ναι περιοδική. Αν ναι, να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδός της.

1. $\sin 5x$ 2. $\cos 2\pi x$
3. $\sinh 2x$ 4. $\sin \pi x/L$
5. $\tan \pi x$ 6. x^2

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \le x < 2n, \\ 1, & 2n \le x < 2n+1, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

9. Αν $f(x) = -x$ για $-L < x < L$, και αν $f(x + 2L) = f(x)$, να βρεθεί ένας τύπος για την $f(x)$: (α) στο διάστημα $L < x < 2L$, (β) στο διάστημα $-3L < x < -2L$.

10. Αν $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases}$ και αν $f(x + 2) = f(x)$, να βρεθεί ένας τύπος για την $f(x)$: (α) στο διάστημα $1 < x < 2$, (β) στο διάστημα $8 < x < 9$.

11. Αν $f(x) = L - x$ για $0 < x < 2L$ και αν $f(x + 2L) = f(x)$, να βρεθεί ένας τύπος για την $f(x)$ στο διάστημα $-L < x < 0$.

12. Να επαληθευτούν οι (6) και (7) του κειμένου με απευθείας ολοκλήρωση.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 13 έως 18
(α) Να σχεδιασθεί το γράφημα της δοθείσας συνάρτησης για τρεις περιόδους.
(β) Να βρεθεί η σειρά Fourier για τη δοθείσα συνάρτηση.

13. $f(x) = -x, \; -L \le x \le L, f(x + 2L) = f(x)$

14. $f(x) = -x, \quad -L \le x < L, \quad f(x+2L) = f(x)$

15. $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < L \end{cases} \quad f(x+2L) = f(x)$

16. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0, \\ 1-x, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$

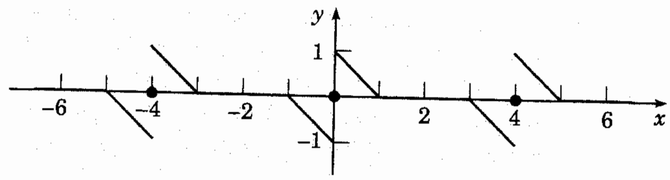
18. $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \le x \le 0, \\ L, & 0 < x < L, \end{cases} \quad f(x+2L) = f(x)$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 19 έως 24
(α) Να σχεδιασθεί το γράφημα της δοθείσας συνάρτησης για τρείς περιόδους.
(β) Να βρεθεί η σειρά Fourier για τη δοθείσα συνάρτηση.
(γ) Να σχεδιασθεί το $s_m(x)$ ως προς x για m =5, 10, και 20.
(δ) Να περιγραφεί πώς συγκλίνει η σειρά Fourier.

19. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2, \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$

20. $f(x) = x, \quad -1 \le x < 1, \quad f(x+2) = f(x)$

21. $f(x) = x^2/2, \quad -2 \le x \le 2, \quad f(x+4) = f(x)$



ΣΧΗΜΑ 10.4.5 Περιττή περιοδική επέκταση της $f(x)$ που δίνεται από την Εξ. (13).

Προβλήματα

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 6 να συναχθεί το συμπέρασμα αν η δοθείσα συνάρτηση είναι άρτια, περιττή ή τίποτε από τα δύο.

1. $x^3 - 2x$
2. $x^3 - 2x + 1$
3. $\tan 2x$
4. $\sec x$
5. $|x|^3$
6. e^{-x}

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 7 έως 12 δίνεται μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα μήκους L. Να σχεδιασθούν για κάθε περίπτωση τα γραφήματα άρτιας και περιττής επέκτασης της f περιόδου $2L$.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ x - 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

9. $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x < 2$

10. $f(x) = x - 3, \quad 0 < x < 4$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

12. $f(x) = 4 - x^2, \quad 0 < x < 1$

13. Να αποδειχθεί ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής συνάρτησης. Δηλαδή, για κάθε συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού περιέχει το $-x$ όταν περιέχει το x, να δειχθεί ότι υπάρχει μια άρτια συνάρτηση g και μια περιττή συνάρτηση h, τέτοιες ώστε
$f(x) = g(x) + h(x)$
Υπόδειξη: Αν υποτεθεί ότι ισχύει $f(x) = g(x) + h(x)$, με τι ισούται η $f(-x)$;

14. Να βρεθούν οι συντελεστές της συνημιτονικής και της ημιτονικής σειράς που περιγράφονται στο Παράδειγμα 2.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 15 έως 22 να βρεθεί η απαιτούμενη σειρά Fourier για τη δοθείσα συνάρτηση και να σχεδιασθεί το γράφημα της συνάρτησης στην οποία συγκλίνει η σειρά, για τρεις περιόδους.

15. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$ συνημιτονική σειρά, περίοδος 4.

