ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

"Ανάλυση και προσεγγίσεις προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου για εξελικτικές εξισώσεις: βασικές έννοιες, μερικά βασικά αποτελέσματα"

Καρατζάς Ευθύμιος

Μεταπτυχιακός Φοιτητής Τμήματος Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Επιβλέπων καθηγητής: Κος Κ. Χρυσαφίνος

Τομέας Μαθηματικών

Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Υπολογιστικά Μαθηματικά και Πληροφορική

Αθήνα, Οκτώβριος 2009

Αφιερώνεται
στην
οικογένειά
μου

Πρόλογος

Η διπλωματική αυτή εργασία έγινε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών του Τμήματος Σ.Ε.Μ.Φ.Ε στο Πολυτεχνείο Αθηνών και υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Κ. Χρυσαφίνου.

Επιθυμώ να εκφράσω θερμές ευχαριστίες στην οικογένειά μου που με στήριξε όλο αυτό το διάστημα με το καλύτερο τρόπο, και στον κ. Κ. Χρυσαφίνο για την κατανόηση και την υπομονή καθώς και τις εύστοχες υποδείξεις του, τόσο κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, όσο και καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Υποδείξεις και διδάγματα που μου στάθηκαν τόσο πολύτιμα και η προσφορά τους δεν μπορεί να εκφραστεί με λόγια. Τέλος θα ήταν μεγάλη παράλειψή μου, αν δεν ευχαριστούσα τους κ. Ι. Χρυσοβέργη και κ. Ι. Κολέτσο καθώς και αρκετούς συναδέλφους φοιτητές που οι συζητήσεις μαζί τους με οδήγησαν σε γόνιμους προβληματισμούς, σκέψεις και μελέτη, καθώς και τη φιλόλογο Γ. Ρόπουλου για τη γλωσσική επιμέλεια.

Αθήνα, Οκτώβριος 2009

Ευθύμιος Καρατζάς

karmakis@master.math.upatras.gr

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες - Χώροι Sobolev

1.1 Χώροι Hölder

Πριν προχωρήσουμε στους χώρους *Sobolev* θα ασχοληθούμε με τους απλούστερους χώρους *Hölder*.

Θεωρούμε ότι το $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό και $0 < \gamma \leqslant 1$. Η κλάση των συνεχών συναρτήσεων *Lipschitz* $u : U \to \mathbb{R}$, εξ ορισμού ικανοποιεί τη σχέση

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C\,|x - y| \quad (x, y \in U) \tag{1.1}$$

για κάποια σταθερά C. Τώρα η (1.1) προφανώς υποδηλώνει ότι η u είναι συνεχής και επίσης παρέχει ομοιόμορφη συνέχεια (*provides a uniform modulus continuity*). Προκύπτει επίσης ότι είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε συναρτήσεις u που ικανοποιούν τη σχέση

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C\,|x - y|^{\gamma} \quad (x, y \in U) \tag{1.2}$$

για κάποια σταθερά C. Μια τέτοια συνάρτηση καλείται *Hölder* συνεχής με εκθέτη γ.

Ορισμός 1.1 *i. Αν $u : U \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και συνεχής, γράφουμε*

$$\|u\|_{C(\bar{U})} := \sup_{x \in U} |u(x)| .$$

ii. Η γ^{η}-Hölder ημινόρμα της $u : U \to \mathbb{R}$ είναι

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\},$$

και η γ^{η}-Hölder νόρμα είναι

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} .$$

Ορισμός 1.2 *Ο χώρος Hölder*

$$C^{k,\gamma}(\bar{U})$$

περιέχει όλες τις συναρτήσεις $u \in C^k(\bar{U})$ για τις οποίες η νόρμα

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^a u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^a u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \tag{1.3}$$

είναι πεπερασμένη.

Οπότε ο χώρος $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ περιέχει όλες τις συναρτήσεις u που είναι k-φορές συνεχείς και παραγωγίσιμες και των οποίων οι $k^{-οστες}$ μερικές παράγωγοι είναι φραγμένες και *Hölder* συνεχείς με εκθέτη γ. Τέτοιες συναρτήσεις έχουν ομαλή συμπεριφορά, και επιπλέον ο χώρος $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ αποτελεί μια καλή μαθηματική κατασκευή:

Θεώρημα 1.3 (Χώροι *Hölder* ως χώροι συναρτήσεων) *Ο χώρος των συναρτήσεων $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ είναι ένας Banach χώρος.*

Υπενθυμίζουμε ότι αν με X συμβολίζουμε έναν πραγματικό γραμμικό χώρο, τότε η απεικόνιση $\| \ \| : X \to [0, \infty)$ ονομάζεται *νόρμα* αν

i. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ για όλα τα $u, v \in$ X,

ii. $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$ για όλα τα $u \in$ X, $\lambda \in \mathbb{R}$,

iii. $\|u\| = 0$ αν και μόνο αν $u = 0$.

Μια νόρμα μάς παρέχει και την έννοια της σύγκλισης: λέμε πως μια ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *συγκλίνει* στο $u \in X$, γράφοντας $u_k \to u$, αν $\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\| = 0$. Ένας χώρος είναι χώρος *Banach* όταν είναι γραμμικός χώρος με νόρμα ο οποίος είναι και *πλήρης* που σημαίνει ότι κάθε Cauchy ακολουθία[1] συγκλίνει.

Οπότε στο Θεώρημα 1.3 δηλώνουμε ότι αν πάρουμε σε ένα γραμμικό χώρο $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ τη νόρμα $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})}$, ορισμένη από την (1.3), τότε η $\| \cdot \|$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) - (ii), και επιπλέον κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.

1.2 Χώροι Sobolev

Οι χώροι *Hölder* όπως παρουσιάστηκαν προηγουμένως είναι δυστυχώς ακατάλληλοι ως υπόβαθρο για τη βασική θεωρία των PDE, καθώς συνήθως

[1]Μια ακολουθία $x_1, x_2, x_3, ...$ πραγματικών αριθμών λέγεται Cauchy αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ε, υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός N τέτοιος ώστε για όλους τους φυσικούς αριθμούς $m, n > N$ είναι $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

δεν μπορούμε να κάνουμε αρκετά καλούς υπολογισμούς ώστε να αποδείξουμε ότι οι λύσεις που κατασκευάζουμε όντως ανήκουν σε τέτοιους χώρους. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι κάποια άλλα είδη χώρων, που περιέχουν λιγότερο ομαλές συναρτήσεις. Στην πράξη πρέπει να επιτύχουμε το σχεδιασμό χώρων αποτελούμενων από συναρτήσεις που έχουν κάποιες, αλλά όχι τόσο σημαντικές, ιδιότητες ομαλότητας.

1.2.1 Ασθενείς παράγωγοι

Ξεκινάμε με ουσιαστική αποδυνάμωση της έννοιας της μερικής παραγώγου (weak derivatives).

Σημείωση. Ας συμβολίσουμε με $C_c^\infty(U)$ το χώρο των απείρως διαφορίσιμων συναρτήσεων $\varphi : U \to \mathbb{R}$, με compact support[2] στο U. Θα ονομάζουμε συχνά μια συνάρτηση φ που ανήκει στον $C_c^\infty(U)$ ως συνάρτηση δοκιμής (test function).

Ορισμός 1.4 *Υποθέτουμε ότι $u, v \in L^1_{loc}(U)$, και α ένας πολυδείκτης (multiindex). Λέμε ότι η v είναι μια $\alpha^{-o\sigma\tau\eta}$ ασθενής μερική παράγωγος του v, γράφοντας*

$$D^\alpha u = v,$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\int_U u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \varphi dx \tag{1.4}$$

[2]Support μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των σημείων όπου η συνάρτηση δεν είναι μηδέν. Συναρτήσεις με compact support στον X είναι αυτές με support το οποίο είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

για όλες τις συναρτήσεις δοκιμής $\varphi \in C_c^\infty(U)$.

Με άλλα λόγια, αν μας δίνεται u και αν συμβαίνει να υπάρχει μια συνάρτηση v που ικανοποιεί την (1.4) για όλα τα φ, λέμε ότι η $D^\alpha u = v$ είναι η ασθενής έννοια. Αν δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση v, τότε η u δεν αποτελεί μια ασθενή $\alpha^{-o\sigma\tau\eta}$ παράγωγο.

Λήμμα 1.5 (Μοναδικότητα των ασθενών παραγώγων) *Μια ασθενής $\alpha^{-o\sigma\tau\eta}$ μερική παράγωγος του u, αν υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν*[3].

1.2.2 Ορισμός των χώρων Sobolev.

Έστω $1 \leq p \leq \infty$ και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Ορίζουμε τώρα ορισμένους χώρους συναρτήσεων, οι οποίοι έχουν ασθενείς παραγώγους διαφόρων τάξεων πάνω σε χώρους L^p.

