16.$$

Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t = 1$ είναι $-\frac{1}{6}) \times 72 + \frac{9}{10} \times 16 = 2,4$, δηλαδή

$$U_1\big(\{S_1 = 72\}\big) = 2,4.$$

Η εσωτερική αξία του δικαιώματος όταν $S_1 = 72$ είναι

$$Y_1\big(\{S_1 = 72\}\big) = 56 - 72 = -16 < 2,4.$$

Επομένως,

$$V_1\big(\{S_1 = 72\}\big) = 2,4.$$

Έχοντας βρει την τυχαία μεταβλητή V_1, θα προσδιορίσουμε ένα χαρτοφυλάκιο (α_0, β_0) που αναπαράγει την V_1 τη στιγμή $t = 1$.

$$\alpha_0 = \frac{2,4 - 20}{72 - 36} = -\frac{22}{45}, \quad \beta_0 = \frac{9}{10}\frac{20 \times 72 - 2,4 \times 36}{72 - 36} = \frac{9}{10} \times 37,6.$$

Η αξία αυτού του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t = 0$είναι $-\frac{22}{45} \times 54 + \frac{9}{10} \times 37,6 = 7,44$, δηλαδή

$$U_0 = 7,44.$$

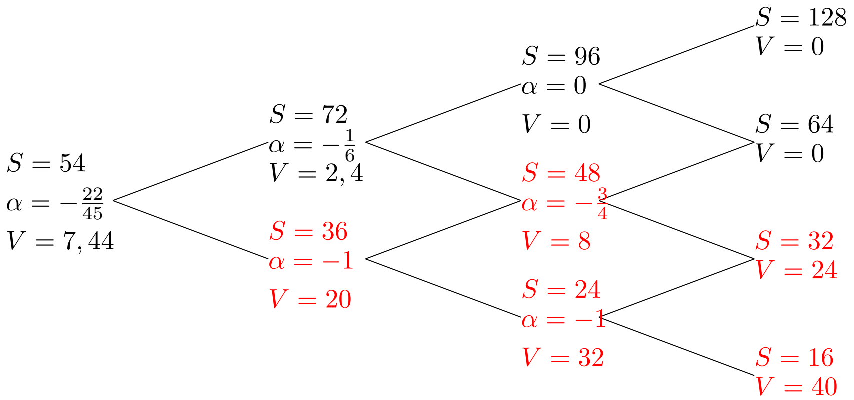
Η εσωτερική αξία του δικαιώματος όταν $t = 0$ είναι

$$Y_0 = 56 - 54 = 2 < 7,44.$$

Επομένως,

$$V_0 = 7,44.$$

Ο αλγόριθμος φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω δέντρο. Με κόκκινο χρώμα έχουμε σημειώσει τους κόμβους στους οποίους η εσωτερική αξία του δικαιώματος είναι μεγαλύτερη από την αξία του, αν αυτό δεν ασκηθεί. Σε κόμβους με κόκκινο χρώμα ο κάτοχος του αμερικανικού δικαιώματος θα επέλεγε να ασκήσει το δικαίωμά του.



Η βέλτιστη στρατηγική άσκησης του δικαιώματος είναι η εξής:

- Να μην ασκήσουμε το δικαίωμα τη στιγμή $t = 0$
- Τη στιγμή $t = 1$ να ασκήσουμε το δικαίωμα, αν $S_1 = 36$ αλλά να μην το ασκήσουμε, αν $S_1 = 72$
- Τη στιγμή $t = 2$ να ασκήσουμε το δικαίωμα, αν $S_2 = 48$ αλλά να μην το ασκήσουμε, αν $S_2 = 96$
- Να μην ασκήσουμε το δικαίωμα στην ωρίμανση.

Παρατήρηση 15 Προσέξτε ότι, προκειμένου να αποφασίσει ο κάτοχος του δικαιώματος αν θα ασκήσει το δικαίωμά του τη στιγμή t_k, θα πρέπει να συγκρίνει δύο $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή δύο μεταβλητές που η τιμή τους εξαρτάται μόνο από τις τιμές του πρωτογενούς προϊόντος μέχρι τον χρόνο t_k. Αυτό είναι κάτι που μπορεί να κάνει, έχοντας παρακολουθήσει την ιστορία της αγοράς μέχρι τη στιγμή t_k που αποφασίζει. Η βέλτιστη περίοδος διακοπής k_* είναι μια τυχαία μεταβλητή. Ανάλογα με την εξέλιξη της αγοράς ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να αποφασίσει να ασκήσει το δικαίωμά του σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Όπως είδαμε όμως, η απόφασή του αν θα σταματήσει ή όχι, βασίζεται μόνο σε ό,τι έχει συμβεί μέχρι τότε και όχι σε ό,τι πρόκειται να συμβεί στο μέλλον. Η k_* είναι ένα παράδειγμα *χρόνου διακοπής* (stopping time), μια έννοια με την οποία θα ασχοληθούμε στην επόμενη παράγραφο.

5.3 Χρόνοι διακοπής

Ορισμός: Θα λέμε ότι ένα ενδεχόμενο A ανήκει στην οικογένεια ενδεχομένων $\mathcal{F}_k$, αν η δείκτρια συνάρτηση του A,

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega \in A \\ 0 & \text{αν } \omega \notin A \end{cases},$$

είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμη.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, ένα ενδεχόμενο A ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_k$, αν αρκεί να ξέρουμε τις τιμές των $S_0, S_{t_1}, \ldots, S_{t_k}$, προκειμένου να αποφασίσουμε ότι συμβαίνει.

Πρόταση 8 Οι οικογένειες ενδεχομένων $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ έχουν τις παρακάτω ιδιότητες.

1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.
2. $\Omega \in \mathcal{F}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.
3. Αν $A \in \mathcal{F}_n$, τότε $A^c \in \mathcal{F}_n$.
4. Αν $A, B \in \mathcal{F}_n$, τότε $A \cap B \in \mathcal{F}_n$.
5. Αν $A, B \in \mathcal{F}_n$, τότε $A \cup B \in \mathcal{F}_n$.

Απόδειξη: Η (1) είναι προφανής, αφού μια συνάρτηση των $S_0, \ldots, S_{t_n}$ είναι και συνάρτηση των $S_0, \ldots, S_{t_{n+1}}$, που δεν εξαρτάται από την τελευταία μεταβλητή. Για την (2) παρατηρήστε ότι η $\mathbb{1}_\Omega$ είναι σταθερή και ίση με 1, επομένως είναι (με τετριμμένο τρόπο) συνάρτηση των $S_0, \ldots, S_{t_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Η (3) ισχύει γιατί $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$, ενώ η (4) γιατί $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$. Τέλος, η (5) προκύπτει από την ταυτότητα $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$και τις ιδιότητες (3) και (4) που ήδη αποδείξαμε. □

Ορισμός: Θα λέμε μια τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *χρόνο διακοπής* (stopping time) της $\{S_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, το ενδεχόμενο $\{T = n\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_n$.

Μπορούμε να φανταζόμαστε έναν χρόνο διακοπής της $\{S_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια στρατηγική σταματήματος η οποία απαγορεύεται να δει το μέλλον. Η στρατηγική αυτή μπορεί να εξαρτάται από την τροχιά του πρωτογενούς προϊόντος (αφού ένας χρόνος διακοπής είναι μια τυχαία μεταβλητή), αλλά ο ορισμός επιβάλλει ότι η απόφαση για το αν θα σταματήσουμε τη στιγμή n ή όχι μπορεί να εξαρτάται μόνο από τις $S_0, \ldots, S_{t_n}$ και όχι από τις μετέπειτα τιμές του πρωτογενούς προϊόντος.

Παράδειγμα 22 Οι σταθεροί χρόνοι είναι χρόνοι διακοπής, δηλαδή ο $T : \Omega \to \mathbb{N}_0$ με $T(\omega) = N$ για κάθε $\omega \in \Omega$ είναι χρόνος διακοπής. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε

$$\{T = n\} = \begin{cases} \Omega & \text{αν } n = N \\ \emptyset & \text{αν } n \neq N. \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση, έχουμε $\Omega \in \mathcal{F}_n$ και $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}_n$.

Παράδειγμα 23 Αν $A \subset \mathbb{R}_+$, τότε ο *χρόνος πρώτης άφιξης* (hitting time) στο A,

$$T_A = \inf\{k \geq 0 : S_{t_k} \in A\}$$

είναι χρόνος διακοπής της $\{S_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Πράγματι, $\{T_A = 0\} = \{S_0 \in A\} \in \mathcal{F}_0$, ενώ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\{T_A = n\} = \{S_0 \in A^c\} \cap \cdots \cap \{S_{t_{n-1}} \in A^c\} \cap \{S_{t_n} \in A\}.$$

Προφανώς, $\{S_{t_n} \in A\} \in \mathcal{F}_n$, ενώ για $k = 0, \ldots, n-1$ έχουμε $\{S_{t_k} \in A^c\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$. Εφόσον η $\mathcal{F}_n$ είναι κλειστή ως προς τις τομές, έχουμε ότι $\{T_A = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Παράδειγμα 24 Ο χρόνος k_* της (5.7) είναι χρόνος διακοπής. Πράγματι,

$$\{k_* = n\} = \Big(\bigcap_{j=0}^{n-1}\{Y_j < U_j\}\Big) \cap \{Y_n \geq U_n\}.$$

Όμως οι Y_k, U_k είναι $\mathcal{F}_k$-μετρήσιμες, επομένως για $k = 0, 1, \ldots, n-1$ τα ενδεχόμενα $\{Y_k < U_k\}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, ενώ για τον ίδιο λόγο $\{Y_n \geq U_n\} \in \mathcal{F}_n$.

Το ακόλουθο λήμμα προσφέρει έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό των χρόνων διακοπής, που είναι συχνά χρήσιμος.

Λήμμα 2 Η τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ είναι χρόνος διακοπής, αν και μόνο αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, το ενδεχόμενο $\{T \leq n\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_n$.

Απόδειξη: Έστω ότι ο T είναι χρόνος διακοπής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ έχουμε

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n}\{T = k\}.$$

Όμως $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ για $k = 0, 1, \ldots, n$. Εφόσον η $\mathcal{F}_n$ είναι κλειστή ως προς τις ενώσεις, έχουμε ότι $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Έχουμε $\{T = 0\} = \{T \leq 0\} \in \mathcal{F}_0$, ενώ για $n \in \mathbb{N}$

$$\{T = n\} = \{T \leq n\} \cap \{T \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_n,$$

αφού όλες οι $\mathcal{F}_n$ είναι κλειστές ως προς συμπληρώματα και τομές. Επομένως ο T είναι χρόνος διακοπής.

Πόρισμα 2 Αν οι T, S είναι χρόνοι διακοπής, τότε οι $T \wedge S$, με $(T \wedge S)(\omega) = \min\{T(\omega), S(\omega)\}$ και $T \vee S$, με $(T \vee S)(\omega) = \max\{T(\omega), S(\omega)\}$, είναι κι αυτοί χρόνοι διακοπής.

Απόδειξη: Ο ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 2 και την κλειστότητα της $\mathcal{F}_n$ σε ενώσεις και τομές, αφού

$$\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\} \qquad \text{και} \qquad \{T \vee S \leq n\} = \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}. \qquad \square$$

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η αναμενόμενη τιμή μιας martingale είναι η ίδια σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $n \in \mathbb{N}_0$. Ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα είναι ότι η παραπάνω ιδιότητα παραμένει σε ισχύ, ακόμα κι αν αυτή η χρονική στιγμή είναι ένας φραγμένος χρόνος διακοπής.