Να γίνει σύγκριση με το Παράδειγμα 1 και το Πρόβλημα 5 της Ενότητας 10.3.

16. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2, \end{cases}$ ημιτονική σειρά, περίοδος 4.

17. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le \pi,$ συνημιτονική σειρά, περίοδος 2π.

δειχθεί ότι

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Η σχέση αυτή μεταξύ του π και των περιττών θετικών ακεραίων ανακαλύφθηκε από τον Leibniz στα 1674.

36. Από τη σειρά Fourier για το τριγωνικό κύμα (Παράδειγμα 1, Ενότητα 10.2), να δειχθεί ότι

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

37. Έστω ότι η f έχει την ημιτονική σειρά Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L), \qquad 0 \le x \le L.$$

(α) Να δειχθεί ότι

$$\frac{2}{L}\int_0^L [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Να συγκριθεί αυτό το αποτέλεσμα με εκείνο του Προβλήματος 17 στην Ενότητα 10.3. Ποιο είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα αν η f έχει μια συνημιτονική σειρά;

(β) Να εφαρμοσθεί το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) στη σειρά για το πριονωτό κύμα που δίνεται στην Εξ. (9) και στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Η σχέση αυτή ανακαλύφθηκε από τον Euler γύρω στα 1735.

Ειδικές Σειρές Fourier. Έστω f μια συνάρτηση η οποία αρχικά ορίζεται στο διάστημα $0 \le x \le L$. Στην ενότητα αυτή δείξαμε ότι είναι δυνατή η αναπαράσταση της f είτε από μια ημιτονική είτε από μια συνημιτονική σειρά κατασκευάζοντας περιττές ή άρτιες περιοδικές επεκτάσεις της f, αντίστοιχα. Τα Προβλήματα 38 έως 40 αφορούν ορισμένες πιο ειδικές σειρές Fourier, οι οποίες συγκλίνουν στη δοθείσα συνάρτηση f στο διάστημα $(0, L)$.

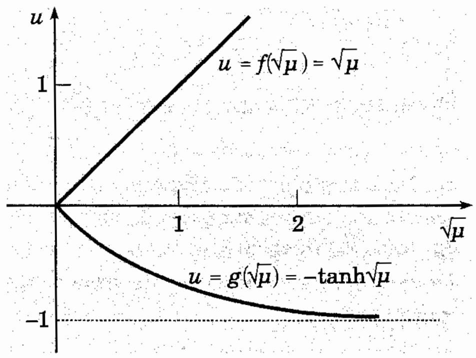
38. Έστω ότι η f επεκτείνεται στο διάστημα $(L,\ 2L)$ κατά έναν αυθαίρετο τρόπο. Να επεκταθεί η συνάρτηση που προέκυψε, στο διάστημα $(-2L,\ 0)$ ως μια περιττή συνάρτηση και στα υπόλοιπα σημεία ως μια περιοδική συνάρτηση περιόδου $4L$ (βλ. Σχήμα 10.4.6). Να δειχθεί ότι η συνάρτηση αυτή έχει μια ημιτονική σειρά Fourier ως προς τις συναρτήσεις $\sin(n\pi x/2L)$, $n = 1,2,3,\ \ldots$, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/2L),$$

όπου

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin(n\pi x/2L)\,dx.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει στην αρχική συνάρτηση στο διάστημα $(0,\ L)$.



ΣΧΗΜΑ 11.2.2 Γραφική λύση της $\sqrt{\mu} = -\tanh\sqrt{\mu}$.

Τέλος, είναι αναγκαίο να εξετάσουμε την πιθανότητα το λ να είναι μιγαδικό. Είναι δυνατόν να δειχθεί με απευθείας υπολογισμό ότι το πρόβλημα (14), (15) δεν έχει μιγαδικές ιδιοτιμές. Ωστόσο, στην Ενότητα 11.3 θεωρούμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια μια ευρεία κλάση προβλημάτων που περιλαμβάνει αυτό το παράδειγμα.

Εκεί δείχνουμε ότι κάθε πρόβλημα σε αυτή την κλάση έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές. Συνεπώς παραλείπουμε εδώ την εξέταση της μη ύπαρξης μιγαδικών ιδιοτιμών. Άρα συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος (14), (15) δίνονται από τις Εξ. (21) και (22).

Προβλήματα

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 4, να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του δοθέντος προβλήματος συνοριακών τιμών. Υποθέστε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές.

1. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
3. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 5 έως 8, να προσδιορισθεί η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων και η εξίσωση ορίζουσας που ικανοποιείται από τις μη μηδενικές ιδιοτιμές. Να προσδιορισθεί αν $\lambda = 0$ είναι μία ιδιοτιμή, και να βρεθούν προσεγγιστικές τιμές για τα λ_1 και λ_2, τις μη μηδενικές ιδιοτιμές με τις μικρότερες απόλυτες τιμές. Να εκτιμηθεί το λ_n για μεγάλες τιμές του n. Υποθέστε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές.

5. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
6. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0$

τάλληλο σύνολο συνοριακών συνθηκών. Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα, το οποίο χρησιμεύει επίσης στην επεξήγηση της εμφάνισης μη χωρισμένων συνοριακών συνθηκών.

Παράδειγμα 4 Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{44}$$

$$y(-L) - y(L) = 0, \quad y'(-L) - y'(L) = 0 \tag{45}$$

Αυτό δεν είναι πρόβλημα Sturm-Liouville, επειδή οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι χωρισμένες. Οι σχέσεις (45) ονομάζονται **περιοδικές συνοριακές συνθήκες**, καθώς απαιτούν από τα y και y' να λαμβάνουν τις ίδιες τιμές στα $x = L$ και $x = -L$. Παρ' όλα αυτά, μπορεί να δειχθεί άμεσα ότι το πρόβλημα (44), (45) είναι αυτοσυζυγές. Ένας απλός υπολογισμός θεμελιώνει ότι το $\lambda_0 = 0$ είναι μια ιδιοτιμή και ότι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση είναι $\phi_0(x) = 1$. Επιπλέον, υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές $\lambda_1 = (\pi/L)^2, \lambda_2 = (2\pi/L)^2, \ldots, \lambda_n = (n\pi/L)^2, \ldots$. Σε κάθε μία από αυτές τις μη μηδενικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν *δύο* γραμμικώς ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις. Για παράδειγμα, στο λ_n αντιστοιχούν οι δύο ιδιοσυναρτήσεις $\phi_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ και $\psi_n(x) = \sin(n\pi x/L)$. Έτσι βλέπουμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις ίσως δεν είναι απλές όταν οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι χωρισμένες. Επιπλέον, αν ζητείται το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης f περιόδου $2L$ σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος (44), (45), προκύπτει η σειρά

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

η οποία είναι ακριβώς η σειρά Fourier της συνάρτησης f.

Δεν θα συνεχίσουμε την εξέταση προβλημάτων που έχουν μη διαχωρισμένες συνοριακές συνθήκες, ούτε θα μελετήσουμε προβλήματα ανώτερης της δεύτερης τάξης, εκτός από λίγες εξαιρέσεις. Ωστόσο υπάρχει ένα άλλο είδος γενίκευσης που θέλουμε να μελετήσουμε. Πρόκειται για την περίπτωση στην οποία οι συντελεστές p, q, r, στην Εξ. (1) δεν ικανοποιούν ακριβώς τις μάλλον αυστηρές απαιτήσεις για συνέχεια και θετικότητα που διατυπώθηκαν στην αρχή αυτής της ενότητας. Τέτοια προβλήματα καλούνται ιδιάζοντα προβλήματα Sturm-Liouville και αποτελούν το αντικείμενο της Ενότητας 11.5.

Προβλήματα

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 5 να προσδιορισθούν οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του δοθέντος προβλήματος.

1. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$, βλ. Ενότητα 11.2, Πρόβλημα 1.
2. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$, βλ. Ενότητα 11.2, Πρόβλημα 2.
3. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$, βλ. Ενότητα 11.2, Πρόβλημα 3.

4. $y''+\lambda y=0, \quad y'(0)=0, \quad y'(1)+y(1)=0$, βλ. Ενότητα 11.2, Πρόβλημα 7.

5. $y''-2y'+(1+\lambda)y=0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0$, βλ. Ενότητα 11.2, Πρόβλημα 9.

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 6 έως 9 να βρεθεί το ανάπτυγμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$ σε ιδιοσυναρτήσεις της δοθείσας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του Προβλήματος 1.

6. $f(x)=1, \quad 0\le x\le 1$

7. $f(x)=x, \quad 0\le x\le 1$

8. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 10 έως 13 να βρεθεί το ανάπτυγμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$ σε ιδιοσυναρτήσεις της δοθείσας συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του Προβλήματος 4.

10. $f(x)=1, \quad 0\le x\le 1$

11. $f(x)=x, \quad 0\le x\le 1$

12. $f(x)=1-x, \quad 0\le x\le 1$

13. $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 14 έως 18 να προσδιορισθεί κατά πόσον το πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι αυτοσυζυγές.

