Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Πολυτεχνειούπολη-Ζωγράφου
ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΤΗΛ. : 77 21 744
FAX : 77 21 775

Ανάλυση Χρονοσειρών
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2006
ΣΕΜΦΕ

Ζήτημα 1ο. Να δείξετε ότι η συνάρτηση αυτοσυνδιασποράς $\gamma(\cdot)$ μιας στάσιμης χρονοσειράς $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ είναι άρτια και γνήσια μη αρνητική. Ισχύει και το αντίστροφο;

Ζήτημα 2ο. Να εξετάσετε για ποιες τιμές του φ η χρονοσειρά

$$X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t \quad \text{με } \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

είναι στάσιμη. Ποια η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αυτής;

Ζήτημα 3ο.

(i) Να δοθεί ο ορισμός της *αιτιατότητας* καθώς και ο ορισμός της *αντιστρεψιμότητας* για μια χρονοσειρά ARMA(p,q):

$$\Phi_p(B)X_t = \Theta_q(B)Z_t \quad (t \in \mathbb{Z}), \text{ όπου } \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2).$$

(ii) Να εξεταστούν ως προς την αιτιατότητα και την αντιστρεψιμότητα οι παρακάτω χρονοσειρές:

(α) $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t.$ (β) $X_t + 1.8X_{t-1} - 0.81X_{t-2} = Z_t.$

Ζήτημα 4ο.

(i) Να δοθεί ο ορισμός, η ερμηνεία και η εκτιμήτρια της συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης $\alpha(h)$.

(ii) Να δοθεί η έκφραση της εκτιμήτριας $\hat{\gamma}(h)$ της συνάρτησης αυτοσυνδιασποράς $\gamma(h)$ μιας στάσιμης χρονοσειράς $\{X_t: t \in \mathbb{Z}_+\}$ και να αποδείξετε ότι ο αντίστοιχος πίνακας αυτοσυνδιασποράς $\hat{\Gamma}_n = \left[\hat{\gamma}(i-j)\right]_{i,j=1}^{n}$ είναι γνήσια μη αρνητικός (non-negative definite).

Διάρκεια εξέτασης: 2 ½ h.

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πολυτεχνειούπολη-Ζωγράφου

ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 77 21 744

FAX : 77 21 775

Ανάλυση Χρονοσειρών
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2007
ΣΕΜΦΕ

Ζήτημα 1ο.

(i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης $\gamma(\cdot)$ μιας στάσιμης χρονοσειράς $\{X_t : t\in\mathbb{Z}\}$ είναι άρτια και γνήσια μη αρνητική. Ισχύει και το αντίστροφο; (Δικαιολογείστε την απάντησή σας).

(ii) Να δοθεί ο ορισμός και η ερμηνεία της συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης $\alpha(n)$. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\alpha(n) = \varphi_{n,n}$, όπου $\varphi_{n,n}$ ο συντελεστής του X_1 στην βέλτιστη γραμμική πρόβλεψη του X_{n+1} από τα $X_1,\ldots,X_n$.

Ζήτημα 2ο. Έστω $\{X_t : t\in\mathbb{Z}\}$ στάσιμη χρονοσειρά μηδενικού μέσου με συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης $\gamma(h)$, $h=0, \pm1, \pm2,\ldots$. Να δείξετε ότι όταν ο πίνακας συνδιασποράς $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^{n}$ είναι μη ιδιάζων για κάθε n, τότε για τη βέλτιστη γραμμική πρόβλεψη h βημάτων μπροστά $P_{H_n} X_{n+h}$ έχουμε:

$$P_{H_n} X_{n+h} = \varphi_{n,1}^{(h)} X_n + \ldots + \varphi_{n,n}^{(h)} X_1,$$

με $\boldsymbol{\varphi}_n^{(h)} = (\varphi_{n,1}^{(h)},\ldots,\varphi_{n,n}^{(h)})^T = \boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\boldsymbol{\gamma}_n^{(h)}$ και $\boldsymbol{\gamma}_n^{(h)} = (\gamma(h),\gamma(h+1),\ldots,\gamma(n+h-1))^T$.

Ζήτημα 3ο. Θεωρούμε τη χρονοσειρά ARMA(1,1)

$$X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1} \quad \text{με} \quad Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

και με $|\varphi|, |\theta| < 1$.

(i) Να γραφεί η χρονοσειρά $\{X_t : t\in\mathbb{Z}\}$ υπό μορφή MA(∞): $X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j Z_{t-j}$.

(ii) Να προσδιοριστεί η αντίστροφη μορφή αυτής: $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j X_{t-j}$.

Ζήτημα 4ο. Να δείξετε ότι αν $\{X_t : t\in\mathbb{Z}\}$ στάσιμη χρονοσειρά με μέση τιμή μ και με συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης $\gamma(h)$ τότε για $n \to \infty$

$$Var[\overline{X}_n] = E[(\overline{X}_n - \mu)^2] \to 0, \quad \text{υπό την προϋπόθεση ότι } \gamma(n) \to 0,$$

και

$$nE[(\overline{X}_n - \mu)^2] \to \sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma(h), \quad \text{υπό την προϋπόθεση ότι } \sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma(h)| < \infty.$$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ½ ώρες

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Πολυτεχνειούπολη-Ζωγράφου
ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΤΗΛ. : 77 21 744
FAX : 77 21 775

Ανάλυση Χρονοσειρών
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2008
ΣΕΜΦΕ

Ζήτημα 1^{o}. Έστω $X_t = U\cos(\theta t) + V\sin\theta t$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ και U, V δύο ασυσχέτιστες τ.μ. με μηδενικούς μέσους και μοναδιαίες διασπορές, δηλαδή $\mu_U = \mu_V = 0$ και $\sigma_U^2 = \sigma_V^2 = 1$, $\rho(U,V) = 0$. Δείξτε ότι η χρονοσειρά $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ είναι στάσιμη (υπό ευρεία έννοια).

Ζήτημα 2^{o}. Να δοθεί ο ορισμός της αιτιατότητας (causality) μιας χρονοσειράς $\mathrm{ARMA}[p,q]$ ως προς τον λευκό θόρυβο $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$. Να διατυπώσετε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια χρονοσειρά $\mathrm{ARMA}[p,q]$ αιτιατή και να αποδείξετε ότι η συνθήκη αυτή είναι πράγματι ικανή.

Ζήτημα 3^{o}. Έστω $\{X_t\}$ μια AR[2] χρονοσειρά, δηλαδή

$$\mathrm{X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = Z_t},$$

με $\{\mathrm{Z_t}\} \sim WN(0,\sigma^2)$. Αποδείξτε ότι εάν η ως άνω χρονοσειρά είναι αιτιατή τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $|\varphi_2| < 1$

και

(β) $\varphi_2 + \varphi_1 < 1$,
$\varphi_2 - \varphi_1 < 1$.

Υπόδειξη: Για το σκέλος (β) εφαρμόστε το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής (Intermediate Value Theorem) της Ανάλυσης σε συνδυασμό με το ότι το αντίστοιχο χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\mathrm{z}) = 1 - \varphi_1 \mathrm{z} - \varphi_2 \mathrm{z}^2 > 0$ για z=1.

Ζήτημα 4^{o}. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης της χρονοσειράς κινητού μέσου τάξεως q, δηλαδή της $\mathrm{MA}[q]$

$$X_t = \Theta_q(B) Z_t = Z_t + \theta_1 Z_{t\text{-}1} + \ldots + \theta_q Z_{t\text{-}q} \qquad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

με $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ½ h.