4 Αξιωματική συνολοθεωρία

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε σε κάποια αξιώματα καθώς και στην ανάγκη να **υπάρξουν** αξιώματα ώστε να γίνονται δεκτά μόνον τα σύνολα που η ύπαρξή τους προκύπτει από αυτά με λογική παραγωγή. Το πρότυπο κάθε αξιωματικής θεωρίας είναι η Γεωμετρία του Ευκλείδη όπου από κάποιες απλές αδιαμφισβήτητες αρχές (τα αξιώματα) προκύπτουν όλες οι αλήθειες της Γεωμετρίας. Σε πλήρη αναλογία μ'αυτό το πρότυπο ο Zermelo διατύπωσε τα αξιώματα της συνολοθεωρίας και αργότερα ο Fræenkel με μια δικιά του συμπλήρωση έδωσε την τελική τους μορφή.

Οριστικές συνθήκες — Η γλώσσα της συνολοθεωρίας

Για να διατυπώσουμε τα αξιώματα πρέπει να είμαστε σε θέση να χρησιμοποιούμε σχέσεις - συνθήκες που αφορούν στα αντικείμενα - σύνολα π.χ. για να σχηματίσουμε το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τη συνθήκη «το x είναι μία συγλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$». Και επειδή στη συνολοθεωρία ασχολούμαστε με όλες τις ιδιότητες των συνόλων, όσο γενικές και αν είναι αυτές, θα πρέπει να εξετάσουμε και τον τρόπο με τον οποίο διατυπώνουμε τις οποιεσδήποτε συνθήκες δηλ να εξετάσουμε ποιά είναι η γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Οι συνθήκες ορίζουν ιδιότητες των αντικειμένων-συνόλων. Υπάρχουν μονομελείς συνθήκες, διμελείς συνθήκες κ.ο.κ. Αν P είναι μία μονομελής συνθήκη γράφουμε $P(x)$ για να εκφράσουμε ότι το αντικείμενο x έχει την ιδιότητα P της συνθήκης, $\neg P(x)$ για να πούμε ότι το x δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Παρομοίως γράφουμε $P(x,y), P(x,y,z), \ldots, P(x_1,\ldots,x_n)$ για διμελείς, τριμελείς και n-μελείς συνθήκες. Επιθυμούμε οι συνθήκες να είναι, όπως λέμε, *οριστικές* δηλ. να μπορεί να είναι καθορισμένο χωρίς αμφισβήτηση πότε η συνθήκη μπορεί να αληθεύει και πότε όχι. Αν δεν ορίσουμε ακριβώς πότε μια συνθήκη είναι οριστική μπορεί να οδηγηθούμε σε περίεργες καταστάσεις-παράδοξα.

Το παράδοξο του Berry

Εστω A το σύνολο των φυσικών αριθμών που μπορούν να οριστούν με μία πρόταση της ελληνικής γλώσσας που περιέχει λιγότερα από 300 γράμματα. A είναι πεπερασμένο επειδή υπάρχει μόνον ένα πεπερασμένο πλήθος τέτοιων προτάσεων ($< 50^{300}$). Αρα υπάρχει ένας αριθμός που δεν περιέχεται στο A. Εστω $\mathbf{r}$ ο μικρότερος αριθμός που δεν είναι στο A. Τότε «x είναι ο μικρότερος αριθμός που δεν ορίζεται με μία πρόταση της ελληνικής γλώσσας που περιέχει λιγότερες από 300 λέξεις» είναι μία συνθήκη $P(x)$ που ορίζει τον αριθμό $\mathbf{r}$ δηλ. ισχύει $P(\mathbf{r})$ και $\mathbf{r}$ είναι ο μοναδικός αριθμός που την ικανοποιεί. Αλλά αυτή η συνθήκη, ως πρόταση της ελληνικής γλώσσας, ορίζει τον $\mathbf{r}$ με λιγότερες από 300 λέξεις, άρα $\mathbf{r} \in A$.

Για να παρακάμψουμε τέτοιες ασάφειες αποφασίζουμε να εκφράσουμε τις συνθήκες σε μια γλώσσα αυστηρά προσδιορισμένη. Θα θεωρούμε ότι η συνθήκη είναι οριστική μόνον αν μπορούμε να την γράφουμε αρχίζοντας από συνθήκες της μορφής $x \in y$ ή $x = y$ και χρησιμοποιώντας τους λογικούς συνδέσμους και τους ποσοδείκτες. Δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε τις οριστικές συνθήκες χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό.