Ορισμός 1.6 *Ο χώρος Sobolev*

$$W^{k,p}(U)$$

περιέχει όλες τις τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $u : U \to \mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε για κάθε πολυδείκτη* α *με* $|\alpha| \leqslant k$, *η* $D^\alpha u$ *υπάρχει με την ασθενή έννοια και ανήκει στον* L^p.

[3] Υπενθυμίζουμε πως αν (X, M, μ) είναι ένας μετρικός χώρος, και $A \in M$ τότε το A λέγεται ότι είναι μέτρου μηδέν αν $\mu(A) = 0$. (Με τον όρο μέτρο ή θετικό μέτρο εννοούμε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού μία σ-άλγεβρα Σ ενός μετρήσιμου χώρου και πεδίο τιμών στους μη αρνητικούς αριθμούς $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ με την ιδιότητα: εάν A_n, $n = 1, 2, ...$ είναι μία ακολουθία ξένων μεταξύ τους συνόλων στο Σ τότε $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$).

Σημείωση

i. Αν $p = 2$, συνήθως γράφουμε

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \ (k = 0, 1, ...).$$

Το γράμμα H χρησιμοποιείται, αφού, καθώς θα δούμε, ο $H^k(U)$ είναι ένας χώρος Hilbert. Ας σημειώσουμε πως $H^0(U) = L^2(U)$.

ii. Από εδώ και στο εξής θα αναγνωρίζουμε συναρτήσεις στον $W^{k,p}(U)$ που συμφωνούν σχεδόν παντού.

Ορισμός 1.7 *Αν $u \in W^{k,p}(U)$, ορίζουμε την νόρμα*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_U |D^a u|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leqslant p \leqslant \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leqslant k} ess \sup_U |D^a u| & (p = \infty). \end{cases}$$

Συμβολισμός: αν η πραγματικών τιμών συνάρτηση f είναι μετρήσιμη[4], ορίζουμε το essential supremum[5] (στοιχειώδης supremum):

$$ess \sup f := \inf\{\mu \in \mathbb{R} \mid \ |\{f > \mu\}| = 0\}.$$

[4]Μετρήσιμες συναρτήσεις είναι συναρτήσεις με ομαλή συμπεριφορά σε μετρήσιμους χώρους (σ-πεδία). Αν Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω σε ένα σύνολο X και T είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο Y, τότε η συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι μετρήσιμη Σ/T αν το preimage $f^{-1}[B] = \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$ κάθε συνόλου του T ανήκει στο Y.

[5]Οι έννοιες essential supremum και essential infimum σχετίζονται με τα supremum και infimum. Όμως τα δύο πρώτα είναι πιο κατάλληλα στη θεωρία μέτρου, όπου συχνά μας απασχολούν καταστάσεις που δεν είναι έγκυρες παντού, για παράδειγμα δεν είναι έγκυρες για όλα τα στοιχεία ενός συνόλου, αλλά σχεδόν παντού, δηλαδή εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν. Έστω (X, Σ, μ) ένας μετρικός χώρος –όπου μετρικός χώρος (X, d) αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο X, και μια πραγματική συνάρτηση d (καλούμενη

Ορισμός 1.8 *i. Έστω* $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, $u \in W^{k,p}(U)$. *Λέμε ότι* u_m *συγκλίνει στο* u *στο* $W^{k,p}(U)$, *και γράφουμε:*

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U),$$

$$\text{αν } \lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

ii. Γράφουμε:

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}_{loc}(U),$$

εννοώντας ότι

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(V),$$

για κάθε $V \subset\subset U$.

Ορισμός 1.9 *Συμβολίζουμε με*

$$W_0^{k,p}(U)$$

μετρική) ορισμένη επί του συνόλου $X \times X$ έτσι ώστε για όλα τα x, y, και z του X να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες: (i) $d(x,y) > 0$ αν $x \neq y$, και $d(x,y) = 0$ εαν $x = y$, (ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (συμμετρία), (iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ – και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη στον X και με πραγματικές τιμές, η οποία δεν είναι απαραίτητα μετρήσιμη. Ένας πραγματικός αριθμός α ονομάζεται upper bound της f αν $f(x) \leq \alpha$ για όλα τα x στον X αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ είναι κενό. Σε αντίθεση, το α ονομάζεται essential upper bound αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ είναι μέτρου μηδέν, δηλαδή $f(x) \leq \alpha$ σχεδόν όλα τα x στον X. Οπότε όπως το supremum της f ορίζεται να είναι το μικρότερο upper bound, το essential supremum ορίζεται ως το μικρότερο essential upper bound δηλαδή $ess\sup f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\} = 0)\}$ αν το σύνολο $\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\} = 0)\}$ των essential upper bounds είναι μη κενό, και $ess\sup f = +\infty$ διαφορετικά.

το περίβλημα[6] *του* $C_c^\infty(U)$ *στο* $W^{k,p}(U)$

Οπότε $u \in W_0^{k,p}(U)$ αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty(U)$ τέτοιες ώστε $u_m \to u$ στο $W^{k,p}(U)$. Μεταφράζοντας τον $W_0^{k,p}(U)$, αποτελείται από τις συναρτήσεις $u \in W^{k,p}(U)$ τέτοιες ώστε

$$\text{“}D^\alpha u = 0 \text{ στο } \partial U\text{” για όλα τα } |\alpha| \leq k-1.$$

Συμβολισμός. Συνήθως γράφουμε

$$H_0^k(U) = W_0^{k,2}(U).$$

Αν $n = 1$ και U είναι ένα ανοιχτό διάστημα στον $\mathbb{R}^1$, τότε $u \in W^{1,p}(U)$ αν και μόνο αν η u ισούται με μια σχεδόν παντού απολύτως συνεχή συνάρτηση της οποίας η συνηθισμένη παράγωγος (η οποία υπάρχει σχεδόν παντού) υπάρχει στον $L^p(U)$. Ένας τόσο απλός χαρακτηρισμός είναι παρ' όλα αυτά διαθέσιμος μόνο για $n = 1$. Γενικά μία συνάρτηση μπορεί να ανήκει σε ένα χώρο Sobolev και ακόμη να είναι ασυνεχής και/ή φραγμένη.

1.2.3 Βασικές ιδιότητες.

Θεώρημα 1.10 (Ιδιότητες ασθενών παραγώγων) *Θεωρούμε* $u, v \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leqslant k$. *Τότε*

i. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ *και* $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ *για όλους τους πολυδείκτες* α, β *με* $|\alpha| + |\beta| \leqslant k$.

[6] Το περίβλημα ή κλειστή θήκη (closure), π.χ. του S, είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο που περιέχει το S.

ii. *Για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu \upsilon \in W^{k,p}(U)$ *και* $D^\alpha(\lambda u + \mu \upsilon) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha \upsilon, \ \ |\alpha| \leqslant k.$

iii. *Αν* V *είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του* U, *τότε* $\upsilon \in W^{k,p}(V)$.

iv. *Αν* $\zeta \in C_c^\infty(U)$, *τότε* $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ *και*

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u \ \textit{(τύπος του Leibniz)},$$

όπου

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Θεώρημα 1.11 (Χώροι Sobolev ως χώροι συναρτήσεων) *Για κάθε* $k = 1, \ldots$ *και* $1 \leq p \leq \infty$, *ο χώρος Sobolev* $W^{k,p}(U)$ *είναι ένας Banach χώρος.*

1.3 Προσέγγιση

1.3.1 Προσέγγιση στο εσωτερικό από ομαλές συναρτήσεις

Για να μελετήσουμε βαθύτερες ιδιότητες των χώρων Sobolev, θα αναπτύξουμε κάποιες συστηματικές μεθοδεύσεις για την προσέγγιση μιας συνάρτησης σε ένα χώρο Sobolev από ομαλές συναρτήσεις. Ένα τέτοιο εργαλείο είναι η μέθοδος των ομαλοποιητών (mollifiers).

Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο k και $1 \leq p < \infty$ και σύνολο U_ε με $U_\varepsilon = \{x \in U \,|dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

Θεώρημα 1.12 (Τοπική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις) *Θεωρούμε $u \in W^{k,p}(U)$ για $1 \leq p < \infty$ και θέτουμε*

$$u^{\varepsilon} = \eta_{\varepsilon} * u \text{ στο } U_{\varepsilon}.$$

Τότε

i. $u^{\varepsilon} \in C^{\infty}(U_{\varepsilon})$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$,

ii. $u^{\varepsilon} \to u$ *στο* $W^{k,p}_{loc}(U)$, *καθώς* $\varepsilon \to 0$.

1.3.2 Προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε ομαλές συναρτήσεις που προσεγγίζουν στο $W^{k,p}(U)$, και όχι μόνο στο $W^{k,p}_{loc}(U)$. Σημειώνουμε ότι στα παρακάτω δεν κάνουμε υποθέσεις για την ομαλότητα του ∂U.

Θεώρημα 1.13 (Ολική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις) *Θεωρούμε φραγμένο σύνολο U, και υποθέτουμε επίσης ότι $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^{\infty}(U) \cap W^{k,p}(U)$ τέτοιες ώστε*

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

Σημείωση. Προσοχή δεν απαιτούμε $u_m \in C^{\infty}(\bar{U})$ (βλέπε επόμενο θεώρημα).

