*ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ*

*ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ*

*ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

# Εφαρμοσμένη Στατιστική- 4 Ιουλίου 2012

**Άσκηση 1** (25 μονάδες)

Η διάρκεια ζωής ενός ανταλλακτικού σε ώρες είναι τ.μ. $X$ με σ.π.π.

$$f(x) = C(\alpha)e^{-\alpha x^{2/3}}, \qquad x > 0.$$

α) Δείξτε ότι $C(\alpha) = \frac{4\alpha^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}$. (Υπόδειξη: κάντε τον μετασχηματισμό $y = \alpha x^{2/3}$.)
β) Υπολογίστε την μέση τιμή $\mu$ και την διασπορά $\sigma^2$ της $X$ συναρτήσει του $\alpha$.
γ) Υπολογίστε την ΕΜΠ της άγνωστης παραμέτρου $\alpha$ από ένα τυχαίο δείγμα της διάρκειας ζωής $n$ ανταλλακτικών.

**Άσκηση 2** (25 μονάδες)

Οι $X, Y$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{E}xp(\lambda)$.
α) Ποια είναι η από κοινού σ.π.π. των $X, Y$;
β) Βρείτε την από κοινού σ.π.π. των τ.μ. $U = X/Y$ και $V = Y$.
γ) Ποια είναι η σ.π.π. της τ.μ. $U$;
δ) Υπολογίστε την πιθανότητα του ενδεχομένου $U \in [\frac{1}{2}, 2]$.
ε) Δείξτε ότι η τ.μ. $1/U$ ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η $U$.

**Άσκηση 3** (20 μονάδες)

Ένας καταστηματάρχης ισχυρίζεται ότι οι συσκευασίες ζάχαρης που πουλάει περιέχουν 1000 gr. Το πραγματικό βάρος κάθε συσκευασίας είναι μια τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Μετρήσατε το βάρος (σε gr) 10 πακέτων και βρήκατε τις ακόλουθες τιμές:

$$990, \quad 992, \quad 1004, \quad 975, \quad 994, \quad 995, \quad 1003, \quad 997, \quad 992, \quad 998.$$

α) Κατασκευάστε ένα συμμετρικό 0,95-διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή $\mu$.
β) Ελέγξτε με επίπεδο σημαντικότητας 0,05 την υπόθεση $\mu = 1000$ έναντι της εναλλακτικής $\mu \neq 1000$.

**Άσκηση 4** (30 μονάδες)

Θέλετε να εκτιμήσετε το ποσοστό των ανθρώπων που κάνουν ειλικρινή φορολογική δήλωση. Στην περυσινή σας απόπειρα, στην ερώτησή "κάνατε ειλικρινή φορολογική δήλωση;" όλοι απάντησαν ΝΑΙ. Υποπτεύεστε ότι μπορεί κάποιοι να απάντησαν ψέματα, γιαυτό φέτος αποφασίσατε να ακολουθήσετε μια διαφορετική στρατηγική. Θα δίνετε στους ερωτώμενους ένα ζάρι το οποίο θα ρίχνουν κρυφά από εσάς. Αν φέρουν 1 ή 6 θα απαντούν στην ερώτηση σας ειλικρινά, ενώ αν φέρουν 2,3,4 ή 5 θα απαντούν ψέματα. Σκέφτεστε ότι έτσι κανείς δεν θα φοβάται να απαντήσει ΟΧΙ, αφού αυτό μπορεί να συμβεί επειδή έκανε μεν ειλικρινή δήλωση, αλλά έφερε 2,3,4 ή 5, κάτι που εσείς δεν μπορείτε να ξέρετε.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα $q$ να απαντήσει κάποιος στην ερώτησή σας ΝΑΙ, σαν συνάρτηση του ποσοστού $p$ των ανθρώπων που έκαναν ειλικρινή δήλωση.
β) Υπολογίστε την πιθανότητα να έκανε ειλικρινή δήλωση κάποιος που έχει απαντήσει στην ερώτησή σας ΝΑΙ.
γ) Θα κάνετε την ερώτηση σε $n = 2400$ τυχαία επιλεγμένα άτομα. Ποια κατανομή και με ποιες παραμέτρους ακολουθεί ο αριθμός $N$ των ατόμων που απαντούν ΝΑΙ;
δ) Υπολογίστε την ΕΜΠ $\hat{q}$ της παραμέτρου $q$ από το πλήθος $N$ των θετικών απαντήσεων.
ε) Υπολογίστε την ΕΜΠ $\hat{p}$ της παραμέτρου $p$ από το πλήθος $N$ των θετικών απαντήσεων.
στ) Αν στην ερώτησή σας απάντησαν ΝΑΙ 960 άτομα βρείτε ένα προσεγγιστικό $0,90$-διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παράμετρο $p$.

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Συνάρτηση Γάμμα: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad x > 0.$

Κατανομή Γάμμα $G(\alpha, p)$: σ.π.π. $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0.$

Κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$

Διωνυμική κατανομή $b(n, q)$: σ.μ.π. $p(k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}.$

Χρήσιμες ιδιότητες

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$
- Αν $X_i \sim G(\alpha, p_i)$ ανεξάρτητες, τότε $\sum X_i \sim G(\alpha, \sum p_i)$.
- $\mathcal{E}xp(\alpha) = G(\alpha, 1)$.
- Αν $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ ανεξάρτητες, τότε $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n) = G(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$.
- Αν $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητες, τότε $\sigma^{-2}(n-1)S^2 = \sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ και ανεξάρτητη της $\bar{X}$.
- Αν $X \sim \mathcal{N}(0,1),\ nY \sim \chi^2(n)$ και $X, Y$ ανεξάρτητες τότε $\frac{X}{\sqrt{Y}} \sim t(n)$ (Student).
- Αν $nX \sim \chi^2(n),\ mY \sim \chi^2(m)$ και $X, Y$ ανεξάρτητες τότε $\frac{X}{Y} \sim F(n,m)$ (Snedecor.)

Στατιστικά για τον έλεγχο μέσου κανονικών πληθυσμών: Γνωστή διασπορά $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ Άγνωστη διασπορά $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

Σημεία $x$ όπου η σ.κ.π. φτάνει μια κρίσιμη τιμή

| Κατανομή | $F(x) = 0,95$ | $F(x) = 0,975$ | $F(x) = 0,99$ | $F(x) = 0,995$ |
|---|---|---|---|---|
| $t(9)$ | 1,8331 | 2,2622 | 2,8214 | 3,2498 |
| $t(10)$ | 1,8125 | 2.2281 | 2,7638 | 3,1693 |
| $\mathcal{N}(0,1)$ | 1,6449 | 1,96 | 2,3263 | 2,5758 |

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**