Ορισμός 4.1 *Υποθέτουμε ότι τα x και y αναφέρονται σε σύνολα. Τα ακόλουθα δίνουν τον γενικευμένο επαγωγικό ορισμό της οριστικής συνθήκης.*

1. *Κάθε συνθήκη της μορφής $x \in y$ και $x = y$ είναι οριστική.*

2. *Αν Θ και Ψ είναι οριστικές συνθήκες τότε*

$$(\Theta \wedge \Psi), (\Theta \vee \Psi), \neg\Theta, (\Theta \to \Psi), (\Theta \leftrightarrow \Psi), \forall x\Theta, \exists x\Theta$$

   είναι οριστικές συνθήκες.

3. *Οριστική συνθήκη είναι μόνον αυτή που γράφεται με διαδοχικές εφαρμογές των προηγουμένων βημάτων 1 και 2.*

Παραδείγματα

1. Η συνθήκη «το x είναι υποσύνολο του y» δηλ. το $x \subseteq y$ είναι οριστική διότι $x \subseteq y$ γράφεται ως $\forall z(z \in x \to z \in y)$ δηλ. γράφεται με τη χρήση των $z \in x$ και $z \in y$, τη χρήση του λογικού συνδέσμου $\to$ και του ποσοδείκτη $\forall z$.

2. Η συνθήκη $x = \{y\}$ είναι οριστική. Κι' αυτό διότι είναι ισοδύναμη με το $\forall t(t \in x \leftrightarrow t = y)$

3. Η συνθήκη $x = \{y, z\}$ είναι οριστική διότι είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\forall t(t \in x \leftrightarrow t = y \vee t = z)$.

4. Η συνθήκη $x = \langle y, z\rangle$ είναι οριστική διότι είναι ισοδύναμη με την $x = \{\{y\}, \{y, z\}\}$ και αυτή είναι ισοδύναμη με την $\exists z \exists w(z = \{y\} \wedge w = \{y, z\} \wedge x = \{z, w\})$ και οι συνθήκες $z = \{y\}, w = \{y, z\}, x = \{z, w\}$ είναι όλες οριστικές.

Κλάσεις

Εάν $P(x)$ είναι μία μονομελής οριστική συνθήκη τότε η συλλογή $\{x \mid P(x)\}$ των αντικειμένων που ικανοποιούν τη συνθήκη P ονομάζεται κλάση. Είδαμε (παράδοξο του Russell) ότι κάθε κλάση δεν είναι σύνολο. Τα αξιώματα της συνολοθεωρίας θα μας παρέχουν τις αρχές με βάση τις οποίες θα μπορούμε να αποδεικνύουμε ότι κάποια σύνολα υπάρχουν. Θα καλούμαστε να αποδείξουμε (ή να δεχθούμε ως αξίωμα) μερικές φορές ότι αν $P(x)$ είναι οριστική συνθήκη τότε υπάρχει ένα σύνολο A για το οποίο ισχύει $\forall x(x \in A \leftrightarrow P(x))$. Τότε ισοδύναμα θα λέμε ότι η κλάση $\{x \mid P(x)\}$ είναι σύνολο π.χ. η κλάση $\{x \mid x \notin x\}$ δεν είναι σύνολο ενώ αν x και y είναι σύνολα η κλάση $\{z \mid z = x \vee z = y\}$ είναι σύνολο (βλέπε αξίωμα του ζεύγους), το σύνολο $\{x, y\}$.

Τα Αξιώματα Zermelo-Frænkel της Θεωρίας Συνόλων

A1. *Αξίωμα της έκτασης*: Για κάθε σύνολο A και κάθε σύνολο B

$$A = B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Το αξίωμα μας λέει ότι αν A και B έχουν τα ίδια στοιχεία τότε ταυτίζονται. Ή διαφορετικά ότι $A \neq B$ μόνον στην περίπτωση που υπάρχει ένα στοιχείο του ενός που δεν είναι στοιχείο του άλλου.

A2. *Αξίωμα του κενού συνόλου*: Υπάρχει ένα σύνολο $\emptyset$ έτσι ώστε $\forall x\,(x \notin \emptyset)$ [δηλ. το $\emptyset$ δεν έχει κανένα στοιχείο].

Με άλλη διατύπωση το αξίωμα του κενού συνόλου λέει ότι $\exists z \forall x (x \notin z)$. Το κάθε τέτοιο z σύμφωνα με το αξίωμα της έκτασης είναι μοναδικό και το μοναδικό τέτοιο σύνολο το συμβολίζουμε με $\emptyset$.