14. $y''+y'+2y=0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0$

15. $(1+x^2)y''+2xy'+y=0, \quad y'(0)=0, \quad y(1)+2y'(1)=0$

16. $y''+y=\lambda y, \quad y(0)-y'(1)=0, \quad y'(0)-y(1)=0$

17. $(1+x^2)y''+2xy'+y=\lambda(1+x^2)y, \quad y(0)-y'(1)=0, \quad y'(0)+2y(1)=0$

18. $y''+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y(\pi)+y'(\pi)=0$

19. Να δειχθεί ότι, αν οι συναρτήσεις u και v ικανοποιούν τις Εξ. (2) και είτε $a_2=0$ είτε $b_2=0$ ή και τα δύο, τότε

$$p(x)[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)]\Big|_0^1=0.$$

20. Στο πρόβλημα αυτό δίνουμε το περίγραμμα μιας απόδειξης του πρώτου μέρους του Θεωρήματος 11.3.3, ότι οι ιδιοτιμές του προβλήματος Sturm-Liouville (1), (2) είναι απλές. Για δοθείσα τιμή του λ, έστω ϕ_1 και ϕ_2 δύο γραμμικώς ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις. Να υπολογισθεί η ορίζουσα Wronski $W(\phi_1,\phi_2)(x)$ και να χρησιμοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες (2), ώστε να δειχθεί ότι $W(\phi_1, \phi_2)(0)=0$. Ακολούθως να χρησιμοποιηθούν τα Θεωρήματα 3.3.2 και 3.3.3, ώστε να δειχθεί ότι τα ϕ_1 και ϕ_2 δεν μπορούν να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα όπως υποθέσαμε.

21. Έστω το πρόβλημα Sturm-Liouville

$$-[p(x)y']'+q(x)y=\lambda r(x)y,$$

$$a_1y(0)+a_2y'(0)=0, \qquad b_1y(1)+b_2y'(1)=0,$$

όπου τα p, q, r ικανοποιούν τις συνθήκες που διατυπώθηκαν στο κείμενο.

(α) Να δειχθεί ότι, αν λ είναι μια ιδιοτιμή και ϕ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση, τότε

Προβλήματα

Να λυθεί κάθε ένα από τα Προβλήματα 1 έως 5 με χρήση αναπτυγμάτων σε ιδιοσυναρτήσεις.

1. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
2. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$· βλ. Ενότητα 11.3, Πρόβλημα 7.
3. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$· βλ. Ενότητα 11.3, Πρόβλημα 3.
4. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$· βλ. Ενότητα 11.3, Πρόβλημα 11.
5. $y'' + 2y = -1 + |1 - 2x|, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 6 έως 9 να προσδιορισθεί ένα ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων για τη λύση του δοθέντος προβλήματος. Να υποτεθεί ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 11.4.1. Να δοθούν οι τιμές του μ για τις οποίες υπάρχει η λύση.

6. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
7. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
8. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
9. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$

Σε κάθε ένα από τα Προβλήματα 10 έως 13 να προσδιορισθεί κατά πόσον υπάρχει τιμή της σταθεράς a για την οποία το πρόβλημα έχει μια λύση και να βρεθεί η λύση αυτή για τη συγκεκριμένη τιμή του a.

10. $y'' + \pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
11. $y'' + 4\pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
12. $y'' + \pi^2 y = a, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
13. $y'' + \pi^2 y = a - \cos \pi x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
14. Έστω $\phi_1, ..., \phi_n, ...$ οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της διαφορικής εξίσωσης (3) που υπόκειται στις συνοριακές συνθήκες (2). Εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ συγκλίνει στην $f(x)$, όπου $f(x) = 0$ για κάθε x στο $0 \leq x \leq 1$, να δειχθεί ότι $c_n = 0$ για κάθε n.
    Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε επί $r(x)\phi_m(x)$, ολοκληρώστε και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων.
15. Έστω L ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης. Να δειχθεί ότι η λύση $y = \phi(x)$ του προβλήματος

$$L[y] = f(x),$$
$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = \alpha, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = \beta$$

μπορεί να γραφεί ως $y = u + v$, όπου τα $u = \phi_1(x)$ και $v = \phi_2(x)$ είναι λύσεις των προβλημάτων

$$L[u] = 0,$$
$$a_1 u(0) + a_2 u'(0) = \alpha, \qquad b_1 u(1) + b_2 u'(1) = \beta$$

και

είναι γραμμική, ημιγραμμική, σχεδόν γραμμική, ή μη γραμμική. Να βρεθεί ακόμη η τάξη της εξίσωσης.

α) $u_{x_1} + x_1 u_{x_2} = 0$

β) $u_t + u u_x = u_{xxt}$

γ) $\dfrac{u_{x_1}}{\sqrt{1+u_{x_1}^2}} + \dfrac{u_{x_2}}{\sqrt{1+u_{x_2}^2}} = 0$

δ) $u_{x_1} + e^{x_2} u_{x_2} = 0$

ε) $u_t + u_{xxxx} + \sqrt{1+u} = 0$

στ) $\cos^2 u_{x_1x_2} + u = 2u_{x_1}^2 + 3u_{x_2} - \sin^2 u_{x_1x_2}$

ζ) $2u_{x_1x_1} u_{x_1x_1x_2} - (u_{x_1x_1} - u_{x_2})_{x_1}^2 - 2u_{x_2} u_{x_1x_1x_2} + u_{x_1} = 0$.