Θεώρημα 15 [επιλεκτικής διακοπής (optional stopping)] Αν η διαδικασία $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι $\mathcal{F}_n$-martingale και ο τυχαίος χρόνος T είναι φραγμένος χρόνος διακοπής της $\{S_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, τότε

$$\mathbb{E}\big[V_T\big] = \mathbb{E}\big[V_0\big].$$

Απόδειξη: Έστω N ένα άνω φράγμα του χρόνου T. Έχουμε τότε ότι $1 = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}\{T = k\}$ και

$$\mathbb{E}\big[V_T\big] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\big[V_T \mathbb{1}\{T = k\}\big] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\big[V_k \mathbb{1}\{T = k\}\big]. \tag{5.8}$$

Από το Θεώρημα 9 έχουμε ότι $\mathbb{E}\big[V_N \,\big|\, \mathcal{F}_k\big] = V_k$, για $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Εφόσον ο T είναι χρόνος διακοπής, η $\mathbb{1}\{T = k\}$ εξαρτάται μόνο από τις $S_0, \ldots, S_{t_k}$. Επομένως, από το Θεώρημα 7 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\big[V_N \mathbb{1}\{T = k\}\big] = \mathbb{E}\big[V_k \mathbb{1}\{T = k\}\big].$$

Αντικαθιστώντας το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης στην (5.8) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\big[V_T\big] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\big[V_N \mathbb{1}\{T = k\}\big] = \mathbb{E}\big[V_N\big] = \mathbb{E}\big[V_0\big],$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει πάλι από το Θεώρημα 9. □

Είδαμε ότι η προεξοφλημένη αξία οποιουδήποτε αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου είναι martingale ως προς το μέτρο martingale $\mathbb{Q}$. Στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής για να αποδείξουμε το Θεώρημα 14.

5.4 Η βέλτιστη στρατηγική άσκησης

Σ' αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε το Θεώρημα 14. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τα επόμενα δύο λήμματα.

Λήμμα 3 Έστω k_* ο χρόνος διακοπής της (5.7). Η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου $\{(\phi_k, \psi_k)\}_k$ της (5.5) δίνεται από τη σχέση

$$V_0 = V_0^{\phi} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-r\tau_*} Y_{\tau*}^{+}\big], \tag{5.9}$$

όπου $\tau_* = k_* \wedge N$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 1 το χαρτοφυλάκιο $\{(\phi_k, \psi_k)\}_k$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και από το Θεώρημα 12 η προεξοφλημένη αξία του

$$M_k = e^{-rkh} V_k^{\phi}$$

είναι martingale. Είδαμε στο Παράδειγμα 24 ότι ο χρόνος $k_* = \inf\{k \geq 0 : Y_k \geq U_k\}$ είναι χρόνος διακοπής. Από το Παράδειγμα 22 και το Πόρισμα 2 ο τ_* είναι ένας φραγμένος χρόνος διακοπής. Επομένως, από το Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής (15) έχουμε

$$V_0^{\phi} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[M_{\tau_*}\big] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau_*} V_{\tau_*}^{\phi}\big]. \tag{5.10}$$

Επιπλέον, από την (5.6) βλέπουμε ότι

$$V_k^{\phi} = V_k, \quad \text{αν } k_* \geq k$$

και συμπεραίνουμε ότι $V_{\tau_*}^{\phi} = V_{\tau_*}$. Μπορούμε λοιπόν να ξαναγράψουμε την (5.10) ως

$$V_0^{\phi} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau_*} V_{\tau_*}\big].$$

Αν $\tau_* = N$, έχουμε $V_{\tau_*} = V_N = Y_N^+ = Y_{\tau_*}^+$. Αν $\tau_* < N$, έχουμε ότι $\tau_* = k_*$ και $V_{k_*} = Y_{k_*} \vee U_{k_*} = Y_{k_*} = Y_{k_*}^+$, αφού $0 \leq U_{k_*} \leq Y_{k_*}$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε λοιπόν ότι $V_{\tau_*} = Y_{\tau_*}^+$ και ο ισχυρισμός προκύπτει από την προηγούμενη εξίσωση. □

Παράδειγμα 25 Στο Παράδειγμα 21 έχουμε $Y_{\tau_*}^+ > 0$ μόνο στα ενδεχόμενα $\{S_1 = 36\}$ και $\{S_1 = 72,\, S_2 = 48\}$. Επιπλέον,

$$q = \frac{e^{rh} - d}{u - d} = \frac{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\mathbb{Q}\big[S_1 = 36\big] = 1 - q = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \mathbb{Q}\big[S_1 = 72,\, S_2 = 48\big] = q(1-q) = \frac{2}{9}.$$

Επομένως,

$$V_0 = \frac{1}{3} \times \frac{9}{10}(56 - 36) + \frac{2}{9} \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 (56 - 48) = 6 + 1,44 = 7,44. \qquad \square$$

Λήμμα 4 Έστω τ χρόνος διακοπής της $\{S_{t_k}\}_k$ με $\tau \leq N$. Τότε

$$V_0^{\phi} \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau}Y_\tau^+\big].$$

Απόδειξη: Από τη σχέση (5.6) έχουμε ότι $V_k^{\phi} \geq V_k$ για κάθε $k \leq N$. Επιπλέον, εφόσον $U_k \geq 0$ έχουμε ότι $V_k = Y_k \vee U_k \geq Y_k^+$. Άρα,

$$V_\tau^{\phi} \geq Y_\tau^+. \tag{5.11}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με $e^{-rh\tau}$ και παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή των δύο μελών ως προς το $\mathbb{Q}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau}V_\tau^{\phi}\big] \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau}Y_\tau^+\big].$$

Από το Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής το αριστερό μέλος ισούται με V_0^{ϕ} και ο ισχυρισμός έπεται. □

Παρατήρηση 16 Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα λήμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι,

$$V_0^{\phi} = \sup_{\tau \leq N} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau}Y_\tau^+\big]$$

και το supremum επιτυγχάνεται για τον χρόνο διακοπής $\tau_* = k_* \wedge N$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 14: α) Έστω P_0 η τιμή διαπραγμάτευσης του αμερικανικού δικαιώματος. Αν $P_0 > V_0$, ο πωλητής του δικαιώματος έχει ευκαιρία επιτηδειότητας. Πράγματι, αν χρησιμοποιήσει V_0 για να πάρει θετική θέση στο χαρτοφυλάκιο $\{(\phi_k, \psi_k)\}_{0 \leq k \leq N-1}$ και επενδύσει $P_0 - V_0$ χωρίς κίνδυνο, από την (5.11) φαίνεται ότι η αξία του χαρτοφυλακίου υπερκαλύπτει την αξίωση που μπορεί να εγείρει ο κάτοχος της θετικής θέσης στο αμερικανικό δικαίωμα. Επομένως, η θέση του πωλητή στην ωρίμανση θα αξίζει τουλάχιστον όσο το ποσό που αυτός έχει επενδύσει χωρίς κίνδυνο.

Αν $P_0 < V_0$, ο αγοραστής του δικαιώματος έχει ευκαιρία επιτηδειότητας. Θα μπορούσε να πάρει αρνητική θέση στο χαρτοφυλάκιο $\{(\phi_k, \psi_k)\}_{0 \leq k \leq N-1}$ και να εισπράξει V_0. Με αυτό το ποσόν θα μπορούσε να αγοράσει το αμερικανικό δικαίωμα, να επενδύσει $V_0 - P_0$ χωρίς κίνδυνο και να ακολουθήσει τη στρατηγική k_* για την άσκηση του δικαιώματος. Αν $k_* \leq N$, από την (5.6) παίρνουμε

$$V_{k_*}^{\phi} = V_{k_*} = Y_{k_*} \vee U_{k_*} = Y_{k_*},$$

οπότε από την άσκηση του δικαιώματος θα κάλυπτε την αρνητική θέση στο χαρτοφυλάκιο. Αν πάλι $k_* > N$, αυτό σημαίνει ότι $Y_N < 0$, οπότε η αξία του (ϕ_{N-1}, ψ_{N-1}) στην ωρίμανση θα ήταν $V_N = 0$. Σε κάθε περίπτωση, η θέση του στην ωρίμανση θα άξιζε τουλάχιστον όσο η επένδυση χωρίς κίνδυνο.

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι, αν $P_0 = V_0$, τότε ούτε ο αγοραστής ούτε ο πωλητής του δικαιώματος έχουν ευκαιρία επιτηδειότητας. Ο πωλητής του δικαιώματος θα είχε ευκαιρία επιτηδειότητας, αν μπορούσε με αρχικό κεφάλαιο V_0 να κατασκευάσει ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο A που του δίνει τη δυνατότητα κέρδους χωρίς κίνδυνο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε στρατηγική που θα μπορούσε να ακολουθήσει ο αγοραστής του αμερικανικού δικαιώματος, δηλαδή για κάθε χρόνο διακοπής τ, αν ορίσουμε

$$X = (V_\tau^A - Y_\tau)\mathbb{1}\{\tau \leq N\} + V_N^A \mathbb{1}\{\tau > N\} = V_{\tau \wedge N}^A - Y_\tau \mathbb{1}\{\tau \leq N\},$$

τότε

$$\mathbb{P}\big[X \geq 0\big] = 1 \quad \text{και} \quad \mathbb{P}\big[X > 0\big] > 0.$$

Εφόσον τα μέτρα $\mathbb{P}$ και $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμα θα είχαμε επίσης

$$\mathbb{Q}\big[X \geq 0\big] = 1 \quad \text{και} \quad \mathbb{Q}\big[X > 0\big] > 0 \Longrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau \wedge N}X\big] > 0.$$

Επομένως,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau\wedge N}V^A_{\tau\wedge N}\big] > \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau}Y_\tau \mathbb{1}\{\tau \le N\}\big].$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης ισούται με V_0^A από το Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής. Από το Λήμμα 5.9, επιλέγοντας $\tau = k_*$, το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης ισούται με V_0. Επομένως, θα είχαμε $V_0^A > V_0$.

Ο αγοραστής του δικαιώματος θα είχε ευκαιρία επιτηδειότητας, αν μπορούσε να πάρει θέση σε ένα χαρτοφυλάκιο A με αρχική αξία $-V_0$ και να βρει έναν χρόνο διακοπής σ τέτοιον ώστε, αν

$$X = (V^A_\sigma + Y_\sigma)\mathbb{1}\{\sigma \le N\} + V^A_N \mathbb{1}\{\sigma > N\} = V^A_{\sigma\wedge N} + Y_\sigma \mathbb{1}\{\sigma \le N\},$$

να ισχύει

$$\mathbb{P}\big[X \ge 0\big] = 1 \quad \text{και} \quad \mathbb{P}\big[X > 0\big] > 0.$$

Θέτοντας $\tau = \sigma \wedge N$ έχουμε ότι

$$V^A_\tau + Y^+_\tau = (V^A_\sigma + Y^+_\sigma)\mathbb{1}\{\sigma \le N\} + (V^A_N + Y^+_N)\mathbb{1}\{\sigma > N\} \ge X.$$

Επομένως, αν ο αγοραστής του δικαιώματος είχε ευκαιρία επιτηδειότητας, θα υπήρχε χρόνος διακοπής $\tau \le N$ τέτοιος ώστε

$$\mathbb{P}\big[V^A_\tau + Y^+_\tau \ge 0\big] = 1 \quad \text{και} \quad \mathbb{P}\big[V^A_\tau + Y^+_\tau > 0\big] > 0.$$

Όπως πριν, τούτο συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau}V^A_\tau\big] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau}Y^+_\tau\big] > 0.$$

Από το Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής ο πρώτος προσθετέος ισούται με V_0^A και από το Λήμμα 4 ο δεύτερος προσθετέος είναι το πολύ ίσος με V_0. Επομένως, η προηγούμενη σχέση συνεπάγεται ότι $V_0^A + V_0 > 0$.

