



Εφαρμοσμένη Στατιστική- 28 Αυγούστου 2012

Άσκηση 1 (25 μονάδες)

- α) Αν ρίξουμε μια φορά ένα τίμιο ζάρι ποια είναι η αναμενόμενη τιμή  $\mu$  και ποια η διασπορά  $\sigma^2$  του αποτελέσματος;  
β) Ρίχνουμε  $n = 105$  φορές ένα τίμιο ζάρι. Αν  $S_n$  είναι το άθροισμα όλων των ζαριών, υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα  $p$  του ενδεχομένου  $\{S_n \leq 350\}$ .  
γ) Πώς πρέπει να διαλέξουμε το  $k \in \mathbb{N}$  ώστε  $\mathbb{P}[S_n \leq k] \approx 0,95$ ;  
δ) Αν επαναλάβουμε  $m = 5$  φορές το πείραμα του ερωτήματος (β), υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα του ενδεχομένου σε τουλάχιστον μια από τις 5 προσπάθειες το άθροισμα των ζαριών να μην ξεπεράσει το 350.

Άσκηση 2 (25 μονάδες)

Δίνεται η από κοινού σ.π.π. των θετικών τ.μ.  $X, Y$

$$f(x, y) = C(\lambda)x^3ye^{-\lambda x(1+y)}, \quad x, y > 0,$$

όπου  $\lambda$  είναι μια άγνωστη θετική παράμετρος και  $C(\lambda)$  μια θετική σταθερά.

- α) Δείξτε ότι  $C(\lambda) = \lambda^4$ .  
β) Εκτιμήστε την άγνωστη παράμετρο  $\lambda$  από ένα τυχαίο δείγμα  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_\nu, y_\nu)\}$  των  $(X, Y)$ , με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.  
γ) Υπολογίστε την από κοινού κατανομή των  $X, Z$  όπου  $Z = XY$  και συμπεράνετε ότι οι  $X, Z$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Άσκηση 3 (30 μονάδες)

Ο χρόνος αναμονής  $T$  (σε sec) μέχρι τη διάσπαση ενός ραδιενεργού πυρήνα ακολουθεί εκθετική κατανομή  $Exp(\lambda)$ , όπου  $\lambda$  είναι μια άγνωστη θετική παράμετρος.

- α) Υπολογίστε σαν συνάρτηση του  $\lambda$  την πιθανότητα  $p$  του ενδεχομένου ένας τέτοιος πυρήνας να μην έχει διασπαστεί μετά από  $t$  sec, δηλ.  $p = p(\lambda) = \mathbb{P}[T > t]$ .  
β) Αρχικά έχουμε  $N$  τέτοιους πυρήνες που διασπώνται ανεξάρτητα και ορίζουμε την τ.μ.  $Q_N(t)$  ως το κλάσμα των πυρήνων που δεν έχουν διασπαστεί μετά από  $t$  sec, δηλ.

$$Q_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i,$$

όπου  $X_i = 1$  στο ενδεχόμενο  $\{T_i > t\}$  και 0 διαφορετικά, δείξτε ότι η  $Q_N(t)$  είναι η ΕΜΠ της παραμέτρου  $p$ .

- γ) Υπολογίστε την ΕΜΠ  $\hat{\lambda}_N$  της άγνωστης παραμέτρου  $\lambda$ .  
δ) Δείξτε ότι με πιθανότητα 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(t) = e^{-\lambda t}.$$

ε) Με τη βοήθεια του κεντρικού οριακού θεωρήματος υπολογίστε την οριακή κατανομή της τ.μ.  $\sqrt{N}(Q_N(t) - e^{-\lambda t})$  και χρησιμοποιήστε τα παραπάνω αποτελέσματα για να βρείτε ένα προσεγγιστικό 0,99-δ.ε. για την άγνωστη παράμετρο  $\lambda$ . Υπολογίστε προσεγγιστικά τα εύρος αυτού του διαστήματος αν  $N = 10^{22}$  και  $Q_N(1) = 1/2$ .