1.3.3 Ολική προσέγγιση από ομαλές συναρτήσεις.

Τώρα ζητάμε το πότε είναι δυνατό να προσεγγίσουμε μια δοσμένη συνάρτηση $u \in W^{k,p}(U)$ από συναρτήσεις που ανήκουν στο $C^{\infty}(\bar{U})$ και όχι απλώς στο $C^\infty(U)$. Μια τέτοια προσέγγιση απαιτεί κάποια συνθήκη ώστε να αποκλείσουμε το ∂U να είναι γεωμετρικά άγριο.

Θεώρημα 1.14 (Ολική προσέγγιση από συναρτήσεις ομαλοποιημένες ως το σύνορο) *Θεωρούμε φραγμένο U και ότι ∂U είναι C^1. Υποθέτουμε ότι $u \in W^{k,p}(U)$ για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C^\infty(\bar{U})$ τέτοιες ώστε*

$$u_m \to u \text{ στο } W^{k,p}(U).$$

1.4 Επεκτάσεις

Επόμενος στόχος μας είναι να επεκτείνουμε συναρτήσεις του χώρου Sobolev $W^{1,p}(U)$ ώστε να γίνουν συναρτήσεις του χώρου Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Αυτό είναι πολύ λεπτό σημείο. Θεωρώντας για παράδειγμα ότι η επεκταμένη συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$ να είναι μηδέν στο $\mathbb{R}^n - U$ δε θα δουλεύει γενικά, καθώς είναι πιθανό να έχουμε κατασκευάσει πολύ άσχημη ασυνέχεια στο ∂U, ώστε η επεκταμένη συνάρτηση να μην έχει πια ασθενή πρώτη μερική παράγωγο. Πρέπει ωστόσο να εφεύρουμε ένα τρόπο να επεκτείνουμε την u η οποία "να διατηρεί την ασθενής παραγώγιση πάνω στο ∂U".

Υποθέτουμε $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Θεώρημα 1.15 (Θεώρημα επέκτασης) *Θεωρούμε ότι U είναι φραγμένο και το ∂U είναι C^1. Επιλέγουμε ένα φραγμένο ανοιχτό σύνολο V τέτοιο ώστε $U \subset\subset V$. Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής*

$$\mathrm{E} : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

τέτοια ώστε για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$*:*

i. $Eu = u$ *σχεδόν παντού στο* U,

ii. Eu *έχει support μέσα στο* V, *και*

iii.

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

η σταθερά C *εξαρτάται μόνο από το* p, *το* U, *και το* V.

Ορισμός 1.16 *Ονομάζουμε* Eu *μια επέκταση της* u *στο* $\mathbb{R}^n$.

1.5 Ίχνη

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε την πιθανότητα καθορισμού “συνοριακών τιμών” στο ∂U μιας συνάρτησης $u \in W^{1,p}(U)$, υποθέτοντας πως το ∂U είναι C^1. Τώρα αν $u \in C(\bar{U})$ τότε ξεκάθαρα η u έχει τιμές στο ∂U με τη συνηθισμένη έννοια. Το πρόβλημα είναι πως μια συνηθισμένη συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$, δεν είναι γενικά συνεχής και, πολύ χειρότερα, ορίζεται μόνο σχεδόν παντού στο U. Αφού ∂U έχει n-διάστατο Lebesgue μέτρο μηδέν, δεν έχει απευθείας νόημα η έκφραση “u περιορισμένη στο ∂U”. Η έννοια του *τελεστή ίχνους* (trace operator) λύνει αυτό το πρόβλημα.

Σ' αυτή την παράγραφο θεωρούμε $1 \leqslant p < \infty$.

Θεώρημα 1.17 (Θεώρημα Ίχνους) *Θεωρούμε* U *φραγμένο και το* ∂U *είναι* C^1. *Τότε υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής*

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$$

τέτοιος ώστε

i. $Tu = u|_{\partial U}$ *αν* $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$, *και*

ii. $\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$,

για κάθε $u \in W^{1,p}(U)$, *με τη σταθερά* C *να εξαρτάται μόνο από το* p *και το* U.

Ορισμός 1.18 *Ονομάζουμε* Tu *το ίχνος της* u *στο* ∂U.

Θεώρημα 1.19 (Μηδενικού ίχνους συναρτήσεις στον $W^{1,p}(U)$) *Θεωρούμε* U *φραγμένο και* ∂U *είναι* C^1. *Υποθέτουμε επιπλέον ότι* $u \in W^{1,p}(U)$. *Τότε*

$$u \in W_0^{1,p}(U) \text{ αν και μόνο αν } Tu = 0 \text{ στο } \partial U.$$

1.6 Ανισότητες Sobolev

Σκοπός μας σ'αυτή την παράγραφο είναι να ανακαλύψουμε εμφυτεύσεις διαφόρων χώρων Sobolev μέσα σε άλλους. Τα πολύ σημαντικά εργαλεία θα είναι εδώ αναμφίβολα οι λεγόμενες " ανισότητες Sobolev ", τις οποίες θα δούμε παρακάτω για ομαλές συναρτήσεις. Αυτές θα δημιουργήσουν τις εκτιμήσεις για αυθαίρετες συναρτήσεις σε διάφορους σχετικούς χώρους Sobolev αφού οι ομαλές συναρτήσεις είναι πυκνές.

Για να είναι πιο ξεκάθαρη η παρουσίαση θα θεωρήσουμε αρχικά μόνο τον χώρο Sobolev $W^{1,p}(U)$ και θα θέσουμε την ακόλουθη βασική ερώτηση: *αν μια συνάρτηση* u *ανήκει στον* $W^{1,p}(U)$, *ανήκει η* u *αυτόματα* *σε κάποιους άλλους χώρους;* Η απάντηση θα είναι "ναι", αλλά ποιοί άλλοι χώροι εξαρτάται από το εάν

$$0 \leqslant p < n,$$

$$p = n,$$

$$n < p \leqslant \infty.$$

Ορισμός 1.20 *Αν $1 \leqslant p < n$, το Sobolev συζυγές του p είναι*

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Σημειώνουμε ότι

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},\ p^* > p.$$

Θεώρημα 1.21 (Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Θεωρούμε $1 \leqslant p < n$. Υπάρχει μια σταθερά C, που εξαρτάται μόνο από το p και το n, τέτοια ώστε*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

για όλα τα $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 1.22 (Εκτιμήσεις για $W^{1,p}(U)$, $1 \leqslant p < n$) *Έστω U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και υποθέτουμε ότι το ∂U είναι C^1. Θεωρούμε $1 \leqslant p < n$, και $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε $u \in L^{p^*}(U)$ με την εκτίμηση*

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$

η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το p το n και το U.

Θεώρημα 1.23 (Εκτιμήσεις για $W_0^{1,p}(U)$, $1 \leqslant p < n$) *Θεωρούμε το U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $u \in W_0^{1,p}(U)$ για κάποιο $1 \leqslant p < n$. Τότε έχουμε την εκτίμηση*

$$\|u\|_{L^q(U)} \leqslant C \|Du\|_{L^p(U)}$$

για κάθε $q \in [1, p^*]$, η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το p το q το n και το U.

Ειδικότερα, για όλα τα $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$\|u\|_{L^p(U)} \leqslant C \|Du\|_{L^p(U)}.$$

Σημείωση

i. Αυτή η εκτίμηση μερικές φορές ονομάζεται *ανισότητα Poincare*. Η διαφορά με το θεώρημα 1.22 είναι μόνο η κλίση του u που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της ανισότητας. (Άλλες τύπου Poincare ανισότητες θα αναπτυχθούν στη συνέχεια).

ii. Εν όψη του Θεωρήματος 1.23, στον $W_0^{1,p}(U)$ η νόρμα $\|Du\|_{L^p(U)}$ είναι ισοδύναμη με την $\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, αν η U είναι φραγμένη.

iii. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση

$$p = n.$$

Εξαιτίας του Θεωρήματος 1.22 και του γεγονότος ότι $p^* = \frac{np}{n-p} \to +\infty$ καθώς $p \to n$ θα μπορούσαμε να περιμένουμε $u \in L^\infty(U)$, με την προϋπόθεση ότι $u \in W^{1,n}(U)$. Αυτό είναι λανθασμένο αν $n > 1$:

για παράδειγμα, αν $U = B^0(0,1)$ η συνάρτηση $u = \log\log(1+\frac{1}{|x|})$ ανήκει στο $W^{1,n}(U)$, αλλά όχι στο $L^\infty(U)$.

