ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

26-5-2009

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΞΑΜΗΝΟ 6^{O} , ΚΑΤ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

«Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις»

1. Για κάθε μια από τις εξισώσεις που ακολουθούν να προσδιορίσετε αν είναι γραμμική, ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή μη γραμμική. Να βρεθεί ακόμα η τάξη της εξίσωσης.

   i) $u_t + uu_x = u_{xxt}$

   ii) $u_{x_1} + e^{x_2} u_{x_2} = 0$

   iii) $2u_{x_1x_1} u_{x_1x_1x_2} - (u_{x_1x_1} - u_{x_2})^2_{x_1} - 2u_{x_2} u_{x_1x_1x_2} + u_{x_1} = 0$

2. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης τετριμμένης μορφής:

   i) $u_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$

   ii) $u_{x_1x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$

3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

   $u_{x_1} + u_{x_2} = 0$

   $u(x_1, 0) = \sin x_1,\ x_1 \in \mathbb{R}$

4. Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

   $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = u$

   όταν $u(x_1, x_2) = x_1^2$ πάνω στην καμπύλη $C:\ x_2 = x_1^2,\ x_1 > 0$.

5. Εξηγείστε γιατί η γραμμική εξίσωση :

   $u_{x_1} + u_{x_2} = u$

   δεν έχει λύση που διέρχεται από την ευθεία $x_1 = t, x_2 = t, u = 1$.

6. Για κάθε μια από τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις να περιγράψετε τα υποσύνολα του R^2 στα οποία οι εξισώσεις είναι ελλειπτικού, παραβολικού ή υπερβολικού τύπου:

   i) $2u_{x_1x_1} + 4u_{x_1x_2} + 3u_{x_2x_2} - u = 0$

   ii) $u_{x_1x_1} + 2x_1 u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} + \sin(x_1x_2)u = 5$

iii) $x_2 u_{x_1x_1} - 2u_{x_1x_2} + e^x u_{x_2x_2} + x_1^2 u_{x_1} - u = 0$

iv) $x_2 u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + x_1^2 u_{x_2} - u = 0$

7. Να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών:

i)

$$\Delta u(x_1,x_2)=0 \quad , \quad (x_1,x_2)\in(0,1)\times(0,1)$$
$$u(x_1,0)=0,\ u(x_1,1)=x_1(x_1-1) \quad , \quad \mathrm{x}_1\in[0,1]$$
$$u(0,x_2)=0\ ,\ u(1,x_2)=0 \quad , \quad \mathrm{x}_2\in[0,1]$$

ii)

$$\Delta u(\rho,\varphi)=0 \quad , \quad 1<\rho<2\ ,\ 0\le\varphi\le\pi$$
$$u(1,\varphi)=\sin\varphi \quad , \quad \varphi\in[0,\pi]$$
$$u(2,\varphi)=0 \quad , \quad \varphi\in[0,\pi]$$
$$u(\rho,0)=0 \quad , \quad 1\le\rho\le 2$$
$$u(\rho,\pi)=0 \quad , \quad 1\le\rho\le 2$$

iii)

$$\Delta u(\rho,\varphi)=0 \quad , \quad 1<\rho<2\ ,\ \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\sin\varphi \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=2}=0 \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

iv)

$$\Delta u(\rho,\varphi)=0 \quad , \quad 0\le\rho<\alpha\ ,\ \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=\alpha}=f(\varphi) \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

αν: α) $f=Ax_1$

β) $f=A(x_1^2-x_2^2)$

8. Να προσδιοριστεί το Α έτσι το ακόλουθο πρόβλημα να έχει λύση:

$$\Delta u(\rho,\varphi)=5\rho^2\sin 2\varphi \quad , \quad 1<\rho<2\ ,\ \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\cos 2\phi \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=2}=\mathrm{A}+5\sin\phi \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)$$

Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση.

9. Να λυθεί το πρόβλημα
$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}=1,\ a^2<x_1^2+x_2^2<b^2$ ..
$u=0$ *στα δύο σύνορα για* $r=a, r=b$.