β) Από την (5.6), παρατηρώντας ότι $V_k - Y_k = Y_k \vee U_k - Y_k = (U_k - Y_k)^+$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, N$ έχουμε

$$V^\phi_k - Y_k = \sum_{j=0}^{k-1}(Y_j - U_j)^+ e^{rh(k-j)} + (U_k - Y_k)^+ \ge 0.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι, για οποιαδήποτε στρατηγική άσκησης τ έχουμε

$$Y_\tau \mathbb{1}\{\tau \le N\} \le V^\phi_{\tau\wedge N}. \tag{5.12}$$

Επομένως, η σημερινή αξία οποιασδήποτε στρατηγικής άσκησης του δικαιώματος δεν μπορεί να ξεπερνά την V_0^ϕ. Όταν $\tau = k_*$, έχουμε ισότητα στην (5.12) και $k_* > N \Longrightarrow V_N^\phi = 0$. Επομένως, η σημερινή αξία της k_* είναι V_0^ϕ.

γ) Από την (5.12) βλέπουμε ότι το χαρτοφυλάκιο $\{(\phi_k, \psi_k)\}_k$ εξουδετερώνει τον κίνδυνο από την πώληση του αμερικανικού δικαιώματος. Θα δείξουμε τώρα ότι, οποιοδήποτε αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο A έχει αυτήν την ιδιότητα θα πρέπει να έχει αρχική αξία μεγαλύτερη ή ίση με V_0^ϕ. Όπως και στην απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού, για κάθε χρόνο διακοπής τ έχουμε

$$\mathbb{P}\big[V^\phi_{\tau\wedge N} \ge Y_\tau \mathbb{1}\{\tau \le N\}\big] = 1 \Longrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau\wedge N}V^\phi_{\tau\wedge N}\big] \ge \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rh\tau}Y_\tau \mathbb{1}\{\tau \le N\}\big].$$

Από το Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι V_0^A, ενώ, επιλέγοντας $\tau = k_*$, το δεξί μέλος είναι ίσο με V_0^ϕ. □

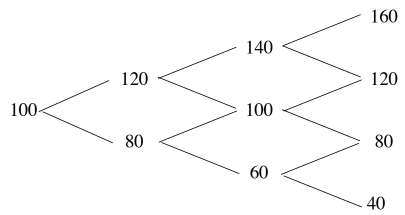
5.5 Ασκήσεις

Άσκηση 39 Για τη δυναμική μας μετοχής με $S_0 =$€86,40 θεωρήστε ένα διωνυμικό υπόδειγμα 3 περιόδων με $e^{rh} = 4/3,\ u = 5/3,\ d = 2/3$. Βάσει αυτού του υποδείγματος τιμολογήστε ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με ωρίμανση σε 3 περιόδους και τιμή άσκησης €86,40.

Άσκηση 40 Η τιμή μιας μετοχής είναι σήμερα 50. Σε καθένα από τα επόμενα δύο τρίμηνα αναμένεται να παρουσιάσει είτε 10% αύξηση είτε 10% μείωση. Το επιτόκιο ενός προϊόντος χωρίς κίνδυνο είναι 12% υπολογισμένο με συνεχή ανατοκισμό.
α) Ποια είναι η αξία ενός εξάμηνου αμερικανικού δικαιώματος πωλησης με τιμή άσκησης 52,50;
β) Κατασκευάστε μια στρατηγική επιτηδειότητας, αν η τρέχουσα τιμή διαπραγμάτευσης αυτού του δικαιώματος είναι 3,5.

Άσκηση 41 Για το υπόδειγμα της προηγούμενης άσκησης βρείτε τη μικρότερη τιμή άσκησης K, για την οποία η άμεση άσκηση του αμερικανικού δικαιώματος είναι η βέλτιστη στρατηγική για τον κάτοχό του. (Θα χρειαστεί να διακρίνετε αρκετές περιπτώσεις).

Άσκηση 42 Δίνεται το ακόλουθο δυωνυμικό υπόδειγμα για τη δυναμική μιας μετοχής.



Η κάθε περίοδος στο παραπάνω δέντρο αντιστοιχεί σε διάστημα τεσσάρων μηνών. Στην αγορά υπάρχει επίσης ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο 14,637% υπολογισμένο με συνεχή ανατοκισμό.
α) Τιμολογήστε ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης της μετοχής με ωρίμανση σε ένα έτος και τιμή άσκησης €100. Βρείτε τη βέλτιστη στρατηγική άσκησης για ένα κάτοχό του.
β) Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα αν το επιτόκιο είναι $r = 0$. Πώς ερμηνεύεται η απάντησή σας από το αποτέλεσμα της Άσκησης 15;

Άσκηση 43 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι $S_0 =$€80. Θα υποθέσουμε ότι σε καθένα από τα επόμενα τρία εξάμηνα η τιμή της είτε θα ανέβει κατά 10% είτε θα κατέβει κατά 5%. Στην αγορά υπάρχει επίσης ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με απόδοση 5% ανά εξάμηνο, ενώ είναι γνωστό ότι η μετοχή δεν θα αποδώσει μέρισμα στους επόμενους 18 μήνες.
α) Τιμολογήστε βάσει αυτού του υποδείγματος ένα αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με ωρίμανση έπειτα από $T = 18$ μήνες και τιμή άσκησης $K =$€82 και βρείτε τη βέλτιστη στρατηγική άσκησης του δικαιώματος για τον κάτοχό του.
β) Ποιο είναι το χαρτοφυλάκιο που πρέπει αρχικά να κατέχει ο πωλητής του δικαιώματος προκειμένου να αντισταθμίσει τον κίνδυνο από την πώλησή του και πώς πρέπει να αλλάξει την θέση του, αν μετά από έξι μήνες η αξία της μετοχής είναι €88;

Άσκηση 44 Στο υπόδειγμα της Άσκησης 39 τιμολογήστε ένα αμερικανικό δικαίωμα που αποδίδει στην άσκησή του $(100-\bar{S})^+$, όπου $\bar{S}$ είναι ο μέσος όρος των τιμών της μετοχής μέχρι την άσκηση του δικαιώματος.

Κεφάλαιο 6

Το μοντέλο Black & Scholes ως όριο διωνυμικών υποδειγμάτων

6.1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε διωνυμικά υποδείγματα για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος στο διάστημα $[0,T]$, όπου το πλήθος των περιόδων N είναι πολύ μεγάλο, ενώ η χρονική διάρκεια που αντιστοιχεί σε μια περίοδο είναι $h = T/N$. Θα δούμε ότι με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του μοντέλου, στο όριο , καθώς $N \to \infty$, η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει την αξία του πρωτογενούς προϊόντος συγκλίνει σε μια γεωμετρική κίνηση Brown. Αυτή η οριακή διαδικασία συνεχούς χρόνου είναι το μοντέλο που πρότειναν οι Black & Scholes. Θα δούμε επιπλέον ότι η ακολουθία των τιμών που παίρνουμε τιμολογώντας ένα παράγωγο σύμφωνα με όσα μάθαμε στα προηγούμενα κεφάλαια συγκλίνει και αυτή , καθώς το $N \to \infty$ και το όριό της είναι η αξία του παραγώγου, όπως υπολογίζεται από το μοντέλο των Black & Scholes. Παρόμοιο υλικό θα βρείτε και εδώ.

6.2 Το όριο κλίμακας (scaling limit) του διωνυμικού υποδείγματος

Ας θεωρήσουμε ένα διωνυμικό υπόδειγμα N περιόδων για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος στο χρονικό διάστημα $[0,T]$. Η κάθε περίοδος του μοντέλου αντιστοιχεί επομένως σε χρονική διάρκεια $h = T/N$. Εφόσον όπως είδαμε η παράμετρος p του διωνυμικού υποδείγματος δεν υπεισέρχεται στην τιμολόγηση παραγώγων, θα θεωρήσουμε ότι $p = 1/2$. Όταν το N είναι μεγάλο, το h είναι μικρό, είναι επομένως λογικό να επιλέξουμε τις παραμέτρους u, d του διωνυμικού υποδείγματος πολύ κοντά στο 1. Επιλέγουμε λοιπόν

$$u = u(h) = e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}} \qquad \text{και} \qquad d = d(h) = e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}}, \tag{6.1}$$

όπου μ και σ είναι θετικές παράμετροι. Με αυτή την επιλογή, αποκλείονται απότομες μεταβολές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος και δεν μπορούμε να δούμε στο όριο υποδείγματα συνεχούς χρόνου στα οποία η αξία του πρωτογενούς προϊόντος κάνει άλματα, όπως π.χ. οι διαδικασίες Lévy. Παρότι αυτά τα υποδείγματα είναι ενδιαφέροντα και είναι πιο γενικά από το υπόδειγμα Black & Scholes, η μελέτη τους ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των εισαγωγικών σημειώσεων.

Θα υποθέσουμε, όπως συνήθως, ότι στην αγορά μας είναι διαθέσιμο και ένα προϊόν χωρίς κίνδυνο με επιτόκιο r. Παρατηρήστε ότι, όταν το h είναι κατάλληλα μικρό, όταν δηλαδή το πλήθος N των περιόδων του υποδείγματος είναι κατάλληλα μεγάλο, οι περιορισμοί που επιβάλλει η αρχή της μη επιτηδειότητας,

$$e^{\mu h - \sigma\sqrt{h}} < e^{rh} < e^{\mu h + \sigma\sqrt{h}},$$

ικανοποιούνται για οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων μ, σ, r.

Σε αυτό το διωνυμικό υπόδειγμα, η αξία του πρωτογενούς περιγράφεται κατά τις χρονικές στιγμές

$$0 = t_0, t_1, \dots, t_N, \qquad \text{με } t_k = kh,$$

και έχουμε ότι

$$S_{t_k} = S_0 \prod_{i=1}^{k} \xi_k, \qquad k = 1, 2, \dots, N,$$

όπου οι $\{\xi_k\}_{0 \le k \le N}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες, τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες παίρνουν είτε την τιμή u, είτε την τιμή d, καθεμία με πιθανότητα $1/2$. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την προηγούμενη σχέση ως

$$E_{t_k} := \log\left(\frac{S_{t_k}}{S_0}\right) = \sum_{i=1}^{k} \log \xi_k = \sum_{i=1}^{k} \mu h + \sigma\sqrt{h} J_i = \mu t_k + \sigma\sqrt{h} \sum_{i=1}^{k} J_i, \tag{6.2}$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές $\{J_k\}_{1 \le k \le N}$ είναι ανεξάρτητες και παίρνουν τις τιμές ± 1 με πιθανότητα $1/2$. Επομένως, οι $\{J_k\}$ έχουν μέση τιμή ίση με μηδέν και διασπορά ίση με 1.

Θέλουμε να περάσουμε στο όριο, καθώς $N \to \infty$ και να εξετάσουμε την οριακή συμπεριφορά της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος. Έχουμε όμως το πρόβλημα ότι η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι ορισμένη για κάποιες μόνο χρονικές στιγμές στο διάστημα $[0, T]$. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα, επεκτείνουμε τον ορισμό της για κάθε $t \in [0, T]$ με γραμμική παρεμβολή των $\{E_{t_k}\}_k$ της σχέσης (6.2). Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε κάποια χρονική στιγμή $t \in [0, T]$, αυτή θα βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές φάσεις t_k, t_{k+1} του διακριτού διωνυμικού υποδείγματος με N περιόδους,

$$t_k \le t < t_{k+1} \Leftrightarrow kh \le t \le (k+1)h, \qquad \text{για } k = \left[\frac{tN}{T}\right] = \left[\frac{t}{h}\right].$$

Ορίζουμε τότε

$$E_t^{(h)} = E_{t_k} + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}(E_{t_{k+1}} - E_{t_k})$$

και από την (6.2) έχουμε

$$E_t^{(h)} = \mu t + \sigma\sqrt{h} \sum_{i=1}^{k} J_i + \frac{\sigma(t - t_k)}{\sqrt{h}} J_{k+1}, \qquad kh \le t < (k+1)h. \tag{6.3}$$

Επεκτείνουμε τέλος την αξία του πρωτογενούς προϊόντος για κάθε $t \in [0, T]$ ως

$$S_t^{(h)} = S_0 e^{E_t^{(h)}}.$$

Προκειμένου να κατανοήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $S_t^{(h)}$, καθώς $N \to \infty$ ($h \to 0$), θα χρειαστούμε τα τρία επόμενα λήμματα από τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Τα Λήμματα 5 και 6 είναι τα Θεωρήματα 4.4.2 και 4.4.6 αντίστοιχα στο [1]. Το Λήμμα 7 είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.