Θεώρημα 1.24 (Γενικές ανισότητες Sobolev) *Έστω U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο στο C^1. Θεωρούμε $u \in W^{k,p}(U)$.*

i. Αν

$$k < \frac{n}{p},$$

τότε $u \in L^q(U)$, όπου

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

Έχουμε επιπλέον την εκτίμηση

$$\|u\|_{L^q(U)} \leqslant C\,\|u\|_{W^{k,p}(U)}\,,$$

η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα k, p, n και U.

ii. Αν

$$k > \frac{n}{p}$$

τότε $u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\bar{U})$, όπου

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, \ \text{αν ο } \frac{n}{p} \text{ δεν είναι ακέραιος} \\ \text{οποιοσδήποτε θετικός αριθμός } < 1, \ \text{αν } \frac{n}{p} \text{ είναι ακέραιος.} \end{cases}$$

Έχουμε επιπλέον την εκτίμηση

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C\,\|u\|_{W^{k,p}(U)}\,,$$

η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα k, p, n, γ και U.

1.7 Συμπάγεια

Έχουμε δει ότι η ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev υποδηλώνει την εμφύτευση του χώρου $W^{1,p}(U)$ μέσα στο $L^{p^*}(U)$ για $1 \leqslant p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$. Θα ισχυριστούμε στη συνέχεια ότι ο χώρος $W^{1,p}(U)$ είναι πράγματι *συμπαγώς* εμφυτευμένος στον $L^q(U)$ για $1 \leqslant q < p^*$. Η συμπάγεια είναι θεμελειώδης για τις εφαρμογές της γραμμικής και μη γραμμικής συναρτησιακής ανάλυσης στη θεωρία των PDE όπως θα δούμε παρακάτω.

Ορισμός 1.25 *Έστω X και Y χώροι Banach, με $X \subset Y$. Λέμε ότι ο X είναι συμπαγώς εμφυτευμένος στον Y, γράφοντας*

$$X \subset\subset Y,$$

υπό την προϋπόθεση

i. $\|x\|_Y \leqslant C\,\|x\|_X$ $(x \in X)$ για κάποια σταθερά C, και

ii. κάθε φραγμένη ακολουθία στον X είναι προσυμπαγές (precompact)[7] στον Y.

[7]Ένα σχετικά συμπαγές (relatively compact) υποσύνολο Y ενός τοπολογικού χώρου X είναι ένα υποσύνολο του οποίου το περίβλημα είναι συμπαγές. Εφόσον κλειστά υποσύνολα συμπαγών χώρων είναι συμπαγή, κάθε υποσύνολο ενός συμπαγούς χώρου είναι σχετικά συμπαγές. Όταν για να εξετάσουμε τη συμπάγεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακολουθίες, το κριτήριο για τη σχετική συμπάγεια γίνεται στο αν κάθε ακολουθία στον Y έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στον X. Ένα τέτοιο υποσύνολο ονομάζεται σχετικά φραγμένο (relative bounded) ή προσυμπαγές (***precompact***), αν και ο τελευταίος όρος χρησιμοποιείται επίσης για ένα ολικά φραγμένο (totally bounded) υποσύνολο το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα πλήρη χώρο. Ένα υποσύνολο S ενός χώρου X είναι ένα ολικά φραγμένο σύνολο αν και μόνο αν, δεδομένου

Θεώρημα 1.26 (Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov) *Θεωρούμε U ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και το ∂U είναι C^1. Υποθέτουμε $1 \leqslant p < n$. Τότε*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U)$$

για κάθε $1 \leqslant q < p^*$.

1.8 Επιπλέον θέματα

1.8.1 Ανισότητες Poincare.

Τώρα θα παρουσιάσουμε το πως η παρέμβαση της συμπάγειας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθούν νέες ανισότητες.

Συμβολισμός. $(u)_U = \fint_U u dy =$ μέσος του u πάνω στο U.

Θεώρημα 1.27 (Ανισότητα Poincare) *Έστω U είναι ένα φραγμένο, συνδεδεμένο (connected), ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με ένα C^1 σύνορο ∂U. Θεωρούμε $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Τότε υπάρχει μια σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τα n, p και U, τέτοια ώστε*

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leqslant C \|Du\|_{L^p(U)}$$

για κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$.

ενός μεγέθους E, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n και μια οικογένεια $A_1, A_2, ..., A_n$ υποσυνόλων του X τέτοια ώστε το S να περιέχεται στην ένωση της οικογένειας. Με άλλα λόγια, η οικογένεια είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του S, και τέτοια ώστε κάθε υποσύνολο A_i της οικογενείας είναι μεγέθους E ή μικρότερο. Δηλαδή :$\forall E, \exists n \in N, \exists A_1, A_2, ..., A_n \subseteq X$ με $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ και $\forall i = 1, 2, ...n$ $\text{size}(A_i) \leq E$.

Η σπουδαιότητα της παραπάνω ανισότητας οφείλεται στο ότι μόνο η κλίση του u εμφανίζεται στο δεξί μέλος.

1.9 Άλλοι χώροι συναρτήσεων

1.9.1 Ο χώρος H^{-1}.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια στη μελέτη των γραμμικών ελλειπτικών, παραβολικών και υπερβολικών PDE εξισώσεων, είναι σημαντικό να έχουμε έναν explicit χαρακτηρισμό του δυϊκού[8] χώρου του H_0^1.

Ορισμός 1.28 *Συμβολίζουμε με $H^{-1}(U)$ τον δυϊκό χώρο του $H_0^1(U)$.*

Με άλλα λόγια η f ανήκει στον $H^{-1}(U)$ με την προϋπόθεση ότι η f είναι ένα φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό στον $H_0^1(U)$. Ας σημειώσουμε πολύ προσεχτικά ότι δεν προσδιορίζουμε τον χώρο H_0^1 μαζί με τον δυϊκό του. Αντίθετα όπως θα δούμε σε λίγο, έχουμε

$$H_0^1(U) \subset L^2(U) \subset H^{-1}(U).$$

Συμβολισμός. Θα γράφουμε $\langle\ ,\rangle$ για να συμβολίσουμε το δυϊκό ζεύγος μεταξύ $H^{-1}(U)$ και $H_0^1(U)$.

Ορισμός 1.29 *Αν $f \in H^{-1}(U)$, ορίζουμε τη νόρμα*

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} := \sup\{\langle f, u\rangle \ \ |u \in H_0^1(U),\ \ \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}.$$

[8] Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $u^* : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στο X. Γράφουμε X^* για να συμβολίσουμε όλα τα φραγμένα γραμμικά συναρτησιακά στον X. Ο X^* είναι ο δυϊκός χώρος του X.

Θεώρημα 1.30 (Χαρακτηρισμός του H^{-1}) *i. Θεωρούμε ότι $f \in H^{-1}(U)$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f^0, f^1, ..., f^n$ στον $L^2(U)$ τέτοιες ώστε*

$$\langle f, u\rangle = \int_U \left(f^0 v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i}\right) dx \ \left(v \in H_0^1(U)\right) \tag{1.5}$$

ii. Επιπλέον

$$\|u\|_{H^{-1}(U)} = \inf\left\{\left(\int_U \sum_{i=0}^{n} \left|f^i\right|^2 dx\right)^{1/2} \mid \text{η } f \text{ ικανοποιεί την (1.5) για } f^0, ..., f^n \in L^2(U)\right\}$$

Συμβολισμός. Γράφουμε "$f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^i$" όταν ισχύει η σχέση (1.5).

1.9.2 Χώροι που εμπεριέχουν χρόνο.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κάποια άλλα είδη χώρων Sobolev που περιλαμβάνουν συναρτήσεις απεικόνισης χρόνου πάνω σε χώρους Banach. Αυτό θα αποδειχτεί πολύ σημαντικό στις κατασκευές ασθενών λύσεων στις γραμμικές παραβολικές, υπερβολικές και μη γραμμικές παραβολικές PDE.

Ας συμβολίσουμε X έναν πραγματικό χώρο Banach, με νόρμα $\| \ \|$.

Ορισμός 1.31 *Ο χώρος*

$$L^p(0, T; X)$$

περιέχει όλες τις ισχυρά μετρήσιμες (strongly measurable)[9] *συναρτήσεις* $\mathbf{u} : [0,T] \to X$ *με*

i.

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0,T,X)} := \left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^p dt \right)^{1\backslash p} < \infty$$

με $1 \leqslant p < \infty$, *και*

ii.

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} := \underset{0 \leqslant t \leqslant T}{ess\sup} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

Ορισμός 1.32 *Ο χώρος*

$$C([0,T];X)$$

αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $\mathbf{u} : [0,T] \to X$ *με*

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];X)} := \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\| < \infty.$$

Ορισμός 1.33 *Έστω* $\mathbf{u} \in L^1(0,T;X)$. *Λέμε ότι η* $\mathbf{v} \in L^1(0,T;X)$ *είναι η ασθενής παράγωγος της* $\mathbf{u}$, *γράφοντας*

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v},$$

[9]Έστω X ένας πραγματικός (ή μιγαδικός) χώρος Banach χώρος και έστω $[a,b]$ ένα fixed διάστημα στο πραγματικό άξονα. Μια συνάρτηση $x : [a,b] \to X$ λέγεται ότι είναι *πεπερασμένων τιμών (finitely valued)* αν είναι σταθερή σε καθένα ενός πεπερασμένου αριθμού διακεκριμένα μετρήσιμα σύνολα $A_K \subset [a,b]$ και ίση με το μηδέν στο $[a,b] \backslash \bigcup_k A_k$. Η συνάρτηση x λέγεται ισχυρά μετρήσιμη στο $[a,b]$ αν υπάρχει μια ακολουθία $\{x_n\}$ πεπερασμένων τιμών συναρτήσεων που συγκλίνει ισχυρά στον X και σχεδόν παντού στο $[a,b]$ στο x.

