

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

Άσκ. 2.4.

(α) Έστω $A = \{X_n = 1 \text{ για κάποιο } n\}$ και $\alpha = P[A|X_0 = 0]$. Αναλύοντας ως προς το αποτέλεσμα του 1^{ου} βήματος έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha &= P[A \cdot \{X_1 = 1\} | X_0 = 0] + P[A \cdot \{X_1 = -1\} | X_0 = 0] \\ &= P[X_1 = 1 | X_0 = 0]P[A | X_0 = 0, X_1 = 1] + P[X_1 = -1 | X_0 = 0]P[A | X_0 = 0, X_1 = -1] \\ &= P[X_1 = 1 | X_0 = 0] \cdot P[A | X_1 = 1] + P[X_1 = -1 | X_0 = 0] \cdot P[A | X_1 = -1] \quad (\text{Μαρκ. Ιδιότ.}) \\ &= pP[A | X_1 = 1] + (1-p)P[A | X_1 = -1] = p + (1-p)\alpha^2,\end{aligned}$$

αφού τα βήματα είναι ανεξάρτητα και ισόνομα, δηλαδή η σ.α. $\{X_n\}$ είναι στάσιμων και ανεξάρτητων προσauξήσεων, η πιθανότητα του ενδεχομένου «να πάει από την θέση “-1” στη θέση “0” κάποια στιγμή» είναι πάλι α .

(β) Έχουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση: $(1-p)\alpha^2 - \alpha + p = 0$ με διακινούσα $\Delta = 1 - 4p(1-p) = (1-2p)^2 \geq 0$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι πρέπει να έχουμε $0 \leq \alpha \leq 1$ προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκ. 2.5.

(α) Επειδή ο απλός τυχαίος περίπατος είναι στοχαστική ανέλιξη στάσιμων και ανεξάρτητων προσauξήσεων θα έχουμε από την προηγούμενη άσκηση:

$$\alpha = P[X_n = i+1 \text{ για κάποιο } n | X_0 = i], \quad i = 0, 1, \dots$$

Συνεπώς με $m > 0$ ($m \in \mathbb{N}$)

$$P[X_n = m \text{ για κάποιο } n | X_0 = i] = \prod_{i=0}^{m-1} P[X_n = i+1 \text{ για κάποιο } n | X_0 = i] = \alpha^m.$$

Αντικαθιστώντας το α από την προηγούμενη άσκηση λαμβάνουμε το ζητούμενο.

(β) Για $p < \frac{1}{2}$ έχουμε $\alpha = p/q$ και συνεπώς

$$P[X_n = m \text{ για κάποιο } n | X_0 = i] = \left\{ \frac{p}{q} \right\}^m, \quad i = 0, 1, \dots$$

Η ζητούμενη δεσμευμένη πιθανότητα (για $v < m$) είναι με $v > n$:

$$\begin{aligned}
& P[X_{v+1} = k+1 | X_v = k, X_n = m \text{ για κάποιο } n] \\
&= \frac{P[X_{v+1} = k+1, X_n = m \text{ για κάποιο } n | X_v = k]}{P[X_n = m \text{ για κάποιο } n | X_v = k]} \\
&= \frac{P[X_{v+1} = k+1 | X_v = k]P[X_n = m \text{ για κάποιο } n | X_{v+1} = k+1]}{P[X_n = m \text{ για κάποιο } n | X_v = k]} \\
&= \frac{p\alpha^{m-(k+1)}}{\alpha^{m-k}} = \frac{p}{\alpha} = \frac{p}{p/q} = q.
\end{aligned}$$

Άσκ. 2.6.

(α) Από τη γνωστή ιδιότητα της μέσης τιμής $E[X]=E[E[X|Y]]$ έχουμε αντίστοιχα

$$E[X|Y]=E[E[X|Y,Z]|Y]$$

και συνεπώς:

$$\mu = E[T_{01}] = E[T_{01} | X_0 = 0] = E[E[T_{01} | X_0 = 0, X_1] | X_0 = 0],$$

και αναλύοντας ως προς το αποτέλεσμα του 1^{ου} βήματος

$$\begin{aligned}
\mu &= P[X_1 = 1 | X_0 = 0]E[T_{01} | X_0 = 0, X_1 = 1] \\
&\quad + P[X_1 = -1 | X_0 = 0]E[T_{01} | X_0 = 0, X_1 = -1], \\
&= pE[T_{01} | X_0 = 0, X_1 = 1] + (1-p)E[T_{01} | X_0 = 0, X_1 = -1].
\end{aligned}$$

Όμως έχουμε $E[T_{01} | X_0 = 0, X_1 = 1] = 1$ και λόγω της στασιμότητας των ανεξάρτητων προσauξήσεων έχουμε επίσης

$$E[T_{01} | X_0 = 0, X_1 = 1] = 1 + E[T_{-1,0} | X_0 = -1] + E[T_{01} | X_0 = 0] = 1 + 2\mu.$$

Συνεπώς ο χρόνος μ ικανοποιεί την εξίσωση $\mu = p + (1-p)(1+2\mu)$, δηλαδή έχουμε

$$\mu = 1 + 2(1-p)\mu.$$

Επειδή $\mu > 0$, έχουμε $\mu = 1/(2p-1)$ για $p > 1/2$ και $\mu = \infty$ για $p \leq 1/2$.