Λήμμα 5 Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X (συμβολίζουμε $X_N \xrightarrow{d} X$), αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση f έχουμε

$$\mathbb{E}\big[f(X_N)\big] \to \mathbb{E}\big[f(X)\big]. \tag{6.4}$$

Επιπλέον, αν $X_N \xrightarrow{d} X$ και η συνάρτηση f είναι φραγμένη και συνεχής έξω από ένα σύνολο A, τότε η (6.4) ισχύει με την προϋπόθεση $\mathbb{P}\big[X \in A\big] = 0$.

Λήμμα 6 Θεωρούμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $X_N \xrightarrow{d} X$, για κάποια τυχαία μεταβλητή X. Αν η $\{Y_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, τέτοια ώστε για κάποια σταθερά $\beta \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathbb{P}\big[\,|Y_N - \beta| > \epsilon\big] \to 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

και $\{\alpha_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ είναι μια πραγματική ακολουθία με $\lim \alpha_N = \alpha$, τότε

$$\alpha_N X_N + Y_N \xrightarrow{d} \alpha X + \beta.$$

Λήμμα 7 Αν $\{X_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και g είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε

$$X_N \xrightarrow{d} X \Longrightarrow g(X_N) \xrightarrow{d} g(X).$$

Ας ξαναγυρίσουμε τώρα στη σχέση (6.3). Εφόσον $t - t_k \le t_{k+1} - t_k \le h$, έχουμε ότι

$$\sup_{0\le t\le T} \Big|\frac{\sigma(t-t_k)}{\sqrt{h}} J_{k+1}\Big| \le \sigma\sqrt{h} \;\; \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \;\; 0. \tag{6.5}$$

Παρατηρήστε ακόμη ότι από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} J_i = \frac{1}{\big[\frac{t}{h}\big]} \sum_{i=1}^{[\frac{t}{h}]} J_i \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \qquad h \to 0. \tag{6.6}$$

Για κάθε $t \in [0,T]$, από το Λήμμα 6 έχουμε ότι

$$E_t^{(h)} \xrightarrow{d} \mu t + \sigma\sqrt{t} Z, \quad \text{με } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

και από το Λήμμα 7 ότι

$$S_t^{(h)} \xrightarrow{d} S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{t} Z}.$$

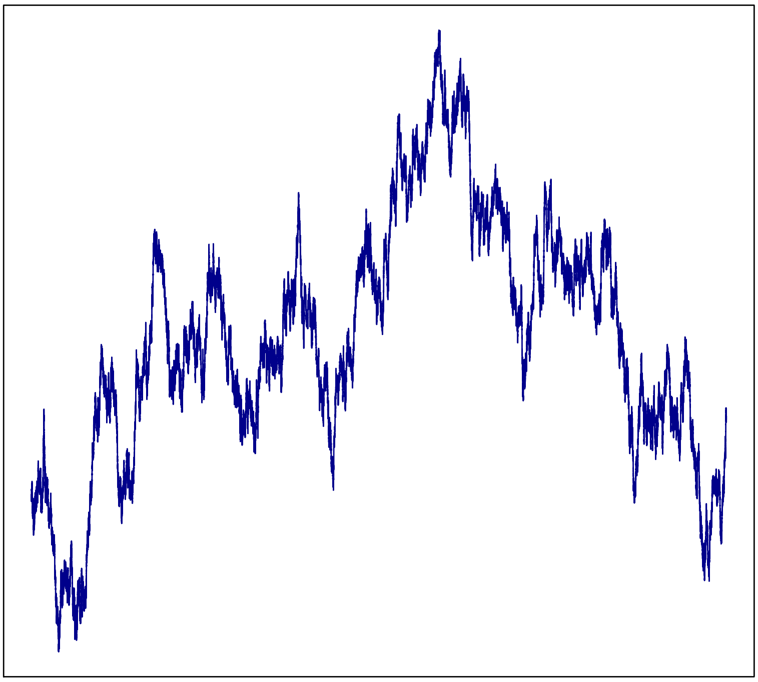
Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε χρονική στιγμή, η ασυμπτωτική κατανομή της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή. Από το Λήμμα 5 έχουμε ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\big[f\big(S_t^{(h)}\big)\big] \xrightarrow{h\downarrow 0} \mathbb{E}\big[f\big(S_0 e^{\mu t + \sigma\sqrt{t} Z}\big)\big].$$

Παρατήρηση 17 Μπορούμε να ενισχύσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα, αν, αντί του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος στην (6.6) χρησιμοποιήσουμε ένα βαθύτερο αποτέλεσμα, την αρχή του αναλλοίωτου (invariance principle) του Monroe Donsker. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μας δίνει πληροφορία για την κατανομή της $E_t^{(h)}$ σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Η αρχή του Donsker περιγράφει την ασυμπτωτική συμπεριφορά ολόκληρης της στοχαστικής διαδικασίας $\{W_t^{(h)}\}_{0\le t\le T}$, με

$$W_t^{(h)} = \sqrt{h} \sum_{i=1}^{[\frac{t}{h}]} J_i.$$

Το συμπέρασμά της αρχής του Donsker είναι ότι η $\{W_t^{(h)}\}_{0\le t\le T}$ συμπεριφέρεται ασυμπτωτικά όπως η κίνηση Brown $\{W_t\}_{0\le t\le T}$. Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία με συνεχή μονοπάτια που χαρακτηρίζεται από το ότι έχει ανεξάρτητες, χρονικά ομοιογενείς και κανονικές προσαυξήσεις. Συγκεκριμένα, αν $0 \le s \le t$, η τυχαία μεταβλητή $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από τις $\{W_r\}_{0\le r\le s}$ και ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, t-s)$. Ειδικότερα, για κάθε $t \ge 0$ έχουμε ότι $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. Ένα τυπικό μονοπάτι της



Σχήμα 6.1: Τυπικό μονοπάτι της κίνησης Brown.

κίνησης Brown φαίνεται στο Σχήμα 6.1. Ας εφοδιάσουμε τον χώρο των συνεχών μονοπατιών $C\big([0,T];\mathbb{R}\big)$ με την τοπολογία που προέρχεται από τη νόρμα

$$\|x\| = \sup_{0\le t\le T} |x(t)|$$

και ας θεωρήσουμε μια φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f : C\big([0,T];\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}$. Από τη σχέση (6.5), την αρχή του Donsker και το Λήμμα 5 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\big[f\big(\{S_t^{(h)}\}_{0\le t\le T}\big)\big] \xrightarrow{h\downarrow 0} \mathbb{E}\big[f\big(\{S_0 e^{\mu t+\sigma W_t}\}_{0\le t\le T}\big)\big].$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά που βρήκαμε για την αξία του πρωτογενούς προϊόντος, στο όριο , καθώς $h \to 0$, είναι ακριβώς η υπόθεση του μοντέλου των Black & Scholes στο οποίο η αξία $\{S_t\}_{t\ge 0}$ του πρωτογεννούς προϊόντος περιγράφεται από την

$$S_t = S_0 e^{\mu t+\sigma W_t}, \tag{6.7}$$

όπου η $\{W_t\}_{t\ge 0}$ είναι κίνηση Brown. Η στοχαστική διαδικασία στο δεξί μέλος της (6.7) αναφέρεται ως *γεωμετρική κίνηση Brown (geometric brownian motion)*. Η παράμετρος μ του μοντέλου ονομάζεται *τάση* (drift), ενώ η παράμετρος σ του μοντέλου ονομάζεται *μεταβλητότητα* (volatility).

6.3 Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τιμών παραγώγων

Στην προηγούμενη παράγραφο θεωρήσαμε διωνυμικά υποδείγματα N περιόδων και, με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων τους, είδαμε ότι μπορούμε να πάρουμε το μοντέλο των Black & Scholes στο όριο, καθώς $N \to \infty$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ευρωπαϊκού τύπου παράγωγο με ωρίμανση T και απόδοση $f(S_T)$. Μπορούμε να τιμολογήσουμε το παράγωγο σε καθένα από τα παραπάνω διωνυμικά υποδείγματα όπως στα προηγούμενα κεφάλαια. Θα προκύψει έτσι μια αριθμητική ακολουθία $\{V_N\}_N$ των αρχικών αξιών του παραγώγου. Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την ασυμπτωτική συμπεριφορά αυτής της ακολουθίας.

Θα δούμε ότι κάθώς $N \to \infty$ η ακολουθία αυτή συγκλίνει και θα υπολογίσουμε το όριό της.

Είδαμε στο Κεφάλαιο 4 ότι, προκειμένου να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα, αρκεί να υπολογίσουμε την αναμενόμενή του απόδοση στην ωρίμανση T ως προς το αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας και να την προεξοφλήσουμε στον χρόνο, πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα e^{-rT}. Το αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}_N$ για το διωνυμικό υπόδειγμα με N περιόδους είδαμε ότι κάνει τις $\{\xi_k\}_{1\le k\le N}$ ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή που δίνεται από τις

$$\mathbb{Q}_N\big[\xi_k = u\big] = q_h = \frac{e^{rh}-d}{u-d} = \frac{e^{rh}-e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\mu h+\sigma\sqrt{h}}-e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}}} \tag{6.8}$$

και

$$\mathbb{Q}_N\big[\xi_k = d\big] = 1-q_h = \frac{u-e^{rh}}{u-d} = \frac{e^{\mu h+\sigma\sqrt{h}}-e^{rh}}{e^{\mu h+\sigma\sqrt{h}}-e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}}}$$

Ακριβώς όπως και στην (6.2) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$E_{t_k} := \log\left(\frac{S_{t_k}}{S_0}\right) = \sum_{i=1}^{k}\log\xi_k = \sum_{i=1}^{k}\mu h + \sigma\sqrt{h}J_i = \mu t_k + \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{k}J_i. \tag{6.9}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $\{J_k\}_{1\le k\le N}$ συνεχίζουν να είναι ανεξάρτητες ως προς οποιόδηποτε $\mathbb{Q}_N$, η κατανομή τους όμως είναι διαφορετική ως προς διαφορετικά $\mathbb{Q}_N$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\mathbb{Q}_N\big[J_k = +1\big] = q_h \qquad \text{και} \qquad \mathbb{Q}_N\big[J_k = -1\big] = 1-q_h.$$

Ειδικότερα, οι J_k έχουν μέση τιμή $m_h = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}\big[J_k\big] = 2q_h - 1$ και διασπορά

$$\sigma_h^2 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}\big[J_k^2\big] - \Big(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}\big[J_k\big]\Big)^2 = 1-(2q_h-1)^2 = 4q_h(1-q_h).$$