Και στα αξιώματα που ακολουθούν, πάλι σύμφωνα με το αξίωμα της έκτασης, το σύνολο του οποίου η ύπαρξη εξασφαλίζεται μέσω του εκάστοτε αξιώματος θα είναι μοναδικό.

A3. *Αξίωμα του ζεύγους*: Για κάθε σύνολα x, y υπάρχει ένα σύνολο z, που το συμβολίζουμε με $\{x, y\}$ (δηλ. $z = \{x, y\}$) ώστε

$$\forall w\,(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

A4. *Αξίωμα της ένωσης*: Για κάθε σύνολο x υπάρχει ένα σύνολο $\cup x$, που αποτελείται από όλα τα στοιχεία των στοιχείων του x δηλ.

$$\forall x \underbrace{\exists y}_{\cup x} \forall z\,(z \in y \leftrightarrow \exists w\,(w \in x \wedge z \in w))$$

A5. *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου*: Για κάθε σύνολο x υπάρχει το σύνολο όλων των υποσυνόλων του x. Δηλ.

$$\forall x \underbrace{\exists y}_{\mathcal{P}(x)} \forall w\,(w \in y \leftrightarrow w \subseteq x)$$

($w \subseteq x$ είναι το $\forall t\,(t \in w \to t \in x)$)

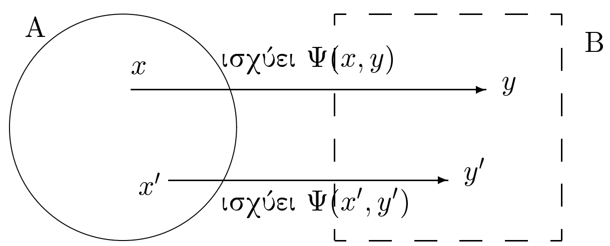
Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση του αξιώματος της αντικατάστασης χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός 4.2 *Μία διμελής οριστική συνθήκη $\Psi(x, y)$ είναι* προτασιακή συνάρτηση *εάν για κάθε x υπάρχει μοναδικό y ώστε να ισχύει η $\Psi(x, y)$, δηλ. ισχύει το $\forall x\, \exists! y\, \Psi(x, y)$ όπου όταν γράφουμε $\exists! y\, P(y)$ για οποιαδήποτε συνθήκη $P(y)$ αυτό σημαίνει $\exists y\, P(y) \wedge \forall y \forall y'\,(P(y) \wedge P(y') \to y = y')$.*

Η προτασιακή συνάρτηση λειτουργεί όπως και μία συνάρτηση (ορισμός ref-function. Σε κάθε x του «σύμπαντος» των συνόλων αντιστοιχεί ένα μοναδικό y, συγκεκριμένα το y για το οποίο ισχύει η σχέση $\Psi(x, y)$. Η διαφορά με την έννοια της συνάρτησης είναι ότι ως συνάρτηση θεωρείται μία «συλλογή» διατεταγμένων ζευγών ενώ ως προτασιακή συνάρτηση η διατύπωση στη γλώσσα της συνολοθεωρίας ενός «κανόνα» αντιστοιχίας. Βέβαια στην περίπτωση της προτασιακής συνάρτησης έχουμε επιπλέον ότι το «πεδίο ορισμού» της είναι όλο το σύμπαν των συνόλων.

Για παράδειγμα η συνθήκη $x = y$ είναι μια προτασιακή συνάρτηση. Επίσης η $\{x\} = y$ είναι προτασιακή συνάρτηση.

Α6. *Αξίωμα της αντικατάστασης*: Για κάθε προτασιακή συνάρτηση $\Psi(x, y)$ και κάθε σύνολο A υπάρχει ένα σύνολο $A' = \{y | \exists x\, (x \in A \wedge \Psi(x, y))\}$, δηλ. η συλλογή των εικόνων των στοιχείων του A από τη $\Psi(x, y)$ αποτελεί σύνολο (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Αξίωμα της αντικατάστασης

Παρατήρηση: Με τα αξιώματα που προηγήθηκαν μόνο για πεπερασμένα σύνολα μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξή τους π.χ. Ξέρουμε ότι υπάρχει το $\emptyset$ άρα θα υπάρχει (από Α3) το $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$. Άρα πάλι από (Α3) το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Ενδεχομένως να χρησιμοποιήσουμε το Α5 για να πάρουμε το (πάλι πεπερασμένο) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$. Αλλά δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε έτσι ένα άπειρο σύνολο. Το ότι υπάρχει ένα άπειρο σύνολο πρέπει να το υποθέσουμε ως αξίωμα.

