ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι για την Πέμπτη 29/3

***Άσκηση* 1** Θεωρήστε τρία ενδεχόμενα Α,Β,Γ και γράψτε εκφράσεις για το ενδεχόμενο από τα Α,Β,Γ

α) να συμβεί μόνο το Α,
β) να συμβούν το Α και το Β αλλά όχι το Γ,
γ) να συμβούν και τα τρία,
δ) να συμβεί τουλάχιστον ένα,
ε) να συμβούν τουλάχιστον δύο,
στ) να συμβεί ακριβώς ένα,
ζ) να συμβούν ακριβώς δύο,
η) να μη συμβεί κανένα,
ϑ) να συμβούν το πολύ δύο.

***Άσκηση* 2** Στο παιχνίδι του μπριτζ τα 52 φύλλα της τράπουλας μοιράζονται (από 13) σε 4 παίκτες, N, S, E, W. Ας συμβολίζουμε με N_k το ενδεχόμενο ο παίκτης N να πάρει τουλάχιστον k άσους, και αντίστοιχα για τους άλλους παίκτες. Τι μπορούμε να πούμε για το πλήθος των άσων που έχει ο W σε κάθενα από τα παρακάτω ενδεχόμενα.

α) W_1^c,
β) $N_1 \cap S_2 \cap W_1$,
γ) $N_2 \cap S_2$,
δ) $(N_2 \cup S_2) \cap E_2$,
ε) $W_2 \setminus W_3$,
στ) $N_1^c \cap S_1^c \cap E_1^c$.

***Άσκηση* 3** Γράψτε τις 24 δυνατές διατάξεις των ψηφίων 1,2,3 και 4. Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{24}$ σε καθεμία από αυτές και συμβολίσουμε με A_i το ενδεχόμενο το ψηφίο i να εμφανίζεται στη θέση i, υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2$ και επαληθεύστε την ταυτότητα

$$\mathbb{P}\big[A_1 \cup A_2\big] = \mathbb{P}\big[A_1\big] + \mathbb{P}\big[A_2\big] - \mathbb{P}\big[A_1 \cap A_2\big].$$

***Άσκηση* 4** Δύο ενδεχόμενα A, B έχουν πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα. Ποιά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η $\mathbb{P}\big[A \cap B\big]$; Δώστε παραδείγματα χώρων πιθανότητας και ενδεχομένων A, B όπου η πιθανότητα της τομής λαμβάνει τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή.

***Άσκηση* 5** Θεωρήστε το χώρο πιθανότητας $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ : a, b, c \in \{0,1\} \right\}$.
Αν

$$\mathbb{P}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right] = K(a+b+c)$$

όπου K είναι μια σταθερά, υπολογίστε την Κ και στην συνέχεια την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{P \in \Omega : \text{ ο } P \text{ είναι αντιστρέψιμος}\}$.

***Άσκηση* 6** Τρεις παίκτες, Α,Β,Γ παίζουν σε ένα τουρνουά ταβλιού. Αρχικά παίζουν ο Α με τον Β και ο Γ κάθεται. Στη συνέχεια, ο νικητής κάθε παρτίδας παίζει με τον παίκτη που καθόταν στην προηγούμενη παρτίδα, ώσπου ένας παίκτης να

κερδίσει δύο διαδοχικές παρτίδες, οπότε κερδίζει και το παιχνίδι.
α) Περιγράψτε το χώρων των δυνατών εκβάσεων του παιχνιδιού.
β) Αν αποδώσουμε πιθανότητα $\frac{1}{2^k}$ σε κάθε έκβαση που το παιχνίδι διαρκεί k παρτίδες υπολογίστε την πιθανότητα νίκης κάθε παίκτη.

Άσκηση 7 Ένα δοχείο έχει 10 κόκκινες και 5 μαύρες σφαίρες. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα, βλέπουμε το χρώμα της και την επιστρέφουμε στο δοχείο μαζί με άλλες 3 σφαίρες του ίδιου χρώματος. Στη συνέχεια επιλέγουμε ακόμη μια σφαίρα από το δοχείο.
α) Ποια είναι η πιθανότητα η δεύτερη σφαίρα να είναι κόκκινη;
β) Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη σφαίρα να ήταν κόκκινη αν η δεύτερη σφαίρα είναι μαύρη;

Άσκηση 8 Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας αποτελείται από ένα πομπό και ένα δέκτη. Για τη μετάδοση ενός bit ο πομπός στέλνει ένα σήμα που αντιστοιχεί είτε στο ψηφίο 0 είτε στο ψηφίο 1. Ο δέκτης λαμβάνει το σήμα (παραμορφωμένο ενδεχομένως) και προσπαθεί να ερμηνεύσει το ψηφίο εκπομπής. Θεωρήστε τα παρακάτω ενδεχόμενα:
$\Pi_0 = \{\text{ο πομπός εκπέμπει } 0\}$, $\Delta_0 = \{\text{ο δέκτης ερμηνεύει } 0\}$,
$\Pi_1 = \{\text{ο πομπός εκπέμπει } 1\}$, $\Delta_1 = \{\text{ο δέκτης ερμηνεύει } 1\}$.
Υποθέτουμε ότι $\mathbb{P}\big[\Pi_0\big] = \frac{4}{5}$, $\mathbb{P}\big[\Delta_0 \,\big|\Pi_0\big] = \frac{99}{100}$, και $\mathbb{P}\big[\Delta_1 \,\big|\Pi_1\big] = \frac{97}{100}$.
α) Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί σφάλμα κατά τη μετάδοση;
β) Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει συμβεί σφάλμα, αν ο δέκτης έχει ερμηνεύσει το ψηφίο μετάδοσης ως 1;