10. Να λυθεί το πρόβλημα
$\Delta u(r,\theta,\varphi)=0\ ,\quad r>\alpha\ ,\ 0\le\theta\le\pi,\varphi\in[0,2\pi)$
$$\frac{\partial u\left(a,\theta\right)}{\partial r}+u\left(\alpha,\theta\right)=3\cos\theta,\quad 0\le\theta\le\pi$$

11. Με χρήση της συνάρτησης Green να επιλυθεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:
$$\Delta u(x_1,x_2)=f_1(x_1,x_2)\quad ,\quad (x_1,x_2)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$$
$$u(0,x_2)=f_2(x_2)\quad ,\quad \mathrm{x}_2\in[0,+\infty)$$
$$\frac{\partial u(x_1,0)}{\partial n}=f_3(x_1)\quad ,\quad \mathrm{x}_1\in[0,+\infty)$$
όπου f_1 , f_2 , f_3 γνωστές συνεχείς συναρτήσεις.

12. Με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών να λυθούν τα προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών που ακολουθούν:

i)
$$u_t=ku_{xx}\quad ,\quad 0<x<+\infty\ ,\ t>0$$
$$u(x,0)=x\quad ,\quad x\ge 0$$
$$u(0,t)=a\quad ,\quad \mathrm{t}\ge 0$$
$$\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0\quad ,\quad \mathrm{t}\ge 0$$

ii)
$$u_t=ku_{xx}\quad ,\quad 0<x<+\infty\ ,\ t>0$$
$$u(x,0)=0\quad ,\quad x\ge 0$$
$$u(0,t)=f_0\quad ,\quad \mathrm{t}\ge 0$$
$$\lim_{x\to\infty}u(x,t)=0\quad ,\quad \mathrm{t}\ge 0$$

13. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών που ακολουθούν:

i)
$$\Delta u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad ,\quad (x_1,x_2)\in(0,a)\times(0,b)\ ,\ t>0$$
$$u(x_1,x_2,0)=f(x_1,x_2)\quad ,\quad (x_1,x_2)\in[0,a]\times[0,b]$$
$$u_t(x_1,x_2,0)=g(x_1,x_2)\quad ,\quad (x_1,x_2)\in[0,a]\times[0,b]$$
$$u(0,x_2,t)=u(a,x_2,t)=0\quad ,\quad x_2\in[0,b]\ ,\ t\ge 0$$
$$u(x_1,0,t)=u(x_1,b,t)=0\quad ,\quad x_1\in[0,\alpha]\ ,\ t\ge 0$$
όπου f , g γνωστές συναρτήσεις.

ii)

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad (x_1,x_2,x_3)\in(0,1)\times(0,1)\times(0,1)\ ,\ t>0$$

$$u(x_1,x_2,x_3,0)=\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3) \quad , \quad (x_1,x_2,x_3)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

$$u_t(x_1,x_2,x_3,0)=0 \quad , \quad (x_1,x_2,x_3)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$$

$$u(0,x_2,x_3,t)=u(1,x_2,x_3,t)=0 \quad , \quad (x_2,x_3)\in[0,1]\times[0,1]\ ,\ t\geq 0$$

$$u(x_1,0,x_3,t)=u(x_1,1,x_3,t)=0 \quad , \quad (x_1,x_3)\in[0,1]\times[0,1]\ ,\ t\geq 0$$

$$u(x_1,x_2,0,t)=u(x_1,x_2,1,t)=0 \quad , \quad (x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]\ ,\ t\geq 0$$

iii)

$$\Delta u(\rho,\varphi,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad 0\leq\rho<1\ ,\ \varphi\in[0,2\pi)\ ,\ \mathrm{t}>0$$

$$u(\rho,\varphi,0)=J_1(\mu_{11}\rho)\cos\varphi \quad , \quad 0\leq\rho\leq 1\ ,\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$u_t(\rho,\varphi,0)=0 \quad , \quad 0\leq\rho\leq 1\ ,\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$u(1,\varphi,t)=0 \quad , \quad \varphi\in[0,2\pi)\ ,\ \mathrm{t}\geq 0$$

14. Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών το πρόβλημα αρχικών τιμών που ακολουθεί:

$$\Delta u(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad (x_1,x_2,x_3)\in R^3\ ,\ \mathrm{t}>0$$

$$u(x_1,x_2,x_3,0)=0 \quad , \quad (x_1,x_2,x_3)\in R^3$$

$$u_t(x_1,x_2,x_3,0)=x_1 \quad , \quad (x_1,x_2,x_3)\in R^3$$