(β) Για $p > 1/2$ εφαρμόζουμε τη σχέση $E[T^2] = \sigma^2 + \mu^2$. Ακολουθώντας την ίδια ανάλυση όπως στο πρώτο ερώτημα έχουμε:

$$\sigma^2 + \mu^2 = E[T^2] = E[T_{01}^2] = E[T_{01}^2 | X_0 = 0]$$

$$= pE[T_{01}^2 | X_0 = 0, X_1 = 1] + (1-p)E[T_{01}^2 | X_0 = 0, X_1 = -1].$$

Όμως $E[T_{01}^2 | X_0 = 0, X_1 = 1] = 1$ και

$$\begin{aligned} E[T_{01}^2 | X_0 = 0, X_1 = -1] &= E[\{1 + T_{-1,0} + T_{01}\}^2] \\ &= 1 + 2E[T_{-1,0}] + 2E[T_{01}] + 2E[T_{-1,0}T_{01}] + E[T_{-1,0}^2] + E[T_{01}^2] \\ &= 1 + 2E[T_{-1,0}] + 2E[T_{01}] + 2E[T_{-1,0}]E[T_{01}] + E[T_{-1,0}^2] + E[T_{01}^2] \quad (\text{λόγω ανεξ.}) \\ &= 1 + 4\mu + 2\mu^2 + 2(\sigma^2 + \mu^2). \end{aligned}$$

Συνεπώς η διασπορά σ^2 ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\sigma^2 + \mu^2 = p + (1-p)\{1 + 4\mu + 2\mu^2 + 2(\sigma^2 + \mu^2)\}.$$

Αντικαθιστώντας το μ και λύνοντας ως προς σ^2 προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκ. 2.12.

Η ροπογεννήτρια των ανεξάρτητων βημάτων

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } p \\ 0, & \text{με πιθανότητα } r \\ -1, & \text{με πιθανότητα } q \end{cases} \quad n=1,2,3,\dots$$

είναι: $g(s) = E[e^{sX}] = pe^s + r + qe^{-s}$, $s \in \mathbb{R}$.

Για τον προσδιορισμό της μη μηδενικής λύσης s_0 της εξίσωσης $g(s) = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} pe^s + r + qe^{-s} = 1 &\Rightarrow pe^s + qe^{-s} = 1 - r \Rightarrow \\ \Rightarrow pe^s + qe^{-s} = p + q &\Rightarrow pe^s(1 - e^{-s}) - q(1 - e^{-s}) = 0 \\ \Rightarrow (1 - e^{-s})(pe^s - q) &= 0, \end{aligned}$$

και συνεπώς η μη μηδενική ρίζα δίνεται από την εξίσωση

$$pe^s - q = 0 \text{ δηλαδή } s_0 = \ln \frac{q}{p} = \ln \lambda \text{ με } \lambda = \frac{q}{p}.$$

Με εφαρμογή της σχέσης (3.15) σελίδα 33 (η οποία ισχύει ακριβώς) έχουμε ότι η πιθανότητα να κτυπήσει το κάτω φράγμα με $X_0=0$ είναι:

$$\alpha = \frac{e^{bs_0} - 1}{e^{bs_0} - e^{-as_0}} = \frac{\lambda^b - 1}{\lambda^b - \lambda^{-a}}.$$

Το ενδεχόμενο $\{M_n \leq m\}$ στο χωρίς φράγματα τυχαίο περίπατο που περιγράφεται στην άσκηση 2.11 είναι ταυτόσημο με το ενδεχόμενο απορρόφησης στο κάτω φράγμα

$-a=m$ του τυχαίου περιπάτου με άνω φράγμα το $b = +\infty$. Συνεπώς με $b \rightarrow +\infty$ θα έχουμε:

$$\alpha = \begin{cases} 1 & , \quad \lambda \geq 1 \\ \lambda^{-m} & , \quad \lambda < 1 \end{cases},$$

$$\text{δηλαδή } P[M_n \leq m] = \begin{cases} 1 & , \quad \lambda \geq 1 \\ \lambda^{-m} & , \quad \lambda < 1 \end{cases}, \text{ με } m=0,-1,-2,\dots$$

Για $\lambda < 1$ έχουμε:

$$P[M_n = m] = P[M_n \leq m] - P[M_n \leq m-1] = \lambda^{-m} - \lambda^{-m+1} = \lambda^{-m}(1-\lambda), \text{ με } m=0,-1,-2,\dots$$

Για $\lambda \geq 1$ έχουμε: $P[M_n = m] = 0$, με $m=0,-1,-2,\dots$