Άσκηση 4 (20 μονάδες)

Ένα εργαστήριο χρησιμοποιεί δύο μεθόδους για τη χρονολόγηση οστών. Για το σφάλμα κάθε μεθόδου υποθέτουμε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, 2$ . Έτσι, αν ένα οστό έχει πραγματική ηλικία  $\ell$ , τότε αν μετρήσουμε την ηλικία του με την μέθοδο  $i \in \{1, 2\}$  θα πάρουμε σαν αποτέλεσμα  $L_i = \ell + X_i$ ,  $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ . Υποθέτουμε επίσης ότι τα σφάλματα σε διαφορετικές μετρήσεις είναι ανεξάρτητα. Ένας ερευνητής θέλει να ελέγξει την υπόθεση ότι οι δύο μέθοδοι είναι εξίσου ακριβείς, δηλαδή  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , έναντι της εναλλακτικής  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ , με επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 0,05$ . Για το σκοπό αυτό τεμαχίζει ένα οστό σε 12 μέρη και χρονολογεί 6 από αυτά με τη μία μέθοδο και 6 με την άλλη. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων του σε έτη είναι

Μέθοδος 1	1224	1295	1264	1283	1276	1314
Μέθοδος 2	1057	1426	1284	1360	1338	1233

Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα του ελέγχου βάσει των παραπάνω μετρήσεων;

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Συνάρτηση Γάμμα:  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$

Κατανομή Γάμμα  $G(\alpha, p)$ : σ.π.π.  $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0.$

Κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ : σ.π.π.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma.κ.π. \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

Διωνυμική κατανομή  $b(n, q)$ : σ.μ.π.  $p(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}.$

Χρήσιμες ιδιότητες

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$
- Αν  $X_i \sim G(\alpha, p_i)$  ανεξάρτητες, τότε  $\sum X_i \sim G(\alpha, \sum p_i).$
- $Exp(\alpha) = G(\alpha, 1).$
- Αν  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ανεξάρτητες, τότε  $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n) = G\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right).$
- Αν  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  ανεξάρτητες, τότε  $\sigma^{-2}(n-1)S^2 = \sigma^{-2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$  και ανεξάρτητη της  $\bar{X}.$
- Αν  $X \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad nY \sim \chi^2(n)$  και  $X, Y$  ανεξάρτητες τότε  $\frac{X}{\sqrt{Y}} \sim t(n)$  (Student).
- Αν  $nX \sim \chi^2(n), \quad mY \sim \chi^2(m)$  και  $X, Y$  ανεξάρτητες τότε  $\frac{X}{Y} \sim F(n, m)$  (Snedecor.)

Στατιστικά για τον έλεγχο μέσου κανονικών πληθυσμών: Γνωστή διασπορά  $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  Άγνωστη διασπορά  $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

Σημεία  $x$  όπου η σ.κ.π. φτάνει μια κρίσιμη τιμή

Κατανομή	$F(x) = 0,95$	$F(x) = 0,975$	$F(x) = 0,99$	$F(x) = 0,995$
$\chi^2(11)$	19,675	21,92	24,725	26,757
$\chi^2(12)$	21,026	23,337	26,217	28,3
$F(5, 5)$	5,0503	7,1464	10,967	14,94
$F(6, 6)$	4,2839	5,8198	8,4661	11,073
$\mathcal{N}(0, 1)$	1,6449	1,96	2,3263	2,5758

Τιμές  $F(x)$  της τυπικής κανονικής σ.κ.π. για διάφορες τιμές του  $x$ :

$x$	0	0,9714	0,9857	1	1,96	2	3	3,4157	17,5
$F(x)$	0,5	0,8343	0,8379	0,8413	0,975	0,9772	0,9887	0,9997	$\approx 1$

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά  
**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**