1.3 Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω εξισώσεων τετριμμένης μορφής

α) $u_{x_1x_1}(x_1,x_2) = 0$

β) $u_{x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$

γ) $u_{x_1x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$.

1.4 Αφού μετατρέψετε την εξίσωση

$x_1 u_{x_2} = x_2 u_{x_1}$

στις πολικές συντεταγμένες

$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta$

αποδείξτε ότι κάθε λύση της παραπάνω εξίσωσης περιγράφει μια επιφάνεια από περιστροφή.

1.5 Να δειχτεί ότι η συνάρτηση

$u(\mathbf{x},t) = A\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$, $\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3$, $t\in \mathbb{R}$

Η αναμενόμενη x_i-συντεταγμένη της ορμής του σωματιδίου τη στιγμή t, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_{\Omega} \left[-i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi(\mathbf{x},t) \right] \Psi^*(\mathbf{x},t) \, d\upsilon(\mathbf{x}) \quad .$$

Γενικά, στην κβαντική μηχανική κάθε ***παρατηρήσιμο μέγεθος*** περιγράφεται από κάποιο τελεστή A, που δρα επάνω στο χώρο των κυματοσυναρτήσεων. Η αναμενόμενη τιμή του παρατηρήσιμου μεγέθους A δίνεται από την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{\Omega} [A \ \Psi(\mathbf{x},t)] \ \Psi^*(\mathbf{x},t) \ d\upsilon(\mathbf{x}) \quad .$$

Έτσι ο ***τελεστής της θέσης*** έχει τη μορφή

$$A \ \Psi = \mathbf{x} \ \Psi \tag{3.81}$$

και ο ***τελεστής της ορμής*** έχει τη μορφή

$$A \ \Psi = - \ i \frac{h}{2\pi} \nabla \quad . \tag{3.82}$$

Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα εξαιρετικά συγγράμματα [18,22].

3.10 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3.1 Για κάθε μια από τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις να περιγράψετε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ στα οποία οι εξισώσεις είναι ελλειπτικού, παραβολικού ή υπερβολικού τύπου

α) $2u_{x_1x_1} + 4u_{x_1x_2} + 3u_{x_2x_2} - u = 0$

β) $u_{x_1x_1} + 2x_1u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} + \sin(x_1x_2)u = 5$

γ) $x_2u_{x_1x_1} - 2u_{x_1x_2} + e^{x_1}u_{x_2x_2} + x_1^2u_{x_1} - u = 0$.

3.2 Να βρεθεί ο τύπος κάθε μιας από τις εξισώσεις που ακολουθούν και οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές καμπύλες

α) $u_{x_1x_1} + x_2u_{x_2x_2} = 0$

β) $u_{x_1x_1} + x_2^2u_{x_2x_2} = 0$

γ) $x_2^2u_{x_1x_1} - 2x_1x_2u_{x_1x_2} + x_1^2u_{x_2x_2} + x_2u_{x_1} + x_1u_{x_2} = 0$

δ) $x_2^3u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$.

3.3 Να βρεθούν οι κανονικές μορφές των εξισώσεων

α) $u_{x_1x_1} - 2\sin x_1u_{x_1x_2} - \cos^2x_1u_{x_2x_2} - \cos x_1u_{x_2} = 0$

β) $x_2^2u_{x_1x_1} + 2x_1x_2u_{x_1x_2} + x_1^2u_{x_2x_2} = 0$

γ) $u_{x_1x_1} - 2x_1u_{x_1x_2} = 0$.

3.4 Θεωρείστε τη μερική διαφορική εξίσωση

$3u_{x_2} + u_{x_1x_2} = 0$

(i) να βρεθεί ο τύπος της

(ii) χρησιμοποιείστε το μετασχηματισμό $v=u_{x_2}$ για να υπολογίσετε τη γενική της λύση

(iii) να ελέγξετε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της λύσης αν δοθούν και οι αρχικές συνθήκες

$u(x_1,0) = e^{-3x_1}, \quad u_{x_2}(x_1,0) = 0$.