υπό την προϋπόθεση

$$\int_0^T \varphi'(t)\mathbf{u}(t)dt = -\int_0^T \varphi(t)\mathbf{v}(t)dt$$

για όλες τις βαθμωτές συναρτήσεις δοκιμής $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$.

Ορισμός 1.34 *i. Ο χώρος Sobolev*

$$W^{1,p}(0,T;X)$$

περιέχει όλες τις συναρτήσεις $\mathbf{u} \in L^p(0,T;X)$ *τέτοιες ώστε η* $\mathbf{u}'$ *να υπάρχει με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον* $L^p(0,T;X)$. *Επιπλέον,*

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \left(\|\mathbf{u}(t)\|^p + \|\mathbf{u}'(t)\|^p\right) dt\right)^{1\backslash p} & (1 \leqslant p < \infty) \\ \underset{0\leqslant t\leqslant T}{ess\sup} \left(\|\mathbf{u}(t)\| + \|\mathbf{u}'(t)\|\right) & (p = \infty). \end{cases}$$

ii. Γράφουμε $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$.

Θεώρημα 1.35 (Λογισμός σε έναν αφηρημένο χώρο) *Έστω* $\mathbf{u} \in W^{1,p}(0,T;X)$ *για κάποιο* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Τότε*

i. $\mathbf{u} \in C([0,T];X)$ *(αφού πιθανώς ξαναοριστεί σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν), και*

ii. $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(s) + \int_s^t \mathbf{u}'(\tau)d\tau$, *για όλα τα* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

iii. Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\| \leqslant C\,\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(0,T;X)},$$

η σταθερά C *εξαρτάται μόνο από το* T.

Τα δύο επόμενα θεωρήματα έχουν σχέση με το τι γίνεται όταν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{u}'$ είναι σε διαφορετικούς χώρους.

Θεώρημα 1.36 (Περισσότερος λογισμός) *Υποθέτουμε πως* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, *με* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$.

i. Τότε

$$\mathbf{u} \in C([0,T];L^2(U))$$

(αφού πιθανώς ξαναοριστεί σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν).

ii. Η απεικόνιση

$$t \mapsto \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}$$

είναι απολύτως συνεχής, με

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)} = 2\left\langle \mathbf{u}'(t),\ \mathbf{u}(t)\right\rangle$$

για σχεδόν παντού (for a.e.) $0 \leqslant t \leqslant T$.

iii. Επιπλέον, έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)} \leqslant C\left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\right),$$

η σταθερά C *εξαρτάται μόνο από το* T.

Θεώρημα 1.37 (Απεικονίσεις σε καλύτερους χώρους) *Θεωρούμε ότι το* U *είναι ανοιχτό, φραγμένο και* ∂U *είναι ομαλό. Έστω* m *ένας μη αρνητικός ακέραιος.*

Υποθέτουμε ότι $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^{m+2}(U))$, *με* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^m(U))$.

i. Τότε

$$\mathbf{u} \in C([0,T]; H^{m+1}(U))$$

(αφού πιθανώς ξαναοριστεί σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν).

ii. Επιπλέον έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H^{m+1}(U)} \leqslant C \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{m+2}(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{m}(U))} \right),$$

η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα T, U, και m.

1.10 Κυρτές συναρτήσεις και μονότονοι τελεστές

Αυτή η υποενότητα είναι βασισμένη κυρίως στις αναφορές των Barbu [1976], Brezis [1973], Barbu and Precupanu [1986], Rockafellar [1970].

Έστω X ένας χώρος Banach και $\varphi : X \to (-\infty, +\infty)$ μια κυρτή συνάρτηση. Γράφουμε $dom(\varphi) = x \in X : \varphi(x) < +\infty$ και φ ονομάζεται κατάλληλη (proper)[10] αν $dom(\varphi) \neq \emptyset$ και $\varphi(x) > -\infty$ για κάθε $x \in X$.

Το περίβλημα ή κλειστή θήκη του φ, συμβολιζόμενο με $cl\varphi$, είναι η κάτω

[10] Μια κατάλληλη κυρτή συνάρτηση στον X είναι μια συνάρτηση $\varphi : X \to (-\infty, +\infty] = \bar{\mathbf{R}}$ που δεν είναι ταυτοτικά $+\infty$ και ικανοποιεί την ανισότητα $\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$ για όλα τα $x, y \in X$ και όλα τα $\lambda \in [0,1]$. Η συνάρτηση $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ λέγεται ότι είναι κάτω ημισυνεχής (lower semicontinous) στον X αν $\liminf_{u \to x} \varphi(u) \geq \varphi(x), \forall x \in X$ ή ισοδύναμα, κάθε σύνολο $\{x \in X; \varphi(x) \leq \lambda\}$ είναι κλειστό.

ημισυνεχής θήκη (lower semicontinous hull) του φ:

$$(cl\varphi)(x) = \begin{cases} \liminf_{y\to x} \varphi(y) & \text{αν } \varphi(x) > -\infty \text{ για όλα τα } x \in X, \\ -\infty & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η κυρτή συνάρτηση φ λέμε ότι είναι κλειστή (closed) αν $\varphi = cl\varphi$. Πιο συγκεκριμένα, για μία κατάλληλη, κυρτή συνάρτηση η κλειστότητα είναι ισοδύναμη με την κάτω ημισυνέχεια[11].

Το υποδιαφορικό (subdifferential) της συνάρτησης φ, συμβολιζόμενο με $\partial\varphi$ δίνεται από τη σχέση

$$\partial\varphi(x) = \{w \in X^* : \varphi(x) - \varphi(\upsilon) \leq (x - \upsilon, w)_{X\times X^*}, \forall \upsilon \in X\}$$

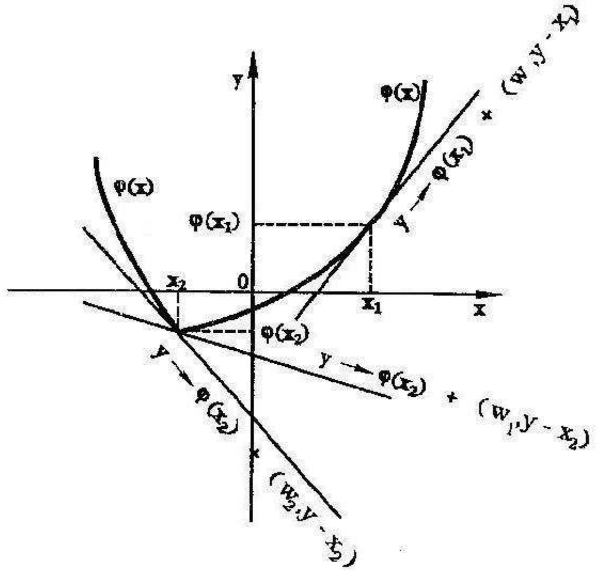
[11]Μία συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής (lower semicontinuous) στο x_0 αν $\forall\varepsilon > 0$ υπάρχει περιοχή U του x_0 τέτοια ώστε $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$ $\forall x \in U$, $\lim_{x\to x_0} \inf f(x) \geq f(x_0)$.

(Θεωρούμε X έναν τοπολογικό χώρο και f μια συνάρτηση από τον X στον επεκταμένο χώρο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}^*$, $f : X \to \mathbb{R}^*$ τότε:

1. Αν $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον X για όλα τα $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής (lower semicontinuous).

2. Αν $f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον X για όλα τα $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι άνω ημισυνεχής (upper semicontinuous).

Με άλλα λόγια, η f είναι κάτω ημισυνεχής, αν f είναι συνεχής ως προς την τοπολογία (with respect to the topology for) $\mathbb{R}^*$ περιέχοντας το $\emptyset$ και ανοιχτά σύνολα της μορφής $U(\alpha) = (\alpha, \infty]$, $\quad \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι αυτό είναι μια τοπολογία, για παράδειγμα, για μια ένωση συνόλων $U(\alpha_i)$ έχουμε $\cup_i U(\alpha_i) = U(\inf \alpha_i)$. Προφανώς, αυτή η τοπολογία είναι πιο " άγρια " από τη συνήθη τοπολογία των επεκταμένων αριθμών. Παρόλα αυτά, τα σύνολα $U(\alpha)$ μπορούμε να τα δούμε ως γειτονιές του απείρου, οπότε υπό κάποια έννοια, ημισυνεχείς συναρτήσεις (semicontinuous functions) είναι "συνεχείς στο άπειρο").