Ορισμός 4.3 *Για κάθε σύνολο x ορίζουμε $x^+ = x \cup \{x\}$.*

π.χ. $\emptyset^+ = \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Α7. *Αξίωμα του απείρου*:

$$\exists y\, (\emptyset \in y \wedge \forall x\, (x \in y \rightarrow x^+ \in y))$$

Το y που υπάρχει λόγω αυτού του αξιώματος ικανοποιεί την αντίληψη που έχουμε για τα άπειρα σύνολα. Διότι το $\emptyset$ ανήκει σ' αυτό το σύνολο και όποτε x ανήκει στο y έχουμε ότι x^+ ανήκει στο y. Άρα όλα τα $\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \ldots$ που είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανήκουν στο y οπότε το y έχει «άπειρα» στοιχεία, δηλαδή είναι ένα άπειρο σύνολο.

P1. *Αρχή του διαχωρισμού*:
Εάν A είναι σύνολο και $\Phi(x)$ είναι μονομελής οριστική συνθήκη τότε υπάρχει ένα σύνολο B ώστε $x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \Phi(x)$.

(Δηλαδή το B είναι το υποσύνολο των στοιχείων του A που ικανοποιούν την $\Phi(x)$).

Θεώρημα 4.4 *Η αρχή του διαχωρισμού προκύπτει ως θεώρημα από τα αξιώματα της συνολουεωρίας.*

Απόδειξη: Έχουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Αν $\forall x\,(x \in A \rightarrow \neg\Phi(x))$ τότε θέτουμε $B = \emptyset$.

Περίπτωση 2: Εστω ότι υπάρχει $a \in A$ και $\Phi(a)$. Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση $\Psi(x, y)$ ως εξής:

$$\Psi(x, y) \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x) \wedge y = x) \vee (\neg(x \in A \wedge \Phi(x)) \wedge y = a)$$

.

Δηλαδή η προτασιακή αυτή συνάρτηση είναι η διατύπωση στη γλώσσα της συνολοθεωρίας του ακόλουθου «κανόνα» αντιστοιχίας: Δοθέντος x τότε εάν μεν το x ανήκει στο A και ικανοποιεί τη συνθήκη $\Phi(x)$ τότε αντιστοιχείται στο $y = x$ δηλαδή στον εαυτό του· στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν είτε το x δεν ανήκει στο A είτε ανήκει στο A αλλά δεν ικανοποιεί την $\Phi(x)$, τότε αντιστοιχείται στο $y = a$.

Από A6 υπάρχει το σύνολο B

$$B = \{y \mid \exists x\,(x \in A \wedge \Psi(x, y))\} = \{y \mid y \in A \wedge \Phi(y)\}.$$

Σημείωση: Η αρχή του διαχωρισμού ήταν ένα από τα αξιώματα που πρότεινε ο Zermelo. Όταν αργότερα ο Frænkel συμπλήρωσε το σύστημά του με το αξίωμα της αντικατάστασης η αρχή του διαχωρισμού έγινε θεώρημα αυτού του συστήματος μια και όπως είδαμε αποδεικνύεται στο σύστημα αυτό.

Τα αξιώματα A1 - A7 αποτελούν την αξιωματική θεωρία Zermelo - Frænkel την οποία συμβολίζουμε με ZF.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς με βάση αυτά τα αξιώματα τεκμαίρεται η ύπαρξη συνόλων που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια όπως $A \cup B$, $A \times B$ κ.λ.π.

Λήμμα 4.5 *Για κάθε σύνολο x και y*
(i) υπάρχει το σύνολο $\{x\}$,
(ii) υπάρχει το σύνολο $\langle x, y \rangle$.

Απόδειξη: (i) Στο A3 θέτουμε $x = y$, άρα $\exists\{x, x\} = \{x\}$.
(ii) Από (i) και A3 τα σύνολα $\{x\}, \{x, y\}$ υπάρχουν. Αρα από A3 το σύνολο $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ υπάρχει.

Λήμμα 4.6 *Για κάθε σύνολα x και y υπάρχει το σύνολο $x \cup y$.*

Απόδειξη: Από A3 υπάρχει το σύνολο $\{x, y\}$.
Από A4 υπάρχει το σύνολο $\cup\{x, y\} = x \cup y$.