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) \ , \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{5.416}$$

ενώ για τη συνθήκη Neumann έχουμε

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}) + c \ , \quad \mathbf{x} \in \Omega \ . \tag{5.417}$$

5.18 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Να λυθούν τα ακόλουθα προβλήματα συνοριακών τιμών

5.1 $\Delta u(x_1,x_2) = 0 \ , \qquad (x_1,x_2) \in (0,1)\times(0,1)$

$u(x_1,0) = x_1(x_1-1) \ , \ u(x_1,1) = 0 , \qquad x_1 \in [0,1]$

$u(0,x_2) = 0 , \qquad u(1,x_2) = 0 , \qquad x_2 \in [0,1] \ .$

5.2 $\Delta u(x_1,x_2) = -2x_2 \ , \qquad (x_1,x_2) \in (0,1)\times(0,1)$

$u(0,x_2) = u(1,x_2) = 0 \ , \qquad x_2 \in [0,1]$

$u(x_1,0) = u(x_1,1) = 0 \ , \qquad x_1 \in [0,1] \ .$

5.3 $\Delta u(x_1,x_2,x_3) = 0 \ , \qquad (x_1,x_2,x_3) \in (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$

$u(0,x_2,x_3) = \sin\left(\frac{\pi x_2}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi x_3}{c}\right) , \qquad (x_2,x_3) \in [0,b]\times[0,c]$

$u(a,x_2,x_3) = 0 \ , \qquad (x_2,x_3) \in [0,b]\times[0,c]$

$u(x_1,0,x_3) = u(x_1,b,x_3) = 0 \ , \qquad (x_1,x_3) \in [0,a]\times[0,c]$

$u(x_1,x_2,0) = u(x_1,x_2,c) = 0 \ , \qquad (x_1,x_2) \in [0,a]\times[0,b] \ .$

5.4 $\Delta u(\varrho,\varphi) = 0 \quad , \qquad 1<\varrho<2, \ 0\le\varphi\le\pi$

$u(1,\varphi) = \sin\varphi \quad , \qquad \varphi\in[0,\pi]$

$u(2,\varphi) = 0 \quad , \qquad \varphi\in[0,\pi]$

$u(\varrho,0) = 0 \qquad 1\le\varrho\le2$

$u(\varrho,\pi) = 0 \qquad 1\le\varrho\le2 \quad .$

5.5 $\Delta u(\varrho,\varphi) = 0 \quad , \qquad 1<\varrho<2, \ \varphi\in[0,2\pi)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=1} = \sin\varphi \quad , \qquad \varphi\in[0,2\pi)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=2} = 0 \quad , \qquad \varphi\in[0,2\pi) \quad .$$

5.6 $\Delta u(\varrho,\varphi) = 0 \quad , \qquad \alpha<\varrho<\beta, \ \varphi\in[0,2\pi)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=\alpha} = f(\varphi) \ , \ \left.\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=\beta} = g(\varphi), \qquad \varphi\in[0,2\pi)$$

όταν $\displaystyle\int_{\varrho=\alpha} f\,ds + \int_{\varrho=\beta} g\,ds = 0 \quad .$

5.7 $\Delta u(\varrho,\varphi) = -\varrho^2\sin2\varphi \quad , \qquad \alpha<\varrho<\beta, \ \varphi\in[0,2\pi)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=\alpha} = \left.\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=\beta} = 0 \quad , \qquad \varphi\in[0,2\pi) \quad .$$

5.8 $\Delta u(x_1,x_2) = 0, \qquad (x_1,x_2)\in(0,\alpha)\times(0,\beta)$
όταν

$$\left.\begin{aligned} u(x_1,0) &= f_1(x_1) \\ u(x_1,\beta) &= f_2(x_1) \end{aligned}\right\} , \qquad x_1\in[0,\alpha]$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,x_2) &= f_3(x_2) \\ u(\alpha,x_2) &= f_4(x_2) \end{aligned}\right\} , \qquad x_2\in[0,\beta]$$

5.9 $\Delta u(\varrho,\varphi) = 0$, $0\leq\varrho<\alpha$, $\varphi\in[0,2\pi)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right|_{\varrho=\alpha} = f(\varphi) , \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

αν
i) $f=A$
ii) $f=Ax_1$
iii) $f=A(x_1^2-x_2^2)$
iv) $f=A\cos\varphi+B$
v) $f=A\sin\varphi+B\sin3\varphi$.

5.10 $\Delta u(\varrho,\varphi) = 0$, $1<\varrho<3$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

$u(1,\varphi) = \sin\varphi$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

$u(3,\varphi) = 0$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

$u(\varrho,0) = (\varrho-1)(\varrho-3)$ $1\leq\varrho\leq3$

$u(\varrho,\frac{\pi}{2}) = 0$ $1\leq\varrho\leq3$.

5.11 α) $\Delta u(\varrho,\varphi) = 0$, $0\leq\varrho<\alpha$, $\varphi\in[0,2\pi)$

$$\frac{\partial u(\alpha,\varphi)}{\partial \varrho} - h\, u(\alpha,\varphi) = -f(\varphi) , \quad \varphi\in[0,2\pi),\ h=\text{σταθερό}$$

β) Να επιλυθεί το αντίστοιχο εξωτερικό πρόβλημα ($\varrho>\alpha$).