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική αναπαράσταση του υποδιαφορικού. $w = \partial\varphi(x)$, $w_1, w_2 \in \partial\varphi(x_2)$

στο $dom(\partial\varphi)$, για παράδειγμα για όλα τα $x \in X$ για τα οποία το σύνολο είναι μη κενό. Το $\partial\varphi(x)$ είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο στον X^*. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι για κάθε $w \in \partial\varphi(x)$ το γράφημα της σχετικής πραγματικής απεικόνισης (affine real mapping)

$$y \to \varphi(x) + (y - x, w)_{X \times X^*}, \forall y \in X$$

είναι ένα όχι κάθετο υπερεπίπεδο που διέρχεται από το σημείο $[x, \varphi(x)]$ και βρίσκεται κάτω από το γράφημα της φ οπουδήποτε αλλού (σχήμα 1.1). Το υποδιαφορικό είναι μία γενίκευση των κλασικών αρχών της παραγώγου και της εφαπτομένης.

Τώρα θεωρούμε δύο σύνολα, X, Y, και το καρτεσιανό τους γινόμενο $X \times Y$. Ένα υποσύνολο $A \subset X \times Y$ ονομάζεται πολλαπλών τιμών (multivalued) τελεστής ορισμένος στον X με τιμές στον Y. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&Ax = \{y \in Y : [x, y] \in A\}, \mathrm{x} \in \mathrm{X}, \\
&dom(A) = \{x \in X : Ax \neq \emptyset\} \subset X \\
&R(A) = \bigcup_{x \in X} Ax \subset Y, \\
&A^{-1} = \{[y, x] : [x, y] \in A\} \subset Y \times X.
\end{aligned}
$$

Έστω X ένας χώρος Hilbert, ένας (πολλαπλών τιμών) τελεστής $A : X \to X$ ονομάζεται *μονότονος* αν

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)_X \geq 0 \quad \forall [x_i, y_i] \in A, \quad i = 1, 2.$$

Αν η ανισότητα είναι αυστηρή για $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in dom(A)$, τότε ο A είναι *αυστηρά μονότονος (strictly monotone).* Αν επιπλέον ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2)_X \geq \alpha \left| x_1 - x_2 \right|_X^2, \quad \alpha > 0, \ \forall [x_i, y_i] \in A, \ i = 1, 2$$

τότε ο A ονομάζεται *ισχυρά μονότονος (strongly monotone).*

Ο τελεστής $A : X \to X$ είναι ω-*monotone* αν ο $A + \omega I$ είναι μονότονος, φυσικά $\omega > 0$. Ο μονότονος τελεστής $A : X \to X$ ονομάζεται μεγιστικά μονότονος αν το γράφημά του, ως ένα υποσύνολο του $X \times X$, είναι μεγιστικό (maximal), που σημαίνει ότι δε μπορεί να περιέχεται αυστηρά σε οποιοδήποτε άλλο μονότονο γράφημα από τον $X \times X$.

Όλοι αυτοί οι ορισμοί μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε τελεστές $T : Z \to Z^*$ (όπου Z ένας χώρος Banach), απλά αντικαθιστώντας το $(\cdot, \cdot)_X$ με την αντιστοίχιση $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X \times X^*}$.

Μία σημαντική κλάση μονότονων τελεστών δίνεται από τα υποδιαφορικό κυρτών συναρτήσεων:

Θεώρημα 1.38 *Σε χώρους Banach το υποδιαφορικό μιας κάτω ημισυνεχούς, κατάλληλης, κυρτής συνάρτησης είναι ένας μεγιστικός μονότονος (maximal monotone) τελεστής.*

Άλλα σημαντικά παραδείγματα μονότονων τελεστών είναι αυτά που ακολουθούν:

Ένας single valued τελεστής $A : X \to X$ με $dom(A) = X$ ονομάζεται hemicontinuous αν για όλα τα $x \in X$, $y \in X$ έχουμε $A((1-t)x + ty) \to Ax$, ασθενώς στον X, καθώς $t \to 0$.

Θεώρημα 1.39 *Ένας hemicontinuous μονότονος τελεστής είναι μεγιστικός μονότονος.*

Έστω Ω ένα φραγμένο μετρήσιμο σύνολο στο $\mathbb{R}^N$ και έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert X. Είναι δυνατόν να ορίσουμε τον $\tilde{A}$ στον $L^2(\Omega; X)$ από ένα $v \in \tilde{A}u$ αν και μόνο αν $v(x) \in Au(x)$ σχεδόν παντού στον Ω. Ο τελεστής $\tilde{A}$ είναι μεγιστικός μονότονος στον $L^2(\Omega; X)$.

Θεώρημα 1.40 *Ένας γραμμικός, συμμετρικός θετικά ορισμένος (positive definite) τελεστής $A : X \to X$ είναι μεγιστικός μονότονος αν και μόνο αν είναι αυτοσυζυγής (self-adjoint)*[12].

[12]Ένας πυκνά ορισμένος γραμμικός τελεστής $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ είναι ένας *ερμιτιανός* ή *συμμετρικός* τελεστής αν $(Ax, y) = (x, Ay)$ για όλα

Τις μονότονες απεικονίσεις μπορούμε να τις δούμε ως μια γενίκευση των υποδιαφορικών και τα τελευταία ως μια γενίκευση των κλασικών αρχών κλίσεων (gradient) σε χώρους Banach Z. Φυσικά η μονοτονία, όπως ορίστηκε παραπάνω, επίσης επεκτείνει την ίδια έννοια για τις πραγματικές απεικονίσεις.

Θυμίζουμε ότι για $f : Z \to (-\infty, \infty)$, το όριο

$$f'(x,h) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda},$$

όταν υπάρχει ονομάζεται *παράγωγος κατά κατεύθυνση (directional derivative)* του $h \in Z$ στο x. Η απεικόνιση $h \to f'(x,h)$ ονομάζεται *διαφορικό κατά κατεύθυνση (directional differential)* της f στο x αν είναι καλά ορισμένη για όλα τα $h \in Z$. Η συνάρτηση f ονομάζεται ασθενώς (weakly) ή Gâteaux διαφορίσιμη στο x αν το $h \to f'(x,h)$ είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό στον Z. Το αντίστοιχο στοιχείο από τον Z^* θα συμβολίζεται με

τα $x, y \in \mathfrak{D}(A)$. Αυτό σημαίνει ότι ο συζυγής A^* του A είναι ορισμένος τουλάχιστον στον $\mathfrak{D}(A)$ και ότι αυτός ο περιορισμός του συμπίπτει με τον A. Αυτό το γεγονός συχνά συμβολίζεται με $A \subset A^*$. Ο τελεστής A λέγεται **αυτοσυζυγής** αν συμπίπτει με τον συζυγή του, δηλαδή αν $A = A^*$. [Δοσμένου ενός τοπολογικού χώρου X, λέμε ότι η απεικόνιση $f : Y \to X$ είναι πυκνά ορισμένη αν το πεδίο ορισμού Y είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X. Αυτή η ορολογία συνήθως χρησιμοποιείται και στην θεωρία των γραμμικών τελεστών με την ακόλουθη έννοια: Σε ένα χώρο με νόρμα X, ένας γραμμικός τελεστής $A : \mathfrak{D} \subset X \to X$ λέγεται να είναι πυκνά ορισμένος αν $\mathfrak{D}(A)$ είναι ένας πυκνός διανυσματικός υπόχωρος του X (ένα υποσύνολο D ενός τοπολογικού χώρου X είναι πυκνό ή παντού πυκνό στον X αν το περίβλημα του D ισούται με τον X - ισοδύναμα αν ο D καλύπτει οποιοδήποτε μη κενό ανοιχτό σύνολο)]

$gradf(x)$:

$$f'(x,h) = (h, gradf(x))_{Z\times Z^*}, \forall h \in Z.$$

Επιπλέον, αν

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - (y, gradf(x))_{Z\times Z^*}}{|y|\, x} = 0$$

τότε η f είναι Fréchet διαφορίσιμη στο x. Προφανώς κάθε Fréchet διαφορίσιμη είναι *Gâteaux* διαφορίσιμη επίσης. Η επέκταση των παραπάνω ορισμών σε διανυσματικές συναρτήσεις είναι άμεση. Ο κανόνας της αλυσίδας βεβαιώνει πως αν η $g : Z_1 \to Z_2$ (χώροι Banach) είναι μία *Gâteaux* διαφορίσιμη απεικόνιση και $\varphi : Z_2 \to \mathbb{R}$ είναι Fréchet διαφορίσιμη, τότε η $f : Z_1 \to \mathbb{R}$ που δίνεται από την $f(z) = \varphi(g(z))$ είναι *Gâteaux* διαφορίσιμη και $gradf(z) = grad\varphi\,(\mathrm{g}(z))\,[grad\mathrm{g}(z)]$ (Tapia [1971]).

