

Λ13Α. Εφαρμοσμένη θεωρία αποδείξεων

Θέματα εξετάσεων

14 Απριλίου 2014

Άσκηση 1. Έστω Γ το σύνολο που παράγεται από τους κανόνες

1. οι ατομικές φόρμουλες ανήκουν στο Γ ,
2. εάν $\phi \in \Gamma$ και $\psi \in \Gamma$, τότε $\phi \& \psi \in \Gamma$,
3. εάν $\phi \equiv \phi^{\text{mr}}$ και $\psi \in \Gamma$, τότε $\phi \rightarrow \psi \in \Gamma$,
4. εάν $\phi \in \Gamma$, τότε $\forall x \phi \in \Gamma$ και $\exists x \phi \in \Gamma$.

Να δειχθεί ότι $\vdash_{\mathbf{HA}^\omega} \phi^{\text{mr}} \rightarrow \phi$ για κάθε $\phi \in \Gamma$.

Λύση. Με επαγωγή στους κανόνες που παράγουν το Γ . Εξετάζουμε πρώτα την συνεπαγωγή:

Λήμμα. $(\phi \rightarrow \psi)^{\text{mr}} \rightarrow \phi^{\text{mr}} \rightarrow \psi^{\text{mr}}$.

Απόδειξη. Θα υπάρχουν $\vec{Y}$ και $\vec{x}$ με $\phi_{\text{mr}}(\vec{x}) \rightarrow \psi_{\text{mr}}(\vec{Y}\vec{x})$ και $\phi_{\text{mr}}(\vec{x})$, οπότε $\psi_{\text{mr}}(\vec{Y}\vec{x})$ και επομένως ψ^{mr} . $\square$

Εφαρμόζοντας το λήμμα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (\phi \rightarrow \psi)^{\text{mr}} &\rightarrow (\phi^{\text{mr}} \rightarrow \psi^{\text{mr}}) \\ &\equiv (\phi \rightarrow \psi^{\text{mr}}) \\ &\rightarrow (\phi \rightarrow \psi). \end{aligned} \quad [\text{επαγωγική υπόθεση}]$$

Περνάμε στην καθολική ποσόδειξη:

Λήμμα. $(\forall z \phi(z))^{\text{mr}} \rightarrow \forall z (\phi(z)^{\text{mr}})$.

Απόδειξη. Θα υπάρχουν $\vec{X}$ ούτως ώστε για κάθε z να ισχύει $\phi(z)_{\text{mr}}(\vec{X}z)$, και ειδικότερα $\phi(z)^{\text{mr}}$. $\square$

Εφαρμόζοντας το λήμμα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (\forall z \phi(z))^{\text{mr}} &\rightarrow \forall z (\phi(z)^{\text{mr}}) \\ &\rightarrow \forall z \phi(z). \end{aligned} \quad [\text{επαγωγική υπόθεση}]$$

Οι άλλες περιπτώσεις είναι απλούστερες.

Άσκηση 2. Έστω ϕ φόρμουλα της $\mathbf{HA}^\omega$.

1. Να δειχθεί ότι εάν

$$\not\models_{\mathbf{HA}^\omega} \phi \rightarrow \phi^{\text{mr}},$$

τότε

$$\not\models_{\mathbf{HA}^\omega} \psi^{\text{mr}} \rightarrow \psi,$$

όπου ψ η φόρμουλα $\phi \rightarrow \phi^{\text{mr}}$.

2. Να δειχθεί ότι

$$\vdash_{\mathbf{PA}^\omega + \text{AC}} \phi^{\text{mr}} \leftrightarrow \phi^\wedge.$$

Λύση. 1. Γενικά ισχύει $(\phi^{\text{mr}})_{\text{mr}} \equiv \phi_{\text{mr}}$, οπότε η

$$\psi^{\text{mr}} \equiv \exists \vec{Y} \forall \vec{x} (\phi_{\text{mr}}(\vec{x}) \rightarrow \phi_{\text{mr}}(\vec{Y}\vec{x}))$$

είναι ταυτολογία, και επομένως $(\psi^{\text{mr}} \rightarrow \psi) \leftrightarrow \psi \leftrightarrow (\phi \rightarrow \phi^{\text{mr}})$.

2. Στην $\mathbf{PA}^\omega$ αποδεικνύονται αμφότερα τα $M_\wedge$ και

$$(\text{IP}^\omega) \quad (\psi \rightarrow \exists \vec{x} \phi) \rightarrow \exists \vec{x} (\psi \rightarrow \phi), \quad \psi \text{ τυχούσα,}$$

οπότε $\vdash_{\mathbf{PA}^\omega + \text{AC}} \phi^{\text{mr}} \leftrightarrow \phi$ και $\vdash_{\mathbf{PA}^\omega + \text{AC}} \phi^\wedge \leftrightarrow \phi$.

Άσκηση 3. Να βρεθούν μάρτυρες για την $(\phi \rightarrow (\phi \& \phi))^\wedge$, όπου ϕ φόρμουλα της $\mathbf{HA}^\omega$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το σχήμα $\forall z < \mathbf{2} \psi(z) \leftrightarrow \psi(\mathbf{0}) \& \psi(\mathbf{1})$.]