Λήμμα 4.7 *Για κάθε σύνολα A, B υπάρχει το σύνολο $A \times B$*

Απόδειξη: Από Λήμμα 2 και A5 υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$.
(Σημείωση: $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B)$.)
Ορίζουμε $A \times B = \{x | x \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B) \wedge \Phi(x)\}$ όπου

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\leftrightarrow \text{“}x \text{ είναι διατεταγμένο ζεύγος } \langle a, b\rangle \text{ για κάποια } a \in A, b \in B\text{”} \\ &\leftrightarrow \exists y \exists z\, (y \in A \wedge z \in B \wedge x = \{\{y\}, \{y, z\}\}) \end{aligned}$$

Από P1, $A \times B$ είναι σύνολο.

Λήμμα 4.8 *Για κάθε σύνολα A, B υπάρχει το σύνολο ${}^{B}A$.*
$[\, f \in {}^{B}A \Rightarrow f \subseteq B \times A \Rightarrow f \in \mathcal{P}(B \times A) \Rightarrow {}^{B}A \subseteq \mathcal{P}(B \times A)\,]$

Απόδειξη: $\mathcal{P}(B \times A)$ είναι σύνολο από Λήμμα 3 και A5.
Ορίζουμε ${}^{B}A = \{x | x \in \mathcal{P}(A \times B) \wedge \Phi(x)\}$ όπου

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\leftrightarrow \text{“}x \text{ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού } B\text{”} \\ &\leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 (y_1 \in B \wedge z = \langle y_1, y_2\rangle) \wedge \\ &\qquad \forall y(y \in B \to \exists! w(\langle y, w\rangle \in x))) \end{aligned}$$

Λήμμα 4.9 *Εάν $F = \langle A_i\rangle_{i\in I}$ είναι οικογένεια συνόλων τότε υπάρχουν τα σύνολα $\bigcup_{i\in I} A_i$ και $\prod_{i\in I} A_i$.*

Απόδειξη: Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση

$$\Psi(x, y) \leftrightarrow (x \in I \wedge y = F(x)) \vee (x \notin I \wedge y = \emptyset)$$

Από αξίωμα αντικατάστασης υπάρχει το σύνολο $\{y | \exists x(x \in I \wedge \Psi(x, y)\} = \{A_i | i \in I\}$.
Από A4, $\bigcup\{A_i | i \in I\}$ είναι σύνολο $(= \bigcup_{i\in I} A_i)$.

Για το δεύτερο μέρος:

Σημειώστε ότι $\prod_{i\in I} A_i \subseteq {}^I\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Το δεύτερο σύνολο (δεξιά) υπάρχει από το πρώτο μέρος του λήμματος και το Λήμμα 4. Ορίζουμε $\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f \in {}^I\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge \Phi(f)\}$ όπου

$$\Phi(f) \leftrightarrow \text{“}f \text{ είναι συνάρτηση και } f(i) \in A_i \ \forall i \in I\text{”}$$

Αρα από P1, $\prod_{i\in I} A_i$ είναι σύνολο.

Σημείωση: Από την αρχή του διαχωρισμού προκύπτει ότι δεν υπάρχει το σύνολο όλων των συνόλων δηλ. $\nexists V$ ώστε $\forall x\,(x \in V)$. Διότι τότε θα προέκυπτε και πάλι το παράδοξο του Russell.

Θεώρημα 4.10 *Εστω $\Phi(x)$ οριστική συνθήκη έτσι ώστε $\exists x\Phi(x)$. Τότε υπάρχει σύνολο b ώστε $x \in b \leftrightarrow \forall y\,(\Phi(y) \to x \in y)$ δηλ. το b «μαζεύει» όλα τα κοινά στοιχεία των συνόλων που ικανοποιούν την $\Phi(x)$.*
Αυτό το b το συμβολίζουμε με $\bigcap_{x|\Phi(x)} x$.

Απόδειξη: Εστω a ένα σύνολο ώστε $\Phi(a)$. Ορίζουμε $b = \{x|x \in a \wedge \forall y\,(\Phi(y) \to x \in y)\}$. Από την αρχή του διαχωρισμού b έναι σύνολο.

Πόρισμα 4.11 *Αν $a \neq \emptyset$, τότε $\cap a$ είναι σύνολο.*

Απόδειξη: Παίρνουμε το $\Phi(x)$ του θεωρήματος 4.10 να είναι $x \in a$.