5.12 Να λυθούν τα προβλήματα

α) $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 1$, $\alpha^2 < x_1^2 + x_2^2 < b^2$

με u ίση με μηδέν και στα δύο σύνορα r=a και r=b.

β) $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 1$, $\alpha^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < b^2$

$u(L,t) = B \ ,$ $\quad t \geq 0$

$u(x,0) = 0 \ ,$ $\quad x \in [0,L]$

όπου Q, A, B είναι σταθερά.

Με χρήση ολοκληρωτικών μετασχηματισμών να λυθούν τα προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών που ακολουθούν.

6.14 $u_t(x_1,x_2,t) = \varkappa \Delta u(x_1,x_2,t) \ ,$ $\quad x_1>0, \ x_2>0, \ t>0$

$u(x_1,0,t) = g(x_1) \ ,$ $\quad x_1 \geq 0, \ t \geq 0$

$u(0,x_2,t) = 0 \ ,$ $\quad x_2 \geq 0, \ t \geq 0$

$u(x_1,x_2,0) = 0 \ ,$ $\quad x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \ .$

6.15 $u_t(x_1,x_2,t) = \Delta u(x_1,x_2,t) \ ,$ $\quad x_1 \in (0,+\infty), \ x_2 \in (0,a), \ t>0$

$u(x_1,x_2,0) = 0 \ ,$ $\quad x_1 \in [0,+\infty), \ x_2 \in [0,a]$

$u(0,x_2,t) = 0 \ ,$ $\quad x_2 \in [0,a], \ t \geq 0$

$u(x_1,0,t) = 0 \ ,$ $\quad x_1 \in [0,+\infty), \ t \geq 0$

$u(x_1,a,t) = 1 \ ,$ $\quad x_1 \in [0,+\infty), \ t \geq 0 \ .$

6.16 $u_t = \varkappa u_{xx},$ $\quad 0<x<+\infty, \ t>0$

$u(x,0) = x \ ,$ $\quad x \geq 0$

$u(0,t) = a \ ,$ $\quad t \geq 0$

$\lim_{x \to \infty} u(x,t) = 0$ $\quad t \geq 0 \ .$

6.17 $u_t = \varkappa u_{xx} \ ,$ $\quad 0<x<+\infty, \ t>0$

$u(x,0) = 0 \ ,$ $\quad x \in [0,+\infty)$

$u(0,t) = f_0 \ ,$ $\quad t \geq 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(x')\,dx' + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} f(x',t)dx'dt$$

όπου Δ το τρίγωνο που περικλείεται από την ευθεία x=0, και τις χαρακτηριστικές ευθείες που διέρχονται από το (x,t).

β) Να λυθεί με βάση το βήμα (α) το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_{tt} = c^2u_{xx}\ ,\ u(x,0) = \sin x\ ,\ u_t(x,0) = 1+x\ .$$

Να λυθούν τα προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών που ακολουθούν.

7.4
$$\Delta u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\qquad (x_1,x_2)\in(0,a)\times(0,b),\ t>0$$
$$u(x_1,x_2,0) = f(x_1,x_2)\ ,\qquad (x_1,x_2)\in[0,a]\times[0,b]$$
$$u_t(x_1,x_2,0) = g(x_1,x_2)\ ,\qquad (x_1,x_2)\in[0,a]\times[0,b]$$
$$u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = 0\ ,\qquad x_2\in[0,b],\ t\geq 0$$
$$u(x_1,0,t) = u(x_1,b,t) = 0\ ,\qquad x_1\in[0,a],\ t\geq 0$$

όπου f, g γνωστές συναρτήσεις.

7.5
$$\Delta u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\qquad (x_1,x_2)\in(0,1)\times(0,1),\ t>0$$
$$u(x_1,x_2,0) = \sin^2(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\ ,\qquad (x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]$$
$$u_t(x_1,x_2,0) = 0\ ,\qquad (x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]$$
$$u(0,x_2,t) = u(1,x_2,t) = 0\ ,\qquad x_2\in[0,1],\ t\geq 0$$
$$u(x_1,0,t) = u(x_1,1,t) = 0\ ,\qquad x_1\in[0,1],\ t\geq 0\ .$$

7.6
$$\Delta u(x_1,x_2,x_3,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,\qquad (x_1,x_2,x_3)\in(0,a)\times(0,b)\times(0,d),\ t>0$$
$$u(x_1,x_2,x_3,0) = f(x_1,x_2,x_3)\ ,\qquad (x_1,x_2,x_3)\in[0,a]\times[0,b]\times[0,d]$$

$u_t(x_1,x_2,x_3,0) = g(x_1,x_2,x_3)$, $(x_1,x_2,x_3)\in[0,a]\times[0,b]\times[0,d]$

$u(0,x_2,x_3,t) = u(a,x_2,x_3,t) = 0$, $(x_2,x_3)\in[0,b]\times[0,d],\ t\geq 0$

$u(x_1,0,x_3,t) = u(x_1,b,x_3,t) = 0$, $(x_1,x_3)\in[0,a]\times[0,d],\ t\geq 0$

$u(x_1,x_2,0,t) = u(x_1,x_2,d,t) = 0$, $(x_1,x_2)\in[0,a]\times[0,b],\ t\geq 0$

όπου f, g γνωστές συναρτήσεις.