Ένας θεμελιώδης χαρακτηρισμός των μεγιστικών μονότονων τελεστών σε χώρους Hilbert περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.41 *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

i. Ο A είναι μεγιστικός μονότονος στον $X \times X$.

ii. Ο A είναι μονότονος και $R(I + A) = X$.

iii. Ο $(I + \lambda A)^{-1}$ είναι μια συστολική μη επεκταμένη (contraction - nonexpansive) απεικόνιση σε ολόκληρο το χώρο X, για όλα τα $\lambda > 0$.

Συνεχίζουμε παραθέτοντας διάφορες βασικές ιδιότητες των μη γραμμικών τελεστών και κυρτών συναρτήσεων που παίζουν θεμελιώδη ρόλο στα επόμενα.

Θεώρημα 1.42 *Έστω $A : X \to X$ ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής. Τότε*

i. Ο A^{-1} είναι μεγιστικός μονότονος.

ii. Για κάθε $x \in dom(A)$, το σύνολο Ax είναι κυρτό και κλειστό στον X.

iii. Ο A είναι ημικλειστό (demiclosed), που σημαίνει $x_n \to x$ ισχυρά (strongly) στον X, $y_n \to y$ ασθενώς (weakly) στον X, και $y_n \in Ax_n$ συνεπάγεται ότι $y \in Ax$.

Σημειώνουμε ότι, γενικά, ο A δεν είναι demicontinuous[13], π.χ. $x_n \to x$ ισχυρά δε σημαίνει ότι υπάρχει $y_n \in Ax_n$, $y \in Ax$ τέτοιο ώστε $y_n \to y$ ασθενώς στον X.

Θυμίζουμε ότι ο τελεστής $A : X \to X$ είναι πιεστικός (coercive) αν και μόνο αν

$$\lim_{|u|_X \to \infty} \frac{(Au, u)_X}{|u|_X} = +\infty.$$

[13]Έστω X ένας (πραγματικός ή μιγαδικός) χώρος Banach και X^* ο συζυγής του ως το σύνολο όλων των φραγμένων συζυγών (conjugate) γραμμικών συναρτησιακών στον X. Η τιμή του $f \in X^*$ στο $u \in X$ συμβολίζεται με (f, u). Έστω G μία συνάρτηση από τον X στον X^* με πεδίο ορισμού $D = D(G) \subset X$. Η G ονομάζεται **demicontinuous** αν $u_n \in D$, $n = 1, 2, ...$, $u \in D$ και $u_n \to u$ ισχυρώς συνεπάγεται ότι $Gu_n \to Gu$ ασθενώς. Η G είναι **hemicontinuous** αν $u \in D$, $v \in X$ και $u + t_n v \in D$, όπου t_n είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $t_n \to 0$ ισχυρώς συνεπάγεται $G(u+t_n v) \to Gu$ ασθενώς. Λέμε ότι η G είναι **τοπικά φραγμένη**, αν $u_n \in D$, $u \in D$ και $u_n \to u$ συνεπάγεται η Gu_n είναι φραγμένη. Προφανώς μία demicontinuous συνάρτηση είναι hemicontinuous και τοπικά φραγμένη. Η G είναι **μονότονη** αν $Re(Gu - Gv, u - v) \geq 0$ για $u, v \in D$.

Θεώρημα 1.43 *Ένας πιεστικός, μεγιστικός μονότονος τελεστής είναι επιμορφισμός*[14].

Θεώρημα 1.44 *Κάθε κατάλληλη, κλειστή*[15]*, κυρτή συνάρτηση φ είναι κάτω φραγμένη από μία affine*[16] *συνάρτηση και επιτυγχάνει την ελάχιστη τιμή της σε κλειστά, κυρτά φραγμένα υποσύνολα ενός ανακλαστικού*[17] *χώρου Banach X. Μία κατάλληλη, κυρτή συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής (weakly lower semicontinuous).*

Αν η φ είναι πιεστική με την έννοια ότι

$$\lim_{|u|_X \to \infty} \varphi(x) = +\infty$$

τότε η υπόθεση φράγματος στο θεώρημα 1.44 δεν είναι απαραίτητη.

Λέμε ότι ο τελεστής $A : X \to X$ είναι *τοπικά φραγμένος* (locally bounded) στο $x_0 \in X$ αν υπάρχει μια γειτονιά V του x_0 στον X τέτοια ώστε $A(V) = \bigcup_{x \in V} Ax$ να είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του X.

Θεώρημα 1.45 *Κάθε μονότονος τελεστής $A : X \to X$ είναι τοπικά φραγμένος στο εσωτερικό του $dom(A)$.*

---

[14]Ένας τελεστής $f : X \to Y$ είναι επιμορφισμός (surjective) αν και μόνο αν το range $f(X)$ είναι ίσο με το Y.

[15]απεικονίζει κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα.

[16]περιέχει έναν γραμμικό μετασχηματισμό της μορφής $x \mapsto Ax + b$.

[17]ένας χώρος Banach (ή πιο γενικά ένας τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος) ονομάζεται ανακλαστικός (**reflexive**) αν αυτός συμπίπτει με το δυϊκό του δυϊκού του χώρου αλγεβρικά και τοπολογικά.

Για τα υποδιαφορικά ισχύουν και οι επόμενες συμπληρωματικές ιδιότητες:

Θεώρημα 1.46 *Έστω $\varphi : X \to (-\infty, +\infty)$ μία κυρτή, κλειστή κατάλληλη συνάρτηση. Τότε*

$$dom(\partial\varphi) \subset dom(\varphi), \quad \overline{dom(\partial\varphi)} = \overline{dom(\varphi)}, \quad \mathrm{int}\ dom(\varphi) = \mathrm{int}\ dom(\partial\varphi)$$

Θεώρημα 1.47 *Μία κυρτή, κάτω ημισυνεχής, κατάλληλη συνάρτηση είναι τοπικά Lipschitzian στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της.*

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση του θεωρήματος 1.43:

Θεώρημα 1.48 *Έστω A ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής στον X. Τότε ο A είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν ο A^{-1} είναι τοπικά φραγμένος.*

Από το θεώρημα 1.41 μπορούμε να ορίσουμε τις απεικονίσεις:

$$J_\lambda : \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \quad J_\lambda x = (I + \lambda A)^{-1} x, \quad \lambda > 0,$$
$$A_\lambda : \mathrm{X} \to \mathrm{X}, \quad A_\lambda x = \lambda^{-1}(I - J_\lambda) x, \quad \lambda > 0.$$

Τα παραπάνω ονομάζονται *resolvent και Yosida προσέγγιση*, αντιστοίχως, ενός μεγιστικός μονότονου τελεστή A. Επίσης ορίζουμε την (Yosida regularization) κανονικοποίηση φ_λ του φ:

$$\varphi_\lambda(x) = \inf\left\{\frac{|x-y|^2}{2\lambda} + \varphi(y)\ ;\ y \in X\right\}, \quad \mathrm{x} \in \mathrm{X}.$$

Επίσης ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

Θεώρημα 1.49 *Έστω $A : X \to X$ ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής. Τότε* *i.* $\lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda x = \Pr oj_{\overline{dom(A)}} x,\ x \in X,$

ii. *Ο* A_λ *είναι μεγιστικός μονότονος και Lipschitzian σταθεράς* $1/\lambda$ *στον* X.

iii. *Για κάθε* $x \in dom(A)$, *έχουμε:*

$$|A_\lambda x|_X \leqslant \left|A^0 x\right|_X,\ A_\lambda x \to A^0 x,\ \lambda \to 0,$$

όπου $A^0 x = \Pr oj_{Ax} 0,$

iv. $A_\lambda x \in AJ_\lambda x,\ x \in X,$

όπου $\Pr oj_C x$ είναι η προβολή του $x \in X$ πάνω στο κυρτό, κλειστό σύνολο $C \subset X$, το οποίο είναι το στοιχείο $\bar{x} \in C$ τέτοιο ώστε $|x - \bar{x}|_X = \min\left\{|x - c|_X ; c \in C\right\}.$

Θεώρημα 1.50 *Η συνάρτηση* φ_λ, *είναι κυρτή, πεπερασμένη παντού, και Gâteaux διαφορίσιμη στον* X. *Αν* X *είναι ένας χώρος Hilbert, τότε η* φ_λ *είναι Fréchet διαφορίσιμη στον* X. *Επιπλέον, συμβολίζοντας με* $A = \partial\varphi$, *τότε* $A_\lambda = \partial\varphi\lambda$. *Έχουμε*

i. $\varphi(J_\lambda x) \leqslant \varphi_\lambda(x) \leqslant \varphi(x),\ x \in X,\ \lambda > 0,$
$\varphi_\lambda(x) = \varphi(J_\lambda x) + \frac{|x - J_\lambda x|_X^2}{2\lambda},\ x \in X,\ \lambda > 0,$

ii. $\lim\limits_{\lambda\to 0} \varphi_\lambda(x) = \varphi(x),\ \mathrm{x} \in \mathrm{X}.$

Εδώ $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} = (I + \lambda\partial\varphi)^{-1},\ \ A_\lambda = \lambda^{-1}(I - J_\lambda) = (\partial\varphi)_\lambda$. Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε μια σημαντική λεπτομέρεια του θεωρήματος 1.42, iii):

Θεώρημα 1.51 *Αν* $\lambda_n \to 0$, $x_n \to x$ *ασθενώς στον* X, $A_{\lambda_n} x_n \to y$ *ασθενώς στον* X *και επιπλέον*

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup(x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m)_X \leq 0,$$

τότε $[x, y] \in A$ *και*

$$\lim_{n,m\to\infty} (x_n - x_m, A_{\lambda_n} x_n - A_{\lambda_m} x_m)_X = 0.$$

Γενικά, είναι πιθανόν το άθροισμα δύο μεγιστικών μονότονων τελεστών, $A + B$, να μην είναι μεγιστικός μονότονος τελεστής αφού, για παράδειγμα, το πεδίο ορισμού μπορεί να είναι το κενό.

