ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VI (για την Δευτέρα 18/6)

Άσκηση 1 Ο αριθμός πελατών ανά 24ωρο σε μια ATM ακολουθεί κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο λ. Εκτιμήστε την λ με βάση τις παρακάτω 15 παρατηρήσεις 24ώρων: 16,22,18,11,14,20,14,25,11,10,18,16,15,12,19.

Άσκηση 2 Ο χρόνος εκτέλεσης παραγγελίας από μια εταιρεία είναι τ.μ. X (ημέρες) με κατανομή $G(\alpha, p)$. Με βάση τα δεδομένα 12, 12, 10, 14, 8, 15, 10, 14, 9, 10, να εκτιμηθούν με τη μέθοδο των ροπών οι παράμετροι α, p.

Άσκηση 3 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από ανεξάρτητες παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x e^{-\alpha x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

Βρείτε την ΕΜΠ της άγνωστης παραμέτρου $\alpha > 0$.

Άσκηση 4 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από ανεξάρτητες παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^{\alpha}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0, \end{cases}$$

όπου $\alpha > 0$ γνωστό και $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ.

Άσκηση 5 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από ανεξάρτητες παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \theta^2 (x+1)(1-\theta)^{-x} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

όπου $\theta \in (0,1)$ άγνωστη παράμετρος. Να βρείτε τις ΕΜΠ για τις παραμέτρους θ και $\alpha(\theta) = \frac{2(1-\theta)}{\theta}$.

Άσκηση 6 Έστω τυχαίο δείγμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από ανεξάρτητες παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} & , x > \theta_1 \\ 0 & , x \leq \theta_1. \end{cases}$$

α) Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ_1 αν η θ_2 είναι γνωστή παράμετρος.
β) Βρείτε την ΕΜΠ της παραμέτρου θ_2 αν η θ_1 είναι γνωστή παράμετρος.
γ) Βρείτε την ΕΜΠ των παραμέτρων θ_1, θ_2 αν είναι και οι δύο άγνωστες.

Άσκηση 7 Το πλάτος ενός παλμού είναι τ.μ. $X \sim \mathcal{N}(\mu, 4)$. Στην έξοδο ενός δέκτη μπορούμε να παρατηρήσουμε αν το X υπερβαίνει την τιμή 40 ή όχι. Αν σε 100 παρατηρήσεις το X υπερβαίνει την τιμή αυτή 80 φορές ποια είναι η εκτίμηση με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου μ;

Άσκηση 8 Οι $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $U(0, \theta)$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.
α) Δείξτε ότι η $Z = 2(X_1 + \cdots + X_n)/n$ είναι μια αμερόληπτη, συνεπής εκτιμήτρια της θ.
β) Ποια είναι η διασπορά της Z; γ) Βρείτε την κατανομή της τ.μ. $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.
δ) Να εξετάσετε αν η δειγματοσυνάρτηση U είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ.
ε) Ποια είναι η διασπορά της Y; στ) Ποια από αυτές τις εκτιμήτριες θεωρείτε καλύτερη και γιατί;

Άσκηση 9 Έστω τυχαίο διάνυσμα $(x_1, \ldots, x_n)$ από ανεξάρτητες παρατηρήσεις της τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = \begin{cases} \theta \frac{1}{x^{\theta+1}} & , x > 1 \\ 0 & , x \leq 1. \end{cases}$$

Βρείτε την ΕΜΠ για την άγνωστη παράμετρο θ.