Θα επεκτείνουμε και πάλι τον ορισμό της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος σε όλους τους χρόνους $t\in[0,T]$ παρεμβάλλοντας γραμμικά τις $\{E_{t_k}\}_{0\le k\le N}$, ακριβώς όπως στην (6.3). Αν εισαγάγουμε τις μεταβλητές

$$J_k^{(N)} = \frac{J_k+1-2q_h}{\sqrt{4q_h(1-q_h)}},$$

οι οποίες ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}_N$ έχουν μέση τιμή ίση με 0 και διασπορά ίση με 1, μπορούμε τώρα να γράψουμε για $kh \le t \le (k+1)h$

$$\begin{aligned} E_t^{(h)} &= \mu t + \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{k}J_i + \frac{\sigma(t-t_k)}{\sqrt{h}}J_{k+1} \\ &= \mu t + \big(\sigma\sqrt{h}k + \frac{\sigma(t-t_k)}{\sqrt{h}}\big)(2q_h-1) + \sigma\sqrt{h}\sum_{i=1}^{k}(J_i+1-2q_h) + \frac{\sigma(t-t_k)}{\sqrt{h}}(J_{k+1}+1-2q_h) \\ &= \big(\mu + \frac{(2q_h-1)\sigma}{\sqrt{h}}\big)t + \sigma\sqrt{4hq_h(1-q_h)}\sum_{i=1}^{k}J_i^{(N)} + \frac{\sigma(t-t_k)}{\sqrt{h}}(J_{k+1}+1-2q_h). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Όπως και στην (6.5) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\sup_{0\le t\le T}\Big|\frac{\sigma(t-t_k)}{\sqrt{h}}(J_{k+1}+1-2q_h)\Big| \le 2\sigma\sqrt{h} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6.11}$$

Υπάρχουν όμως δύο διαφορές σε σχέση με το επιχείρημα για τη σύγκλιση που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η πρώτη διαφορά είναι ότι θα πρέπει να κατανοήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του όρου

$$\frac{2q_h-1}{\sqrt{h}},$$

καθώς $h \to 0$, που δεν υπήρχε στην προηγούμενη παράγραφο. Αυτό δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο. Από την (6.8) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{2q_h - 1}{\sqrt{h}} &= \frac{2e^{(r-\mu)h} - e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{\sqrt{h}\big(e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}\big)} \\ &= \frac{2\big(e^{(r-\mu)h} - 1\big) - \big(e^{\sigma\sqrt{h}/2} - e^{-\sigma\sqrt{h}/2}\big)^2}{\sqrt{h}\big(e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}\big)}\end{aligned}$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή του δεξιού μέλους με h και χρησιμοποιώντας ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(ax)}{x} = 2a,$$

παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{2q_h - 1}{\sqrt{h}} = \frac{2(r-\mu) - \sigma^2}{2\sigma}. \tag{6.12}$$

Επιπλέον, από το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως ότι

$$4q_h(1-q_h) = 1 - (2q_h - 1)^2 \to 1, \quad h \to 0.$$

Η δεύτερη διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη παράγραφο είναι ότι η κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $J_k^{(N)}$ μεταβάλλεται με το N, είναι δηλαδή διαφορετική σε κάθε διωνυμικό δέντρο που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση. Επομένως, στην (6.6) δεν μπορούμε να επικαλεστούμε το κλασικό Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Αυτό που έχουμε εδώ είναι μια τριγωνική διάταξη (triangular array) τυχαίων μεταβλητών.

$$\begin{array}{l} J_1^{(1)} \\ J_1^{(2)}, J_2^{(2)} \\ J_1^{(3)}, J_2^{(3)}, J_3^{(3)} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ J_1^{(N)}, J_2^{(N)}, J_3^{(N)}, \cdots, J_N^{(N)}. \end{array} \tag{6.13}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές κάθε γραμμής είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, αλλά η κοινή κατανομή κάθε γραμμής μπορεί να είναι διαφορετική. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μπορεί να γενικευτεί και για τριγωνικές διατάξεις, όπως αυτή παραπάνω (δείτε π.χ. την Παράγραφο 7.1 στο [1]). Παίρνουμε έτσι ότι για κάθε $t > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^{k} J_i^{(N)} = \frac{1}{\left[\frac{t}{h}\right]} \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{h}\right]} J_i^{(N)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \qquad h \to 0. \tag{6.14}$$

Από τις σχέσεις 6.9, 6.11, 6.12 και το Λήμμα 6 έχουμε τώρα ότι για κάθε $t \in [0,T]$,

$$E_t^{(h)} \xrightarrow{d} \big(r - \frac{\sigma^2}{2}\big)t + \sigma\sqrt{t}Z, \quad \text{με } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Από το Λήμμα 7 παίρνουμε ότι

$$S_t^{(h)} \xrightarrow{d} S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z}.$$

Τέλος, επειδή η κανονική κατανομή είναι συνεχής, από το Λήμμα 5 έχουμε ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει το πολύ αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}\left[f\big(S_t\big)\right] \longrightarrow \mathbb{E}\big[f\big(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z}\big)\big]. \tag{6.15}$$

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να σχολιάσουμε το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε.

Παρατήρηση 18 Από το Θεώρημα 4.6 έχουμε ότι, αν τιμολογήσουμε με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα N περιόδων ένα ευρωπαϊκό παράγωγο με απόδοση $V_T = f(S_T)$, η αρχική αξία του παραγώγου, όπως προσδιορίζεται από την αρχή της μη επιτηδειότητας, είναι ίση με

$$V_0^{(N)} = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_N}\left[f\big(S_T\big)\right].$$

Η σχέση (6.15) δίνει ότι, τουλάχιστον στην περίπτωση που η συνάρτηση της απόδοσης του παραγώγου f είναι φραγμένη και έχει το πολύ αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας, τότε η ακολουθία των αρχικών αξιών του παραγώγου συγκλίνει, καθώς $N \to \infty$ και το όριό της δίνεται από την

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}\big[f\big(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z}\big)\big],$$

όπου η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Υπολογίζοντας την παραπάνω αναμενόμενη τιμή με τη βοήθεια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Z, έχουμε ότι

$$V_0 = e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} f\big(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}x}\big)\ e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. \tag{6.16}$$

Αυτός είναι ο διάσημος τύπος των Black & Scholes για την τιμολόγηση παραγώγων ευρωπαϊκού τύπου. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πώς μπορούμε να τον εφαρμόσουμε για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.

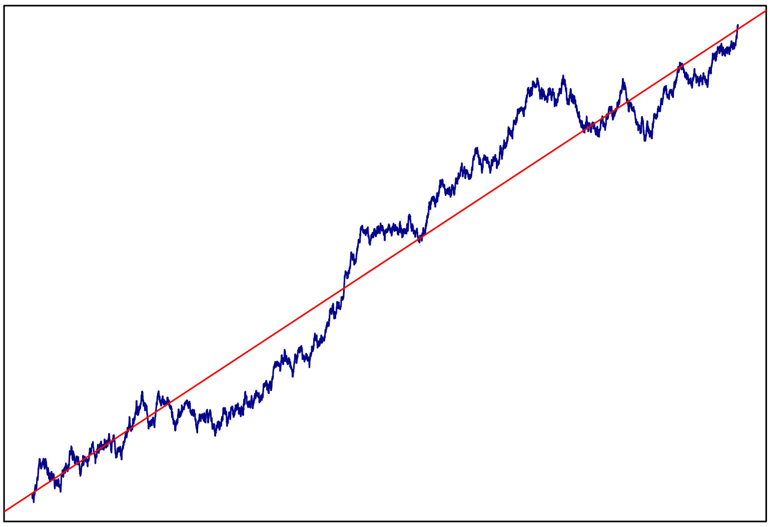
Παρατήρηση 19 Αξίζει να προσέξουμε ότι το τελικό αποτέλεσμα (6.16) για την αξία ενός παραγώγου στο υπόδειγμα των Black & Scholes δεν εξαρτάται από την τάση μ του υποδείγματος που εμφανίζεται στην (6.7). Η τάση εκφράζει τον μέσο ρυθμό μεγέθυνσης της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος. Από την (6.7) και το γεγονός ότι $\mathbb{E}\big[W_t\big] = 0$ έχουμε ότι

$$\mu = \frac{1}{t}\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right).$$

Είναι με άλλα λόγια η τάση για αύξηση που αποδίδει το υπόδειγμα στην αξία του πρωτογενούς προϊόντος. Το ότι η τελική αξία του παραγώγου δεν εξαρτάται από το μ είναι σε αντιστοιχία με το ότι η αξία ενός παραγώγου με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα δεν εξαρτάται από την υποκειμενική πιθανότητα p, την οποία αποδίδει το υπόδειγμα στο ενδεχόμενο ανόδου της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος σε μια περίοδο. Επομένως, δύο επενδυτές, μπορεί ενδεχομένως να έχουν διαφορετικές πεποιθήσεις για την τάση αύξησης της αξίας μιας μετοχής, θα συμφωνήσουν όμως για τη δίκαιη τιμή ενός παραγώγου αυτής της μετοχής.

Παρατήρηση 20 Το ότι η αξία ενός παραγώγου της μετοχής δεν εξαρτάται από την παράμετρο μ του υποδείγματος Black & Scholes έχει και πρακτικές συνέπειες. Για να εκτιμήσει κανείς στατιστικά την παράμετρο μ χρειάζεται ιστορικά δεδομένα που πηγαίνουν σε βάθος δεκαετίας. Αυτό μπορεί να το καταλάβει κανείς από το Σχήμα 6.2. Στο σχήμα αυτό φαίνεται με μπλε χρώμα μια τυπική τροχιά της διαδικασίας $\mu t + \sigma W_t$. Με κόκκινο χρώμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $y = \mu t$. Παρατηρήστε ότι, αν κανείς επιχειρήσει να εκτιμήσει την κλίση της τροχιάς, χρησιμοποιώντας ένα μικρό κομμάτι της τροχιάς μόνο, μπορεί να οδηγηθεί σε πολύ διαφορετικά αποτελέσματα από την πραγματική τιμή μ. Αντίθετα, η εκτίμηση της παραμέτρου σ μπορεί να γίνει αρκετά αξιόπιστα από ιστορικά δεδομένα μερικών μηνών.

Παρατήρηση 21 Κάποιες φορές δεν είναι εύκολο να υπολογίσουμε αναλυτικά την αξία που δίνει σ' ένα παράγωγο το υπόδειγμα Black & Scholes. Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις για την αριθμητική εκτίμηση της απάντησης. Θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει μεθόδους Monte Carlo, ή αριθμητικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Είναι και οι δύο εξαιρετικά χρήσιμες αριθμητικές μέθοδοι, αλλά δεν θα μας απασχολήσουν στο πλαίσιο αυτών των εισαγωγικών σημειώσεων. Μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου, αφού, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο



Σχήμα 6.2: Τυπική τροχιά της γεωμετρικής κίνηση Brown

3, στο διωνυμικό υπόδειγμα μπορούμε να τιμολογήσουμε αλγοριθμικά οποιοδήποτε παράγωγο. Αυτή η προσεγγιστική μέθοδος δεν είναι η ακριβέστερη, αλλά είναι εύκολη στην υλοποίησή της και γρήγορη, όταν πρόκειται για ευρωπαϊκού τύπου παράγωγα. Εφόσον το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα για μεγάλα N δεν εξαρτάται από την παράμετρο μ, είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς πώς μπορούμε να επιλέξουμε βέλτιστα την παράμετρο μ στην (6.1), ώστε το σφάλμα της προσέγγισης που θα κάνουμε χρησιμοποιώντας ένα μεγάλο αλλά πεπερασμένο N να είναι κατά το δυνατόν μικρό. Μια καλή πρακτική ([4]) είναι να επιλέξουμε $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Όπως φαίνεται από τη σχέση (6.12) αυτή η επιλογή βελτιώνει την τάξη σύγκλισης του q_h στο 1/2 και σε γενικές γραμμές βελτιώνει την προσέγγιση της E_t από την $E_t^{(h)}$ της σχέσης (6.10).

