ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V για την Δευτέρα 11/6/2012

Άσκηση 1 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, υπολογίστε την συνδιακύμανση των τ.μ. $U = \alpha X + \beta Y$ και $V = \beta X - \alpha Y$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2 Θεωρήστε X, Y, Z τ.μ. ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας με $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και Z ανεξάρτητη από τις X, Y. Υπολογίστε την $\mathrm{Cov}(XZ^2, Y + Z)$.

Άσκηση 3 Έχετε γράψει n διαφορετικές κάρτες σε φίλους σας και n φακέλους με τις διευθύνσεις τους. Ανακατεύετε τους φακέλους και βάζετε μέσα σε καθέναν μια κάρτα στην τύχη. Θέτουμε $X_i = 0$ ή 1, ανάλογα αν η i-στή κάρτα τοποθετήθηκε στο σωστό φάκελο και Y το πλήθος των καρτών που τοποθετήθηκαν στο σωστό φάκελο.
α) Υπολογίστε την συνδιακύμανση των X_i, X_j και σχολιάστε το πρόσημό της.
β) Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της Y.

Άσκηση 4 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$ βρείτε την από κοινού κατανομή των $U = X + Y$ και $V = X - Y$.

Άσκηση 5 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ποια είναι η κατανομή της $X + Y$; Βρείτε στην συνέχεια επαγωγικά την κατανομή που ακολουθεί ένας γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών τ.μ. με πραγματικούς συντελεστές.

Άσκηση 6 Δείξτε ότι αν το τυχαίο διάνυσμα $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ ακολουθεί τυπική κατανομή τότε και το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ομοίως ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή. Δηλαδή η $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbb{I}_2)$ μένει αναλλοίωτη από στροφές.

Άσκηση 7 Οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $Y \sim \chi^2(n)$. α) Υπολογίστε την κατανομή της $Z = \sqrt{Y/n}$. β) Υπολογίστε την από κοινού σ.π.π. των τ.μ. Z και X/Z. γ) Βρείτε την σ.π.π. της $U = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$. (Η κατανομή της U είναι γνωστή και ως κατανομή Student με n βαθμούς ελευθερίας.)

Άσκηση 8 200 αντιστάσεις είναι συνδεμένες σε σειρά. Η τιμή κάθε αντίστασης (σε Ohm) είναι μια τ.μ. με μέση τιμή 10 και τυπική απόκλιση 2. Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα η συνολική αντίσταση να είναι τουλάχιστον 1,9 KOhm.

Άσκηση 9 Ένας παίκτης του μπάσκετ έχει πιθανότητα ευστοχίας 0,75 όταν εκτελεί ελεύθερες βολές και 0,005 όταν σουτάρει από το κέντρο με τα μάτια δεμένα. Αν εκτελέσει 100 βολές υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα οι εύστοχες βολές να είναι μεταξύ 70 και 85. Αν σουτάρει 250 φορές από το κέντρο με δεμένα μάτια υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα να ευστοχήσει σε τουλάχιστον 3 προσπάθειες.

Άσκηση 10 Οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq \mu\Big].$$

Χρησιμοποιήστε το παραπάνω αποτέλεσμα για να υπολογίστε το όριο $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{3n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{3n}{k} 2^k.$