7.7 $\Delta u(x_1,x_2,x_3,t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $(x_1,x_2,x_3)\in(0,1)\times(0,1)\times(0,1),\ t>0$

$u(x_1,x_2,x_3,0)=\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3)$, $(x_1,x_2,x_3)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

$u_t(x_1,x_2,x_3,0) = 0$, $(x_1,x_2,x_3)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

$u(0,x_2,x_3,t) = u(1,x_2,x_3,t) = 0$, $(x_2,x_3)\in[0,1]\times[0,1],\ t\geq 0$

$u(x_1,0,x_3,t) = u(x_1,1,x_3,t) = 0$, $(x_1,x_3)\in[0,1]\times[0,1],\ t\geq 0$

$u(x_1,x_2,0,t) = u(x_1,x_2,1,t) = 0$, $(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1],\ t\geq 0$.

7.8 $\Delta u(\varrho,\varphi,z,t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $0\leq\varrho<a,\ \varphi\in[0,2\pi),\ 0<z<h,\ t>0$

$u(\varrho,\varphi,z,0) = f(\varrho,\varphi,z)$, $0\leq\varrho\leq a,\ \varphi\in[0,2\pi),\ z\in[0,h]$

$u_t(\varrho,\varphi,z,0) = g(\varrho,\varphi,z)$, $0\leq\varrho\leq a,\ \varphi\in[0,2\pi),\ z\in[0,h]$

$u(a,\varphi,z,t) = 0$, $\varphi\in[0,2\pi),\ z\in[0,h],\ t\geq 0$

$u(\varrho,\varphi,0,t) = u(\varrho,\varphi,h,t) = 0$, $0\leq\varrho\leq a,\ \varphi\in[0,2\pi),\ t\geq 0$

όπου f, g γνωστές συναρτήσεις.

7.9 $c^2\Delta u(x_1,x_2,t) + x_1x_2\sin t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $(x_1,x_2)\in(0,\pi)\times(0,\pi),\ t>0$

$u(x_1,x_2,0) = 0$, $(x_1,x_2)\in[0,\pi]\times[0,\pi]$

$$u_t(x_1,x_2,0) = 0 \,, \qquad (x_1,x_2)\in[0,\pi]\times[0,\pi]$$

$$u(0,x_2,t) = u(\pi,x_2,t) = 0 \,, \qquad x_2\in[0,\pi],\ t\geq 0$$

$$u(x_1,0,t) = u(x_1,\pi,t) = 0 \,, \qquad x_1\in[0,\pi],\ t\geq 0 \,.$$

7.10 $$\Delta u(\varrho,\varphi,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \,, \qquad 0\leq\varrho<1,\ \varphi\in[0,2\pi),\ t>0$$

$$u(\varrho,\varphi,0) = J_1(\lambda_{11}\varrho)\cos\varphi \,, \qquad 0\leq\varrho\leq 1,\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$u_t(\varrho,\varphi,0) = 0 \,, \qquad 0\leq\varrho\leq 1,\ \varphi\in[0,2\pi)$$

$$u(1,\varphi,t) = 0 \,, \qquad \varphi\in[0,2\pi),\ t\geq 0 \,.$$

7.11 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x\cos\omega t \,, \qquad 0<x<\pi,\ t>0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \,, \qquad t\geq 0$$

$$u(x,0) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \,, \qquad 0\leq x\leq\pi \,.$$

7.12 $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(2x)\cos t \,, \qquad 0<x<\pi,\ t>0$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \,, \qquad t\geq 0$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \,, \qquad x\in[0,\pi] \,.$$

7.13 $$\Delta u(x_1,x_2,x_3,t) + e^{x_1+x_2}\cos 2t = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \,, \qquad (x_1,x_2,x_3)\in(0,\pi)\times(0,\pi)\times(0,\pi),\ t>0$$

$$u(0,x_2,x_3,t) = u(\pi,x_2,x_3,t) = 0 \,, \qquad (x_2,x_3)\in[0,\pi]\times[0,\pi],\ t\geq 0$$

$$u(x_1,0,x_3,t) = u(x_1,\pi,x_3,t) = 0 \,, \qquad (x_1,x_3)\in[0,\pi]\times[0,\pi],\ t\geq 0$$