Παρατήρηση 22 Είδαμε ότι η (6.15) μας εξασφαλίζει ότι η αξία ενός παραγώγου με απόδοση στην ωρίμανση $V_T = f(S_T)$, όπως προσδιορίζεται βάσει του διωνυμικού υποδείγματος N περιόδων, συγκλίνει, καθώς $N \to \infty$, στην αξία του παραγώγου βάσει του υποδείγματος Black & Scholes, όταν η f είναι μια φραγμένη συνάρτηση με αριθμήσιμα το πολύ σημεία ασυνέχειας. Αυτό μας καλύπτει π.χ. για την περίπτωση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, για το οποίο

$$f(x) = (K - x)^+.$$

Στην πράξη, δεν υπάρχουν ενδιαφέροντα παράγωγα, για τα οποία η f να έχει περισσότερες από πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες. Υπάρχουν όμως παράγωγα για τα οποία η f δεν είναι φραγμένη, όπως για παράδειγμα το ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς. Μπορούμε να πούμε κάτι για τη σύγκλιση, στο όριο κλίμακας του διωνυμικού υποδείγματος, της αξίας τέτοιων παραγώγων;

Το ίδιο το πρωτογενές προϊόν είναι ένα παράγωγο του εαυτού του, με συνάρτηση απόδοσης την ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$ που δεν είναι φραγμένη. Μπορούμε πάντα να αντισταθμίσουμε αυτό το παράγωγο με ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει μία μονάδα του πρωτογενούς προϊόντος, οπότε η αρχική αξία αυτού του παραγώγου οφείλει, λόγω της αρχής της μη επιτηδειότητας, να είναι S_0, ανεξαρτήτως του υποδείγματος που θα χρησιμοποιούμε. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, τουλάχιστον γι΄ αυτό το παράγωγο που δεν έχει φραγμένη συνάρτηση απόδοσης, η αξία που υπολογίζουμε με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα N περιόδων συγκλίνει, κάθώς $N \to \infty$, στην αξία του παραγώγου βάσει του υποδείγματος Black & Scholes.

Ας ανακαλέσουμε τώρα την ισοτιμία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (1.2). Αποδείξαμε την ισοτιμία χρησιμοποιώντας μόνο την αρχή της μη επιτηδειότητας, επομένως αυτή είναι σε ισχύ ανεξάρτητα από το μοντέλο που θα υιοθετήσουμε για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος. Αν λοιπόν $c^{(N)}(S_0, T, K)$

και $p^{(N)}(S_0,T,K)$ είναι οι αξίες των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης αντίστοιχα, όπως υπολογίζονται με βάση το διωνυμικό υποδειγμα N περιόδων, έχουμε ότι

$$c^{(N)}(S_0,T,K) = p^{(N)}(S_0,T,K) + S_0 - K\,B(0,T).$$

Εφόσον η $p^{(N)}(S_0,T,K)$ τείνει, καθώς $N \to \infty$, στην αξία $p(S_0,T,K)$, όπως αυτή υπολογίζεται από το υπόδειγμα Black & Scholes, θα έχουμε ότι

$$c^{(N)}(S_0,T,K) \to p(S_0,T,K) + S_0 - K\,B(0,T) = c(S_0,T,K),$$

όπου η τελευταία σχέση ισχύει γιατί και στο υπόδειγμα Black & Scholes η αξία $c(S_0,T,K)$ ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς θα πρέπει να σχετίζεται με την αξία του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης, σύμφωνα με τη σχέση ισοτιμίας (1.2). Βλέπουμε λοιπόν ότι και για το ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, για το οποίο η συνάρτηση απόδοσης δεν είναι φραγμένη, η ακολουθία των αξιών που υπολογίζουμε με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα συγκλίνει στην αξία του διακαιώματος με βάση το υπόδειγμα Black & Scholes.

Μπορεί να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας πιο προχωρημένα εργαλεία από την Θεωρία Πιθανοτήτων, ότι, αν η συνάρτηση απόδοσης ενός ευρωπαϊκού παραγώγου έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών και μεγαλώνει το πολύ πολυωνυμικά, αν δηλαδή υπάρχουν $p \in \mathbb{N}$ και σταθερά C, τέτοια ώστε

$$f(x) \leq C(1+x^p), \qquad \text{για κάθε } x > 0,$$

τότε η αρχική αξία του παραγώγου $V_0^{(N)}$, όπως υπολογίζεται με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα N περιόδων, συγκλίνει στην αρχική αξία που δίνει στο παράγωγο το υπόδειγμα Black & Scholes, η οποία υπολογίζεται από την (6.16.

Παρατήρηση 23 Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε ότι, αν αντί για το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, χρησιμοποιήσει κανείς την αρχή του Donsker, μπορεί να αποδείξει τη σύγκλιση κατά κατανομή όχι μόνο της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, αλλά ολόκληρης της τροχιάς. Κάτι αντίστοιχο μπορεί να αποδείξει κανείς και στην περίπτωση της τριγωνικής διάταξης (6.13). Σε αυτήν την περίπτωση το συμπέρασμα που προκύπτει από τις (6.9), (6.10) και (6.12) είναι ότι η στοχαστική διαδικασία $\{S_t^{(h)}\}_{0\leq t\leq T}$ συγκλίνει στη γεωμετρική κίνηση Brown $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$, με

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}. \tag{6.17}$$

Αν θεωρήσουμε τώρα μια φραγμένη και συνεχή συνάρτηση $f : C\big([0,T];\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$e^{-rT}\mathbb{E}\big[f\big(\{S_t^{(h)}\}_{0\leq t\leq T}\big)\big] \xrightarrow{h\downarrow 0} e^{-rT}\mathbb{E}\big[f\big(\{S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}\}_{0\leq t\leq T}\big)\big].$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για μια μεγάλη οικογένεια παραγώγων η αρχική αξία που υπολογίζουμε με βάση το διωνυμικό υπόδειγμα N περίοδων, συγκλίνει, καθώς $N \to \infty$, ακόμα κι αν η απόδοση του παραγώγου στην ωρίμανση

$$V_T = f\big(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}\big),$$

εξαρτάται από ολόκληρη την τροχιά του πρωτογενούς προϊόντος. Το όριο το οποίο φαίνεται στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης είναι η αξία του παραγώγου, όπως αυτή υπολογίζεται στο υπόδειγμα Black & Scholes. Όπως και στην περίπτωση του διωνυμικού υποδείγματος, η σημερινή αξία του παραγώγου είναι η προεξοφλημένη αναμενόμενη απόδοση του παραγώγου, ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$.

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[V_T\big].$$

Κάτω από το μέτρο $\mathbb{Q}$, η τιμή του πρωτογενούς προϊόντος συμπεριφέρεται όπως η γεωμετρική κίνηση Brown που περιγράφεται στην (6.17). Βλέπουμε και πάλι ότι το μέτρο $\mathbb{Q}$ που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, είναι εν γένει διαφορετικό από το μέτρο $\mathbb{P}$, το οποίο αντανακλά τις πεποιθήσεις μας για τη δυναμική του πρωτογενούς προϊόντος. Κάτω από μέτρο $\mathbb{P}$ η αξία του πρωτογενούς προϊόντος συμπεριφέρεται όπως η γεωμετρική κίνηση Brown που περιγράφεται στην (6.7).

Παρατήρηση 24 (κάπως προχωρημένη, μπορεί να παραληφθεί σε μια πρώτη ανάγνωση). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων της κίνησης Brown για να δείξουμε ότι το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ είναι ένα μέτρο martingale. Πράγματι, αν $0 \leq s \leq t$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{-rt}S_t \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] &= e^{-rs}\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[S_s e^{\sigma(W_t-W_s)-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] \\
&= e^{-rs}S_s\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{\sigma(W_t-W_s)-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)} \,\big|\, \mathcal{F}_s\big] \\
&= e^{-rs}S_s\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{\sigma(W_t-W_s)-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)}\big] \\
&= e^{-rs}S_s\ e^{-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[e^{\sigma W_{t-s}}\big] \\
&= e^{-rs}S_s.
\end{aligned}$$

Η δεύτερη και η τρίτη ισότητα παραπάνω προκύπτουν από τις ιδιότητες 4 και 3 του Θεωρήματος 8 αντίστοιχα. Η τέταρτη ισότητα είναι κλασικός υπολογισμός της εκθετικής ροπογεννήτριας μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής.

6.4 Τιμολόγηση με βάση το υπόδειγμα Black & Scholes

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση παραγώγων, σύμφωνα με το υπόδειγμα των Black & Scholes. Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K. Η απόδοση αυτού του δικαιώματος στην ωρίμανση είναι, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1

$$V_T = (S_T - K)^+.$$

Η σημερινή αξία αυτού του δικαιώματος δίνεται από τον τύπο των Black & Scholes (6.16). Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος αυτής της σχέσης μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Θεώρημα 16 Αν η τρέχουσα τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_0, τότε η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K, με βάση το μοντέλο Black & Scholes, δίνεται από την

$$c(S_0,T,K) = S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-), \quad \text{όπου } d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{S_0e^{rT}}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}. \tag{6.18}$$

Απόδειξη: Από τον τύπο των Black & Scholes έχουμε ότι

$$c(S_0,T,K) = e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}x} - K\right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Παρατηρήστε ότι η $-d_-$ είναι η τιμή του x για την οποία η παρένθεση στην παραπάνω έκφραση μηδενίζεται. Συμβολίζοντας με

$$F_0 = S_0e^{rT}$$

την προθεσμιακή τιμή του πρωτογενούς προϊόντος, έχουμε

$$\begin{aligned}
c(S_0,T,K) &= e^{-rT}\int_{-d_-}^{+\infty} \left(F_0e^{-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\sqrt{T}x} - K\right) e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-rT}\left(F_0\int_{-d_-}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - K\int_{-d_-}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right) \\
&= e^{-rT}\left(F_0\int_{-\infty}^{d_+} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - K\int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right) \\
&= S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-),
\end{aligned}$$

που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του Θεωρήματος. □

Έχοντας στα χέρια μας ένα αναλυτικό τύπο για την τρέχουσα αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, μπορούμε να διερευνύσουμε πώς αυτή συμπεριφέρεται , καθώς αλλάζουν οι διάφοροι παράμετροι του προβληματος. Η ευαισθησία (sensitivity) της τρέχουσας αξίας ενός χαρτοφυλακίου ως προς μια παράμετρο του προβλήματος υπολογίζεται από τη μερική παράγωγο της αξίας ως προς αυτήν την παράμετρο. Αυτές οι ποσότητες ονομάζονται ελληνικοί χαρακτήρες (Greeks) και παρέχουν χρήσιμη πληροφορία στην αντιστάθμιση του κινδύνου, όπως θα δούμε στις παρατηρήσεις που ακολουθούν.

Παρατήρηση 25 Αν $S_0 \to 0$, τότε από την (6.18) έχουμε ότι $d_\pm \to 0$ και $c(S_0, T, K) \to 0$. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού από την αρχή της μη επιτηδειότητας, γνωρίζουμε ότι $c(S_0, T, K) \leq S_0$.

Αν πάλι $S_0 \to \infty$, τότε από την (6.18) έχουμε ότι $d_\pm \to 1$ και $c(S_0, T, K) - S_0 \to -Ke^{-rT}$. Αυτό είναι ακριβώς το αποτέλεσμα που περιμένουμε, αφού, αν η αξία του πρωτογενούς προϊόντος είναι πολύ μεγάλη, τότε με πολύ μεγάλη πιθανότητα θα συμφέρει να ασκήσει κανείς το δικαίωμα στην ωρίμανση, ώστε να αγοράσει το πρωτογενές προϊόν προς K.

