

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

26-5-2009

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΞΑΜΗΝΟ 4^Ο

«Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις»

1. Για κάθε μια από τις εξισώσεις που ακολουθούν να προσδιορίσετε αν είναι γραμμική, ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική ή μη γραμμική. Να βρεθεί ακόμα η τάξη της εξίσωσης.

i) $u_t + uu_x = u_{xxt}$

ii) $u_{x_1} + e^{x_2} u_{x_2} = 0$

iii) $2u_{x_1 x_1} u_{x_1 x_1 x_2} - (u_{x_1 x_1} - u_{x_2})_{x_1}^2 - 2u_{x_2} u_{x_1 x_1 x_2} + u_{x_1} = 0$

2. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης τετριμμένης μορφής:

i) $u_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

ii) $u_{x_1 x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

3. Για κάθε μια από τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις να περιγράψετε τα υποσύνολα του \mathbb{R}^2 στα οποία οι εξισώσεις είναι ελλειπτικού, παραβολικού ή υπερβολικού τύπου:

i) $2u_{x_1 x_1} + 4u_{x_1 x_2} + 3u_{x_2 x_2} - u = 0$

ii) $u_{x_1 x_1} + 2x_1 u_{x_1 x_2} + u_{x_2 x_2} + \sin(x_1 x_2) u = 5$

iii) $x_2 u_{x_1 x_1} - 2u_{x_1 x_2} + e^x u_{x_2 x_2} + x_1^2 u_{x_1} - u = 0$

iv) $x_2 u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + x_1^2 u_{x_2} - u = 0$

4. Να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών:

i)

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in (0, 1) \times (0, 1)$$

$$u(x_1, 0) = 0, \quad u(x_1, 1) = x_1(x_1 - 1), \quad x_1 \in [0, 1]$$

$$u(0, x_2) = 0, \quad u(1, x_2) = 0, \quad x_2 \in [0, 1]$$

ii)

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0 \quad , \quad 1 < \rho < 2 \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$u(1, \varphi) = \sin \varphi \quad , \quad \varphi \in [0, \pi]$$

$$u(2, \varphi) = 0 \quad , \quad \varphi \in [0, \pi]$$

$$u(\rho, 0) = 0 \quad , \quad 1 \leq \rho \leq 2$$

$$u(\rho, \pi) = 0 \quad , \quad 1 \leq \rho \leq 2$$

iii)

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0 \quad , \quad 1 < \rho < 2 \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \sin \varphi \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=2} = 0 \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

iv)

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 0 \quad , \quad 0 \leq \rho < \alpha \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=\alpha} = f(\varphi) \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

αν: α) $f = Ax_1$

β) $f = A(x_1^2 - x_2^2)$

5. Να προσδιοριστεί το A έτσι το ακόλουθο πρόβλημα να έχει λύση:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 5\rho^2 \sin 2\varphi \quad , \quad 1 < \rho < 2 \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \cos 2\varphi \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=2} = A + 5 \sin \varphi \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση.

6. Να λυθεί το πρόβλημα

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 1, \quad a^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2 \quad ..$$

$$u = 0 \text{ στα δύο σύνορα για } r = a, r = b.$$

7. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0 \quad , \quad r > \alpha \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\frac{\partial u(\alpha, \theta)}{\partial r} + u(\alpha, \theta) = 3 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

8. Με χρήση της συνάρτησης Green να επιλυθεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{aligned} \Delta u(x_1, x_2) &= f_1(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \\ u(0, x_2) &= f_2(x_2) \quad , \quad x_2 \in [0, +\infty) \\ \frac{\partial u(x_1, 0)}{\partial n} &= f_3(x_1) \quad , \quad x_1 \in [0, +\infty) \end{aligned}$$

όπου f_1, f_2, f_3 γνωστές συνεχείς συναρτήσεις.

9. Με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών να λυθούν τα προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών που ακολουθούν:

i)

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \quad , \quad 0 < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) &= x \quad , \quad x \geq 0 \\ u(0, t) &= a \quad , \quad t \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) &= 0 \quad , \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \quad , \quad 0 < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0 \quad , \quad x \geq 0 \\ u(0, t) &= f_0 \quad , \quad t \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) &= 0 \quad , \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

10. Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών που ακολουθούν:

i)

$$\begin{aligned} \Delta u(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad (x_1, x_2) \in (0, a) \times (0, b), t > 0 \\ u(x_1, x_2, 0) &= f(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b] \\ u_t(x_1, x_2, 0) &= g(x_1, x_2) \quad , \quad (x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b] \\ u(0, x_2, t) &= u(a, x_2, t) = 0 \quad , \quad x_2 \in [0, b], t \geq 0 \\ u(x_1, 0, t) &= u(x_1, b, t) = 0 \quad , \quad x_1 \in [0, a], t \geq 0 \end{aligned}$$

όπου f, g γνωστές συναρτήσεις.

ii)

$$\begin{aligned}\Delta u(x_1, x_2, x_3, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & , & \quad (x_1, x_2, x_3) \in (0,1) \times (0,1) \times (0,1) , t > 0 \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) &= \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \sin(\pi x_3) & , & \quad (x_1, x_2, x_3) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) &= 0 & , & \quad (x_1, x_2, x_3) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \\ u(0, x_2, x_3, t) &= u(1, x_2, x_3, t) = 0 & , & \quad (x_2, x_3) \in [0,1] \times [0,1] , t \geq 0 \\ u(x_1, 0, x_3, t) &= u(x_1, 1, x_3, t) = 0 & , & \quad (x_1, x_3) \in [0,1] \times [0,1] , t \geq 0 \\ u(x_1, x_2, 0, t) &= u(x_1, x_2, 1, t) = 0 & , & \quad (x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1] , t \geq 0\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\Delta u(\rho, \varphi, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & , & \quad 0 \leq \rho < 1 , \varphi \in [0, 2\pi) , t > 0 \\ u(\rho, \varphi, 0) &= J_1(\mu_{11}\rho) \cos \varphi & , & \quad 0 \leq \rho \leq 1 , \varphi \in [0, 2\pi) \\ u_t(\rho, \varphi, 0) &= 0 & , & \quad 0 \leq \rho \leq 1 , \varphi \in [0, 2\pi) \\ u(1, \varphi, t) &= 0 & , & \quad \varphi \in [0, 2\pi) , t \geq 0\end{aligned}$$

11. Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών το πρόβλημα αρχικών τιμών που ακολουθεί:

$$\begin{aligned}\Delta u(x_1, x_2, x_3, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & , & \quad (x_1, x_2, x_3) \in R^3 , t > 0 \\ u(x_1, x_2, x_3, 0) &= 0 & , & \quad (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) &= x_1 & , & \quad (x_1, x_2, x_3) \in R^3\end{aligned}$$