ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V για την Δευτέρα 28/5/2012

Άσκηση 1 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ. X είναι $f(x) = Ax^{-4}$ για $x > 2$, και μηδέν διαφορετικά. Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς A, και στη συνέχεια τη μέση τιμή και τη διασπορά της X. Για ποιές τιμές του r είναι η ροπή τάξης r πεπερασμένη;

Άσκηση 2 Η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X είναι η $F(x) = e^{-e^{-x}}$. Ποια είναι η σ.π.π. της X; Υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[e^{\frac{X}{2}}\big]$.

Άσκηση 3 Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός προϊόντος είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{1200}e^{-\frac{x}{1200}},\ x > 0.$$

Κάθε μονάδα του προϊόντος έχει κόστος κατασκευής €5.000, πωλείται προς €7.000, και συνοδεύεται από εγγύηση για τη διάρκεια ζωής της. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι μικρότερη από 1000 ώρες το αντίτιμο της αγοράς επιστρέφεται στον αγοραστή, ενώ το προϊόν πωλείται προς €500 ως παλαιό υλικό.
α) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος.
β) Ποια διάρκεια ζωής πρέπει να προβλέπει η εγγύηση ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι τουλάχιστον €800;

Άσκηση 4 α) Αν η X είναι μια τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big[X > k\big]$.
β) Αν η X είναι μια μη αρνητική συνεχής τ.μ. αποδείξτε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathbb{P}\big[X > t\big]dt$.

Άσκηση 5 Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ εκφράστε την $F(x) = \mathbb{P}\big[X \le x \,|X \ge \mu\big]$ συναρτήσει της σ.κ.π. Φ της τυπικής κανονικής κατανομής. Από τους πίνακες για την Φ ή με τη βοήθεια του υπολογιστή βρείτε (συναρτήσει των μ, σ) το μικρότερο δυνατό $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) \ge 0.99$.

Άσκηση 6 Το μέτρο X της ταχύτητας ενός μορίου αερίου μάζας m σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι μια τ.μ. με κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συγκεκριμένα η σ.π.π. της δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-\beta x^2} & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\beta = \frac{m}{2KT}$ και α είναι μια σταθερά κανονικοποίησης (K είναι η σταθερά του Boltzmann.)
α) Υπολογίστε τη σταθερά α.
β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της X.
γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας $E = \frac{1}{2}mX^2$.
(Υπόδειξη: $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$ και $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.)

Άσκηση 7 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{για } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά c.
β. Υπολογίστε την περιθώρια κατανομή των X, Y.

Άσκηση 8 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^{\alpha}y^{\alpha+1} & \text{για } (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

α. Υπολογίστε την σταθερά α.
β. Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \leq 1/3\}$, $\{Y > 2X\}$, $\{X + Y \geq 1\}$.

Άσκηση 9 Αν η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ εκφράστε την $F(x) = \mathbb{P}\big[X \leq x \,|X \geq \mu\big]$ συναρτήσει της σ.κ.π. Φ της τυπικής κανονικής κατανομής. Από τους πίνακες για την Φ ή με τη βοήθεια του υπολογιστή βρείτε (συναρτήσει των μ, σ) το μικρότερο δυνατό $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) \geq 0.99$.

Άσκηση 10 Θεωρούμε τις τ.μ. X, Y με διασπορά $V(X) = V(Y) = 1$. Η διασπορά του αθροίσματός τους είναι $V(X+Y) = 3$. Μπορεί οι X, Y να είναι ανεξάρτητες; Αν οι X και $X - \alpha Y$ είναι ανεξάρτητες τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την σταθερά α;

Άσκηση 11 Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ενός πελάτη από δύο εξυπηρετητές Α,Β είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους α και β αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή 0 οι Α,Β είναι ελεύθεροι και δέχονται από ένα πελάτη. Υπολογίστε την πιθανότητα να τελειώσει πρώτα η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται από τον Α. Ποια κατανομή ακολουθεί ο χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη που τελειώνει πρώτος;

Άσκηση 12 Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με τυπική κανονική κατανομή, ποια κατανομή ακολουθεί η X/Y;