

Γ.Ε. Κοκολάκης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.
ΣΕΜΦΕ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

Αθήνα, 2007

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΕΡΙΠΑΤΟΙ

ΚΑΙ

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

© Copyright 2003 Γ. Κοκολάκης

Απαγορεύεται η με οποιονδήποτε τρόπο ολική ή μερική ανατύπωση των σημειώσεων αυτών χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το τεύχος αυτό αποτελεί την πρώτη ενότητα ενός βιβλίου στη Θεωρία των Στοχαστικών Ανελιξέων αποτελούμενου από τρεις ενότητες οι οποίες καλύπτουν: (α) την βασική θεωρία των στοχαστικών ανελιξέων σε διακριτό παραμετρικό χώρο και συγκεκριμένα τον τυχαίο περίπατο και τις Μαρκοβιανές αλυσίδες με αριθμήσιμο πλήθος καταστάσεων και εφαρμογές στην αξιολόγηση κινδύνου, (β) την ανέλιξη Poisson, τις ανανεωτικές, Μαρκοβιανές και κλαδωτές ανελιξεις σε συνεχή παραμετρικό χώρο και εφαρμογές στα συστήματα εξυπηρέτησης, τον αναλογισμό και τις πληθυσμιακές μεταβολές και (γ) τις ανελιξεις διάχυσης, τα martingales και το στοχαστικό ολοκλήρωμα με εφαρμογές στην οικονομία.

Στην τεύχος αυτό προσπάθεια έγινε έτσι ώστε οι έννοιες που χρησιμοποιούνται και η όλη ανάπτυξη του περιεχομένου να βασίζονται σε γνώσεις που έχουν αποκτηθεί στα πλαίσια δύο εξαμηνιαίων μαθημάτων Θεωρίας Πιθανοτήτων που απευθύνονται σε σπουδαστές τμημάτων μαθηματικών ή τμημάτων μηχανικών και έχουν την απαιτούμενη πληρότητα και μαθηματική αυστηρότητα. Γνωστές θεωρούνται έννοιες από την αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων όπως η έννοια του σ -πεδίου, η πιθανότητα ως μέτρο, οι τυχαίες μεταβλητές ως μετρήσιμες συναρτήσεις, η ολοκλήρωση ως προς μέτρο πιθανότητας, οι πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές και πολυμεταβλητές κατανομές, η δεσμευμένη μέση τιμή, η συνέλιξη κατανομών και οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Θεωρούνται επίσης γνωστοί οι διάφοροι τρόποι σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών, όπως η σύγκλιση κατά κατανομή, κατά πιθανότητα, η L^2 και η σχεδόν παντού σύγκλιση, οι σχέσεις μεταξύ τους καθώς και τα βασικά οριακά αποτελέσματα σχετικά με τη σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών γνωστά ως Νόμοι των Μεγάλων Αριθμών και Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα.

Αθήνα, 2003

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφ. Ι Εισαγωγή

1.1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ	7
1.2.	ΒΑΣΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ	9
1.3.	ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	12
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	16

Κεφ. ΙΙ Τυχαίος Περίπατος

2.1.	ΑΠΛΟΣ ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ	19
2.2.	ΑΠΛΟΣ ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ ΜΕ ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ	22
	2.2.1. <i>Πιθανότητες Απορρόφησης</i>	22
	2.2.2. <i>Κατανομή του Χρόνου Απορρόφησης</i>	25
2.3.	ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ ΜΕ ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ : ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ WALD	29
	2.3.1. <i>Μέσος Χρόνος Απορρόφησης</i>	30
	2.3.2. <i>Πιθανότητες Απορρόφησης</i>	31
	2.3.3. <i>Ροπογεννήτρια του Χρόνου Απορρόφησης</i>	34
2.4.	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΠΕΡΙΠΑΤΟΥ	36
	2.4.1. <i>Απλός Τυχαίος Περίπατος - Καταστροφή του Παίκτη</i>	36
	2.4.2. <i>Τυχαίος Περίπατος Κανονικών Προσανξήσεων - Ταμείο Τράπεζας</i>	38
	2.4.3. <i>Τυχαίος Περίπατος Ανεξ. Προσανξήσεων - Ασφαλιστικά Συμβόλαια</i>	40
	2.4.4. <i>Συστήματα Εξυπηρέτησης</i>	42
	2.4.4.α <i>Σύστημα Εξυπηρέτησης G/G/1</i>	43
	2.4.4.β <i>Σύστημα Εξυπηρέτησης G/M/1</i>	45
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	48

Κεφ. III Μαρκοβιανές Αλυσίδες

3.1.	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ	51
3.2.	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΥΨΗΛΟΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ.....	54
3.3.	ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ : ΣΤΑΣΙΜΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ	57
3.3.1.	<i>Μοντέλο Διάχυσης Ehrenfest</i>	66
3.4.	ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ	70
3.4.1.	<i>Επαναληπτικές, Παροδικές και Περιοδικές Καταστάσεις</i>	78
3.5.	ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ	85
3.6.	ΕΡΓΟΛΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ	92
3.7.	ΜΕΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΠΑΡΟΔΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ	103
	ΑΣΚΗΣΕΙΣ	109
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	115