Λύση. Κατ' αρχάς υπολογίζουμε την ερμηνεία:

$$\begin{aligned} (\phi \& \phi)^\wedge &\leftrightarrow \exists \vec{x} \exists \vec{x}' \forall \vec{y} \forall \vec{y}' (\phi \& \phi)_\wedge(\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}') \\ &\leftrightarrow \exists \vec{x} \exists \vec{x}' \forall \vec{y} \forall \vec{y}' (\phi_\wedge(\vec{x}, \vec{y}) \& \phi_\wedge(\vec{x}', \vec{y}')), \end{aligned}$$

$$(\phi \rightarrow (\phi \& \phi))^\wedge \leftrightarrow$$

$$\exists Z \vec{X} \vec{X}' \vec{Y} \forall \vec{x} \vec{y} \vec{y}' \left[\forall z < Z \vec{x} \vec{y} \vec{y}' \phi_\wedge(\vec{x}, \vec{Y} \vec{x} \vec{y} \vec{y}' z) \rightarrow (\phi_\wedge(\vec{X} \vec{x}, \vec{y}) \& \phi_\wedge(\vec{X}' \vec{x}, \vec{y}')) \right].$$

Ψάχνουμε να αντικαταστήσουμε τα $Z, \vec{X}, \vec{X}', \vec{Y}$ με κατάλληλους όρους ώστε να ικανοποιείται η

$$\forall z < Z \vec{x} \vec{y} \vec{y}' \phi_\wedge(\vec{x}, \vec{Y} \vec{x} \vec{y} \vec{y}' z) \rightarrow (\phi_\wedge(\vec{X} \vec{x}, \vec{y}) \& \phi_\wedge(\vec{X}' \vec{x}, \vec{y}')).$$

Για $Z := \lambda \vec{x} \vec{y} \vec{y}' \mathbf{2}$, η παραπάνω φόρμουλα γίνεται

$$\forall z < \mathbf{2} \phi_\wedge(\vec{x}, \vec{Y} \vec{x} \vec{y} \vec{y}' z) \rightarrow (\phi_\wedge(\vec{X} \vec{x}, \vec{y}) \& \phi_\wedge(\vec{X}' \vec{x}, \vec{y}')),$$

η οποία, σύμφωνα και με την υπόδειξη, είναι ισοδύναμη με την

$$(\phi_\wedge(\vec{x}, \vec{Y} \vec{x} \vec{y} \vec{y}' \mathbf{0}) \& \phi_\wedge(\vec{x}, \vec{Y} \vec{x} \vec{y} \vec{y}' \mathbf{1})) \rightarrow (\phi_\wedge(\vec{X} \vec{x}, \vec{y}) \& \phi_\wedge(\vec{X}' \vec{x}, \vec{y}')).$$

Τώρα είναι φανερό ότι αρκεί να θέσουμε $\vec{X} := \lambda \vec{x} \vec{x}$, $\vec{X}' := \lambda \vec{x} \vec{x}$ και να επιλέξουμε τα $\vec{Y}$ ούτως ώστε $\vec{Y} \vec{x} \vec{y} \vec{y}' \mathbf{0} = \vec{y}$ και $\vec{Y} \vec{x} \vec{y} \vec{y}' \mathbf{1} = \vec{y}'$, π.χ.,

$$\vec{Y} := \lambda \vec{x} \vec{y} \vec{y}' z \text{ (if } z = \mathbf{0} \text{ then } \vec{y} \text{ else } \vec{y}').$$

Άσκηση 4. Έστω Φ σύνολο αμηνώς καθολικών προτάσεων της $\mathbf{HA}^\omega$. Να δείχθει ότι η θεωρία $\mathbf{HA}^\omega + \text{AC} + \text{IP}_\forall^\omega + \text{M}_\wedge + \Phi$ έχει την ιδιότητα της ύπαρξης.

Λύση. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το Φ είναι ένα μονοσύνολο $\{\psi\}$. Εάν η $\exists x \phi(x)$ αποδεικνύεται στην ως άνω θεωρία, τότε η $\psi \rightarrow \exists x \phi(x)$ αποδεικνύεται στην $\mathbf{HA}^\omega + \text{AC} + \text{IP}_\forall^\omega + \text{M}_\wedge$. Η ίδια θεωρία αποδεικνύει επίσης την

$$(\psi \rightarrow \exists x \phi(x)) \rightarrow \exists x (\psi \rightarrow \phi(x))$$

ως στιγμιότυπο του $\text{IP}_\forall^\omega$, οπότε αποδεικνύει και την $\exists x (\psi \rightarrow \phi(x))$. Εφόσον η $\mathbf{HA}^\omega + \text{AC} + \text{IP}_\forall^\omega + \text{M}_\wedge$ έχει την ιδιότητα της ύπαρξης, θα αποδεικνύει επίσης την $\psi \rightarrow \phi(t)$ για κάποιον κατάλληλο όρο t . Επομένως, η $\mathbf{HA}^\omega + \text{AC} + \text{IP}_\forall^\omega + \text{M}_\wedge + \Phi$ αποδεικνύει την $\phi(t)$.

Άσκηση 5. Έστω $\phi(x, z)$ ελεύθερη ύπαρξης φόρμουλα της $\mathbf{HA}^\omega$.

1. Να διατυπωθεί μία απόδειξη της πρότασης

$$\exists x \phi(x, \mathbf{0}) \rightarrow \exists f \forall z \forall x (\phi(x, z) \rightarrow \phi(fx, Sz)) \rightarrow \forall z \exists x \phi(x, z).$$

2. Από την απόδειξη αυτή να εξαχθεί όρος $t(f, x, z)$ που επαληθεύει την

$$\phi(x, \mathbf{0}) \rightarrow \forall z \forall x (\phi(x, z) \rightarrow \phi(fx, Sz)) \rightarrow \forall z \phi(t(f, x, z), z).$$