Παρατήρηση 26 Η ευαισθησία της αξίας ενός παραγώγου ως προς της αρχική τιμή του πρωτογενούς προϊόντος ονομάζεται *δέλτα* (delta) και συμβολίζεται με Δ. Είναι μια χρήσιμη ποσότητα γιατί, αν κατέχει κανείς ένα χαρτοφυλάκιο από παράγωγα του πρωτογενούς προϊόντος, μηδενίζοντας το δέλτα του χαρτοφυλακίου, εξασφαλίζει ότι σε πρώτη τάξη προσέγγισης, η αξία του χαρτοφυλακίου δεν επηρεάζεται από μεταβολές της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος. Θα υπολογίσουμε τώρα το δέλτα ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c(S_0, T, K)}{\partial S_0} &= \Phi(d_+) + S_0 \Phi'(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial S_0} - Ke^{-rT} \Phi'(d_-) \frac{\partial d_-}{\partial S_0} \\
&= \Phi(d_+) + S_0 e^{-\frac{1}{2}d_+^2} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{2\pi T}} - Ke^{-rT} e^{-\frac{1}{2}d_-^2} \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{2\pi T}} \\
&= \Phi(d_+),
\end{aligned}$$

αφού, όπως μπορεί εύκολα να ελεγχθεί,

$$S_0 e^{-\frac{1}{2}d_+^2} = Ke^{-rT} e^{-\frac{1}{2}d_-^2}. \tag{6.19}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι αύξουσα συνάρτηση της αξίας του πρωτογενούς προϊόντος. Αυτό είναι φυσιολογικό, αφού όσο μεγαλύτερη είναι η αρχική αξία του πρωτογενούς προϊόντος, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η αξία του στην ωρίμανση.

Παρατήρηση 27 Η ευαισθησία ενός παραγώγου ως προς τη μεταβλητότητα του πρωτογενούς προϊόντος ονομάζεται *βέγα* (vega) και συμβολίζεται με ν. Είναι και αυτο μια χρήσιμη ποσότητα γιατί η μεταβλητότητα του πρωτογενούς προϊόντος προσδιορίζεται εμπειρικά. Μηδενίζοντας το συνολικό βέγα ενός χαρτοφυλακίου, εξασφαλίζει κανείς ότι η αξία του χαρτοφυλακίου δεν είναι ευαίσθητη σε πρώτης τάξης μεγέθους σφάλματα στον προσδιορισμό της μεταβλητότητας. Θα υπολογίσουμε στη συνέχεια το βέγα ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c(S_0, T, K)}{\partial \sigma} &= S_0 \Phi'(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial \sigma} - Ke^{-rT} \Phi'(d_-) \frac{\partial d_-}{\partial \sigma} \\
&= S_0 \Phi'(d_+) \frac{\partial (d_+ - d_-)}{\partial \sigma} \quad \big(\text{λόγω της (6.19)}\big) \\
&= S_0 \sqrt{\frac{T}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_+^2}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η αξια ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι αύξουσα συνάρτηση της μεταβλητότητας σ του πρωτογενούς προϊόντος.

Περισσότερα για τους ελληνικούς χαρακτήρες και τη χρήση τους στην αντιστάθμιση μπορείτε να διαβάσετε στο [3].

Θεώρημα 17 Αν η τρέχουσα τιμή του πρωτογενούς προϊόντος είναι S_0, τότε η αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K, με βάση το μοντέλο Black & Scholes δίνεται από την

$$p(S_0, T, K) = Ke^{-rT}\Phi(-d_-) - S_0\Phi(-d_+), \quad \text{όπου } d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{S_0e^{rT}}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}. \tag{6.20}$$

Απόδειξη: Έχοντας ήδη υπολογίσει την αξία ενός ερωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε την αξία του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης, χρησιμοποιώντας την ισοτιμία ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (1.2). Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} p(S_0, T, K) &= c(S_0, T, K) - S_0 + Ke^{-rT} \\ &= S_0(\Phi(d_+) - 1) + Ke^{-rT}(1 - \Phi(d_-)) \\ &= Ke^{-rT}\Phi(-d_-) - S_0e^{-rT}\Phi(-d_+). \qquad \square \end{aligned}$$

Παρατήρηση 28 Προκειμένου να υπολογίσουμε τους ελληνικούς χαρακτήρες για ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, μπορούμε πάλι να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ισοτιμίας

$$c(S_0, T, K) - p(S_0, T, K) = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Παίρνοντας μερικές παραγώγους ως προς S_0 και ως προς σ στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης, έχουμε ότι

$$\Delta_c - \Delta_p = 1 \Longrightarrow \Delta_p = -\Phi(-d_+)$$

και

$$\nu_c - \nu_p = 0 \Longrightarrow \nu_p = S_0\sqrt{\frac{T}{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_+^2}.$$

6.5 Εκτίμηση της μεταβλητότητας

Σε αυτήν την παράγραφο θα γνωρίσουμε δύο μεθόδους, με τις οποίες μπορεί κανείς να εκτιμήσει τη μεταβλητότητα σ του πρωτογενούς προϊόντος στο μοντέλο των Black & Scholes. Ο πρώτος βασίζεται σε ιστορικά δεδομένα και ο δεύτερος στις τιμές αγοράς παραγώγων του προϊόντος.

Η πρώτη μέθοδος βασίζεται σε ιστορικά δεδομένα και στις ιδιότητες της κίνησης Brown. Έστω ότι έχουμε διαμερίσει στο διάστημα $[0, T]$ σε N ίσα χρονικά διαστήματα, διάρκειας $h = T/N$ το καθένα. Τα αριστερά άκρα αυτών των διαστημάτων είναι τα σημεία $\{t_k\}_{0\le k\le N-1}$, με $t_k = kh$. Ας θεωρήσουμε τώρα την τυχαία μεταβλητή

$$\begin{aligned} P_h = \sum_{k=0}^{N-1}(E_{t_{k+1}} - E_{t_k})^2 &= \sum_{k=0}^{N-1}\big(\sigma^2(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 + \mu^2h^2 + 2\mu h\sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\big) \\ &= \sigma^2\sum_{k=0}^{N-1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 + \mu^2Th + 2\mu hW_T. \end{aligned}$$

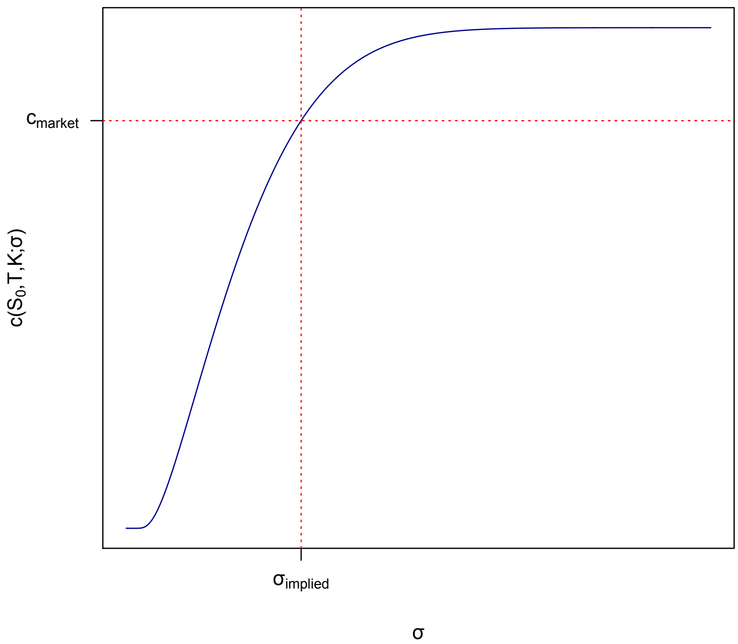
Χρησιμοποιώντας ότι οι $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, με κατανομή $\mathcal{N}(0, h)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της P_h. Συγκεκριμένα,

$$\mathbb{E}\big[P_h\big] = \sigma^2\sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{E}\big[(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\big] + \mu^2Th = (\sigma^2 + \mu^2h)T$$

και
$$\mathrm{Var}(P_h) = \sigma^2 N \mathrm{Var}(W_h^2) + 4\mu^2 h^2 T = 2hT(\sigma^2 + 2\mu^2 h)$$
Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν $h \to 0$ η P_h συγκεντρώνεται γύρω από την τιμή $\sigma^2 T$. Επιπλέον
$$P_h = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\log \big(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \big) \right)^2 \simeq \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{S_{t_{k+1}} - S_{t_k}}{S_{t_k}} \right)^2.$$
Με λίγο περισσότερο κόπο μπορεί κανείς να δείξει αυστηρά ότι
$$\mathbb{P}\Big[\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{S_{t_{k+1}} - S_{t_k}}{S_{t_k}} \right)^2 \longrightarrow \sigma^2 \Big] = 1.$$
Μπορούμε επομένως να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα σ από ιστορικά δεδομένα, χρησιμοποιώντας τη συνεπή εκτιμήτρια
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{S_{t_{k+1}} - S_{t_k}}{S_{t_k}} \right)^2.$$
Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στην παρατήρηση των τιμών διαπραγμάτευσης παραγώγων του πρωτογενούς προϊόντος. Η ιδέα είναι απλή. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την τιμή διαπραγμάτευσης ενός παραγώγου, όπως κάναμε π.χ. για τα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Η θεωρητικά δίκαιη τιμή του παραγώγου με βάση το υπόδειγμα Black & Scholes εξαρτάται από την άγνωστη μεταβλητότητα σ και από ένα σύνολο παραμέτρων του παραγώγου που θα συμβολίζουμε με θ. Ας συμβολίζουμε με $V_{BS}(\theta;\sigma)$ τη θεωρητικά δίκαιη τιμή του παραγώγου. Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η αγορά είναι σε ισορροπία, η τιμή διαπραγμάτευσης του παραγώγου $V_{market}(\theta)$, την οποία μπορούμε φυσικά να παρατηρήσουμε, θα πρέπει να ταυτίζεται με την $V_{BS}(\theta;\sigma)$. Προκειμένου λοιπόν να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση
$$V_{BS}(\theta;\sigma) = V_{market}(\theta)$$
ως προς σ. Η τιμή που θα βρούμε είναι η μεταβλητότητα που τεκμαίρεται από την τιμή διαπραγμάτευσης του παραγώγου ή, όπως λέμε για συντομία, η *τεκμαρτή μεταβλητότητα* (implied volatility).

Για παράδειγμα, αν ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής έχει τιμή διαπραγμάτευσης c_{market}, η παραπάνω εξίσωση γίνεται
$$c(S_0, T, K; \sigma) = S_0 \Phi\big(d_+(\sigma)\big) - K e^{-rT} \Phi\big(d_-(\sigma)\big) = c_{market}. \tag{6.21}$$
Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση. Πράγματι, από την Παρατήρηση 27 το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση του σ. Επομένως, αν η εξίσωση έχει λύση, αυτή θα είναι μοναδική. Ας δούμε όμως τώρα πώς συμπεριφέρεται η αξία του δικαιώματος, όταν $\sigma \to 0$ ή $\sigma \to \infty$.

