

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**  
**Σ.Ε.Μ.Φ.Ε ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012**  
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ για την Πέμπτη 10/5/2012

**Άσκηση 1** Η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κατανομή  $Po(\lambda)$ . Υπολογίστε τις  $\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]$  και  $E[X(X-1)(X-2)(X-3)]$  και χρησιμοποιήστε τις για να υπολογίσετε τις  $\mathbb{E}[X^3]$  και  $\mathbb{E}[X^4]$ .

**Άσκηση 2** Σε μια παρτίδα πόκερ κάθε παίκτης παίρνει αρχικά 5 φύλλα από τα 52 της τράπουλας. Λέμε ότι ένας παίκτης έχει καρέ αν έχει 4 ίδια φύλλα (ένα από κάθε κατηγορία), π.χ. 4 άσους, 4 δεκάρια κ.ο.κ. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των παρτίδων που πρέπει να παίξει κάποιος μέχρι να του μοιραστεί ένα καρέ; Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα καρέ σε τόσες παρτίδες;

**Άσκηση 3** Μια διακριτή τ.μ.  $X$  παίρνει τιμές στο  $\mathbb{N}$  και έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας  $p_n = Cn^{-s}$  για κάποια σταθερά  $C$  και κάποιο  $s > 1$ . Ποια πρέπει να είναι η  $C$  (σαν συνάρτηση του  $s$ ); Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η  $X$  να είναι πολλαπλάσιο του 7;

**Άσκηση 4** Στρίβουμε ένα νόμισμα 4 φορές και συμβολίζουμε με  $X$  το μήκος της μεγαλύτερης ακολουθίας από ίδια διαδοχικά αποτελέσματα. Ποιες είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής της  $X$ ;

**Άσκηση 5** Η πιθανότητα νίκης μας σε μια παρτίδα ενός παιχνιδιού είναι  $p$ . Πριν από κάθε παρτίδα έχουμε δικαίωμα να στοιχηματίσουμε ένα ποσό, το οποίο διπλασιάζεται αν κερδίσουμε την παρτίδα και χάνεται αν χάσουμε την παρτίδα. Ξεκινάμε στοιχηματίζοντας 1 στην πρώτη παρτίδα και κάθε φορά που χάνουμε διπλασιάζουμε το στοίχημά μας ώσπου να κερδίσουμε μια παρτίδα. Έχουμε δει ότι με πιθανότητα 1 αυτό θα συμβεί σε πεπερασμένο πλήθος παρτίδων. Ποιο θα είναι το συνολικό μας κέρδος από την αρχή του παιχνιδιού μέχρι και την πρώτη μας νίκη; Αν η τυχαία μεταβλητή  $K$  είναι το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι την πρώτη μας νίκη, ποια κατανομή ακολουθεί η  $K$ ; Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε αρχική περιουσία  $2^n - 1$  οπότε δεν μπορούμε να αντέξουμε περισσότερες από  $n$  χαμένες παρτίδες. Ποια είναι η πιθανότητα να χάσουμε όλη μας την περιουσία πριν προλάβουμε να κερδίσουμε κάποια παρτίδα; Έστω  $K_n$  το πλήθος των παρτίδων που παίζουμε μέχρι είτε να σημειώσουμε μια νίκη, είτε να τελειώσει η περιουσία μας, δηλαδή  $K_n = \min\{K, n\}$ . Ποια είναι η κατανομή του κέρδους μας τη στιγμή  $K_n$ ;

**Άσκηση 6** Αν  $F$  είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ.  $X$ , ποιά είναι η συνάρτηση κατανομής των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών; α)  $Y = aX + b$ , β)  $Z = X^+ = \max\{0, X\}$ , γ)  $E = e^{-X}$ .

**Άσκηση 7** Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συναρτήσεις κατανομής; α)  $F(x) = e^{-e^{-x}}$ , β)  $G(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ , γ)  $E(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ , δ)  $H(x) = (1 - e^{-x})^+$

**Άσκηση 8** Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστούν όλες οι όψεις του;