Όταν $\sigma \to 0$, έχουμε ότι
$$d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{S_0 e^{rT}}{K} \right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{αν } S_0 e^{rT} > K \\ 0, & \text{αν } S_0 e^{rT} = K \\ -\infty, & \text{αν } S_0 e^{rT} < K. \end{cases}$$
Επομένως,
$$\begin{aligned} c(S_0, T, K; \sigma) = S_0 \Phi(d_+) - K e^{-rT} \Phi(d_-) &\longrightarrow \begin{cases} S_0 - K e^{-rT}, & \text{αν } S_0 e^{rT} > K \\ 0, & \text{αν } S_0 e^{rT} \le K \end{cases} \\ &= (S_0 - K e^{-rT})^+. \end{aligned}$$
Όταν $\sigma \to \infty$ έχουμε ότι $d_\pm \to \pm\infty$, επομένως $c(S_0, T, K; \sigma) \to S_0$. Συνοψίζοντας όσα είπαμε, η $c(S_0, T, K)$ ως συνάρτηση της μεταβλητότητας σ αυξάνει από την τιμή $(S_0 - K e^{-rT})^+$, καθώς $\sigma \to 0$, προς



Σχήμα 6.3: Η μέθοδος εύρεσης της τεκμαρτής μεταβλητότητας

την τιμή S_0, καθώς $\sigma \to \infty$. Από την Πρόταση 3 όμως, προκειμένου να μην υπάρχει ευκαιρία επιτηδειότητας στην αγορά, θα πρέπει η c_{market} να ικανοποιεί τη διπλή ανισότητα

$$(S_0 - Ke^{-rT})^+ < c_{market} < S_0.$$

Θα υπάρχει επομένως μια μοναδική τιμή της μεταβλητότητας σ_{implied}, για την οποία η εξίσωση (6.21) έχει λύση. Αυτή η τιμή είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα και μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί αριθμητικά. Το Σχήμα 6.3 δείχνει την ιδέα του υπολογισμού της τεκμαρτής μεταβλητότητας. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της τεκμαρτής μεταβλητότητας για να ελέγξουμε κατά πόσον το μοντέλο Black & Scholes είναι ένα καλό υπόδειγμα για τις πραγματικές αγορές. Αν οι τιμές διαπραγμάτευσης των παραγώγων μιας μετοχής ήταν σύμφωνες με το υπόδειγμα Black & Scholes, τότε η μεταβλητότητα που τεκμαίρεται από οποιοδήποτε παράγωγο θα έπρεπε να είναι ίδια και ίση με τη μεταβλητότητα της μετοχής. Μπορεί κανείς να υπολογίσει την τεκμαρτή μεταβλητότητα από δικαιώματα αγοράς με διαφορετικές τιμές άσκησης K και να παραστήσει γραφικά τα αντίστοιχα σημεία $\big(K, \sigma_{\text{implied}}(K)\big)$. Αν οι τιμές των δικαιωμάτων στην αγορά ήταν σύμφωνες με το υπόδειγμα Black & Scholes, τα σημεία αυτά θα έπρεπε να βρίσκονται σε μια οριζόντια ευθεία, αυτή που αντιστοιχεί στη μεταβλητότητα της μετοχής. Στην πράξη όμως, αν κάνει κανείς αυτήν τη διαδικασία, η γραφική παράσταση της $\sigma_{\text{implied}}(K)$ φαίνεται να είναι κυρτωμένη. Αυτή η χαρακτηριστική εικόνα ονομάζεται *χαμόγελο της μεταβλητότητας* (volatility smile) και δείχνει ότι το μοντέλο Black & Scholes δεν περιγράφει ικανοποιητικά τις πραγματικές αγορές. Προκειμένου να εξηγηθεί αυτή η εικόνα έχουν προταθεί περισσότερα πολύπλοκα μοντέλα, όπως για παράδειγμα μοντέλα όπου η μεταβλητότητα είναι μια στοχαστική διαδικασία. Αυτά τα θέματα είναι όμως αντικείμενο του επόμενου βιβλίου που θα μελετήσετε για τη Μαθηματική Χρηματοοικονομία.

6.6 Ασκήσεις

Άσκηση 45 Ένα ευρωπαϊκού τύπου παράγωγο έχει απόδοση στην ωρίμανση $f(S_T) = |S_T - K|$.
α) Υπολογίστε τη σημερινή αξία του παραγώγου βάσει του υποδείγματος των Black & Scholes.
β) Υπολογίστε το δέλτα του παραγώγου και βρείτε πώς αυτό συμπεριφέρεται , καθώς πλησιάζουμε στην ωρίμανση ($T \to 0$).

Άσκηση 46 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι $S_0 = 50$, ενώ για τη δυναμική της υποθέτουμε ότι ακολουθεί το υπόδειγμα Black & Scholes. Από τη στατιστική επεξεργασία ιστορικών δεδομένων εκτιμάται ότι $\sigma^2 = 12,2\%$ κατ΄ έτος. Το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι $r = 6,09\%$ κατ΄ έτος υπολογισμένο με συνεχή ανατοκισμό. Θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα ευρωπαϊκού τύπου παράγωγο της μετοχής, με ωρίμανση σε 6 μήνες και απόδοση που δίνεται από τη σχέση

$$f(S_T) = \begin{cases} 1000\log\left(\frac{S_T}{K}\right) & , \text{ αν } S_T \geq K \\ 0 & , \text{ αν } S_T < K, \end{cases}$$

όπου K=50.
α) Υπολογίστε τη σημερινή αξία του παραγώγου, βάσει του τύπου των Black και Scholes.
β) Υπολογίστε το δέλτα και το βέγα αυτού του παραγώγου. (Υπόδειξη: $\Phi''(x) + x\Phi'(x) = 0$).
γ) Ποιος τύπος δίνει την αξία του παραγώγου τη χρονική στιγμή $t > 0$, αν η τιμή της μετοχής S_t είναι x;

Άσκηση 47 Θεωρούμε ένα ευρωπαϊκού τύπου παράγωγο μιας μετοχής (προϊόν A) με ωρίμανση t και απόδοση στην ωρίμανση:

$$f(S_t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } S_t > K \\ 0, & \text{αν } S_t \leq K. \end{cases}$$

α) Τιμολογήστε το προϊόν A χρησιμοποιώντας τον τύπο των Black& Scholes.
Θεωρούμε τώρα ένα άλλο παράγωγο της ίδιας μετοχής (προϊόν B) που είναι ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με ωρίμανση $T > t$ και τιμή παράδοσης M, *με τον επιπλεόν όρο* ότι το συμβόλαιο ακυρώνεται αυτόματα τη στιγμή t αν $S_t \leq K$.
β) Βρείτε την αξία $V_B(t, S_t)$ του προϊόντος B τη στιγμή t σαν συνάρτηση της S_t.
γ) Τιμολογήστε το προϊόν B με κατάλληλη χρήση του τύπου των Black& Scholes.
δ) Συμπεράνετε ότι η αξία του B ισούται με την αξία ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από:

- ένα ευρωπαϊκό δικαιώμα αγοράς με ωρίμανση t και τιμή άσκησης K και
- $K - Me^{-r(T-t)}$ προϊόντα A.

ε) Δείξτε ότι ο ισχυρισμός του ερωτήματος (δ) είναι σωστός ανεξαρτήτως του υποδείγματος του θα υποθέσουμε για τη δυναμική της μετοχής.

Άσκηση 48 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι S_0 και για τη δυναμική της υποθέτουμε ότι ακολουθεί το υπόδειγμα Black & Scholes με τάση μ και μεταβλητότητα $\sigma > 0$.
α) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή και ποια η διασπορά της τιμής της μετοχής έπειτα από χρόνο T;
β) Βρείτε ένα 95%-διάστημα εμπιστοσύνης για την τιμή της μετοχής έπειτα από χρόνο T.
γ) Ποια είναι η πιθανότητα να ασκηθεί ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς της μετοχής με τιμή άσκησης K και χρόνο ωρίμανσης T;
δ) Ποια είναι η πιθανότητα η S_T να είναι μεγαλύτερη από την αναμενόμενη τιμή της;

Άσκηση 49 Ένα ενισχυμένο ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K έχει συνάρτηση απόδοσης $f(S_T) = ((S_T - K)^+)^2$.
α) Υπολογίστε την τρέχουσα αξία του από τον τύπο των Black & Scholes.
β) Υπολογίστε το δέλτα και το βέγα του παραγώγου.

Άσκηση 50 Έστω ευρωπαϊκό παράγωγο μιας μετοχής με απόδοση στην ωρίμανση $f(S_T) = S_T^N$. Τιμολογήστε το παράγωγο βάσει του τύπου των Black & Scholes.

Άσκηση 51 Η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι $S_0 = 100$. Το ετήσιο άνευ κινδύνου επιτόκιο υπολογισμένο με συνεχή ανατοκισμό είναι r =4%, ενώ εκτιμάται ότι σ^2=0,16/έτος. Ένα ευρωπαϊκού τύπου παράγωγο της μετοχής ωριμάζει σε τρεις μήνες και η απόδοσή του δίνεται από τη σχέση:

$$f(S_T) = \frac{S_T}{K}(K - S_T)^+,$$

όπου $K = 100$.
α) Τιμολογήστε αυτό το παράγωγο βάσει του τύπου των Black & Scholes.
β) Συγκρίνετε τη σημερινή αξία αυτού του παραγώγου με αυτήν ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης της μετοχής με την ίδια ωρίμανση και τιμή άσκησης K. Εξαρτάται η απάντηση από το μοντέλο αγοράς που χρησιμοποιούμε;

Άσκηση 52 Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (για $\alpha > 1$)

$$x^\alpha = \alpha(\alpha - 1)\int_0^\infty (x - K)^+ K^{\alpha-2} dK$$

και το θεώρημα Fubini για να εναλλάξουμε την ολοκλήρωση και την αναμενόμενη τιμή, έχουμε

$$\mathbb{E}[S_T^\alpha] = \alpha(\alpha - 1)\int_0^\infty \mathbb{E}[(S_T - K)^+]K^{\alpha-2} dK.$$

Χρησιμοποιήστε αυτή την παρατήρηση και τον τύπο για την αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, προκειμένου να τιμολογήσετε το παράγωγο της προηγούμενης άσκησης.

Άσκηση 53 Ένα παράγωγο μιας μετοχής έχει απόδοση στην ωρίμανση

$$f(S_T) = \begin{cases} S_T^2/S_0, & \text{αν } S_t \geq K \\ 0, & \text{αν } S_t < K, \end{cases}$$

όπου $t \in (0, T)$. Τιμολογήστε αυτό το παράγωγο βάσει του υποδείγματος των Black & Scholes.

Άσκηση 54 Αποδείξτε ότι η μεταβλητότητα που τεκμαίρεται από ένα ευρωπαϊκό δικαιώμα αγοράς με ωρίμανση T και τιμή άσκησης K είναι ίδια με εκείνη που τεκμαίρεται από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με την ίδια ωρίμανση και τιμή άσκησης.

Άσκηση 55 Υπολογίστε την τεκμαρτή μεταβλητότητα μιας μετοχής, με προθεσμιακή τιμή €10, από ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με ωρίμανση 6 μήνες, τιμή άσκησης €10 και τιμή διαπραγμάτευσης €4.

Bibliography

[1] Kai Lai Chung. *A Course in Probability Theory.* 2nd Ed., Academic Press Inc., Orlando FL, USA, 1974.

[2] Jaksa Cvitanić and Fernando Zapatero. *Economics and Mathematics of Financial Markets.* The MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2004.

[3] John Hull. *Options, Futures and other Derivatives.* 8th Ed., Pearson Education, Harlow, UK, 2011.

[4] Robert A. Jarrow and Stuart Turnbull. *Derivative Securities.* 2nd Ed., South Western, 1999.

[5] Marek Musiela and Marek Rutkowski. *Martingale Methods in Financial Modelling.* Springer, Berlin, Germany, 1997.

[6] Sheldon M. Ross. *An Elementary Introduction to Mathematical Finance.* 3rd Ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2011.

[7] Steven Shreve. *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model.* Springer-Verlag, New York, NY, USA, 2004.

[8] R.J. Williams. *Introduction to the Mathematics of Finance.* American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2006.

Ευρετήριο όρων