Θεώρημα 1.52 *Ώστε* A *και* B *μεγιστικοί μονότονοι τελεστές στον* $X \times X$ *τέτοια ώστε* $\mathrm{int}dom(A) \cap dom(B) \neq \emptyset$. *Τότε* $A + B$ *είναι μεγιστικός μονότονος στον* $X \times X$.

Το αποτέλεσμα διαταραχής που δίνεται από το θεώρημα 1.52 γίνεται πιο ιδιαίτερο στην περίπτωση των υποδιαφορικών απεικονίσεων:

Θεώρημα 1.53 *Έστω* $A : X \to X$ *ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής και* $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ *μία κυρτή, κάτω ημισυνεχής, κατάλληλη συνάρτηση. Θεωρούμε μία από τις ακόλουθες συνθήκες:*

i. $dom(A) \cap \mathrm{int}dom(\varphi) \neq \emptyset$,

ii. $dom(\varphi) \cap \mathrm{int}dom(A) \neq \emptyset$.

Τότε ο $A + \partial\varphi$ *είναι ένας μεγιστικός μονότονος τελεστής.*

Συνεχίζουμε με ένα αποτέλεσμα στο υποδιαφορικό μιας κυρτής συνάρτησης ως σύνθεση με ένα γραμμικό τελεστή (κανόνας αλυσίδας), σύμφωνα με το Tiba [1977].

Έστω X ένας ανακλαστικός χώρος Banach και $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ μία κλειστή, κατάλληλη, κυρτή συνάρτηση. Έστω $A : X \to X$ ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής, με συζυγή τον A^*. Θεωρούμε τη σύνθετη συνάρτηση $\psi : X \to (-\infty, +\infty]$:

$$\psi(x) = \varphi(Ax), \quad x \in X.$$

Αν $R(A) \cap dom(\varphi) \neq \emptyset$, τότε η ψ είναι κυρτή, κατάλληλη, κάτω ημισυνεχής.

Θεώρημα 1.54 *Θεωρούμε ότι ο X μπορεί να αναλυθεί στο ευθύ άθροισμα $X = X_1 \oplus X_2$, τέτοιος ώστε:*

i. $R(A) \cap \mathrm{int}_1 [dom(\varphi) \cap \mathrm{X}_1] \neq \emptyset$,

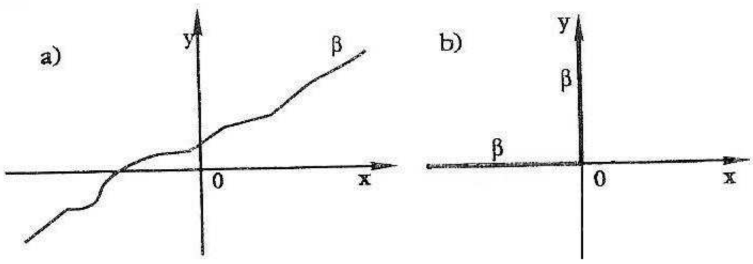
ii. $A^*|_{X_1^*} : X_1^* \to X^*$ *έχει φραγμένο αντίστροφο.*

Τότε ισχύει η σχέση $\partial\psi(x) = A^*\partial\varphi(Ax), \quad x \in X.$

Εδώ με int_1 συμβολίζουμε το εσωτερικό της σχετικής τοπολογίας του X_1.

Βλέπε Zalinescu [1980] για επέκταση σε πιο γενικούς χώρους. Άλλη γενίκευση και ενοποίηση των θεωρημάτων 1.53, 1.54 μπορεί επίσης να βρεθεί στο Aubin [1982, Ch. 8].

Ας θεωρήσουμε εν συντομία μερικά παραδείγματα των υποδιαφορικών ή μονότονων τελεστών τα οποία είναι πολύ σημαντικά στη συνέχεια.



Σχήμα 1.2: Παραδείγματα μεγιστικών μονότονων γραφημάτων στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. a) single-valued b) multi-valued (πολλαπλών τιμών).

Παράδειγμα 1.1 Ο (πολλαπλών τιμών) τελεστής $F : X \to X^*$, ορισμένος από τη σχέση

$$Fx = \left\{ x^* \in X^* : (x, x^*)_{X \times X^*} = |x|_X^2 = |x^*|_{X^*}^2 \right\}$$

ονομάζεται *δυϊκή απεικόνιση* (duality mapping) του X. Αυτός συμπίπτει με το υποδιαφορικό της κυρτής συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} |x|_X^2$ όπως μπορεί να επαληθευτεί από τον ορισμό.

Παράδειγμα 1.2 Για κάθε μεγιστικό μονότονο γράφημα $\beta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ υπάρχει μία κυρτή, κάτω ημισυνεχής, κατάλληλη συνάρτηση $j : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ τέτοια ώστε $\beta = \partial j$. Αν β^0 είναι το ελάχιστο τμήμα του β ($\left|\beta^0(x)\right| = \min |\beta(x)|$) και (a, b) είναι ένα διάστημα τέτοιο ώστε $(a, b) \subset dom\beta \subset domj \subset [a, b]$ (τα a, b μπορεί να είναι και άπειρο), τότε το β^0 είναι μια μη φθίνουσα (nondecreasing) συνάρτηση πάνω στο (a, b) και $\beta(x) = [\beta^0(x-), \beta^0(x+)]$ για όλα τα $x \in (a, b)$. Επιπλέον, αν $a \in dom\beta$ (αντιστοίχως $b \in dom\beta$), τότε $\beta(a) = (-\infty, \beta^0(a+)]$ (αντιστοίχως $\beta(b) = [\beta^0(b-), +\infty]$).

Παράδειγμα 1.3 Έστω $C \subset X$ ένα μη κενό, κλειστό κυρτό υποσύνολο και $I_C : X \to (-\infty, +\infty]$ η *δείκτρια* συνάρτηση του C:

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & x \in C, \\ +\infty & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αυτή είναι μία κυρτή, κάτω ημισυνεχής, κατάλληλη απεικόνιση στον X, και $x^* \in \partial I_C(x) \subset X^*$ αν και μόνο αν

$$x \in C \ \text{ και } \ (x-u, x^*)_{X \times X^*} \geq 0 \quad \forall u \in C.$$

Για κάθε $x \in C$ αυτό είναι ένας κλειστός κυρτός κώνος στον X^*, με κορυφή στο 0, ονομαζόμενος και *κανονικός* κώνος του x στον C. Αν $x \notin C$, το $\partial I_C(x)$ είναι κενό. Αν C είναι ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X, τότε $\partial I_C(x) = C^{\perp}$ (ο υπόχωρος του X^* ορθογώνιος στον C), για κάθε $x \in C$.

Παράδειγμα 1.4 Έστω $g : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty]$ μία κυρτή, κάτω ημισυνεχής, κατάλληλη συνάρτηση και έστω $\varphi : L^2(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$ με

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_\Omega g\left(u\left(x\right)\right) dx, & \text{αν } g(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η απεικόνιση φ είναι κυρτή, κάτω ημισυνεχής, κατάλληλη στον $L^2(\Omega)$ και $w \in \partial\varphi(u)$ αν και μόνο αν $w(x) \in \partial g(u\left(x\right))$ σχεδόν παντού στον Ω, $w \in L^2(\Omega)$.

Παράδειγμα 1.5 Θεωρούμε την κυρτή, κλειστή, κατάλληλη συνάρτηση

φ ορισμένη στον $L^2(\Omega)$ με

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathrm{grad}u|^2 dx + \int_\Omega g\,(u\,(x))dx, & \text{αν } u \in H_0^1(\Omega),\ g(u) \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε

$$dom(\partial\varphi) = \big\{ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : u(x) \in dom(\partial g) \\ \text{σχεδόν παντού στον } \Omega \big\},$$

$$\partial\varphi(u) = \big\{ w \in L^2(\Omega) : w(x) \in -\Delta u(x) + \partial g(u(x)) \\ \text{σχεδόν παντού στον } \Omega \big\},$$

σύμφωνα με τον Barbu [1976, p.89].

Για χάρη πληρότητας παρουσιάζουμε μερικούς μονότονους τελεστές, οι οποίοι δεν είναι απαραίτητα υποδιαφορικά:

Παράδειγμα 1.6 Έστω V, H δύο χώροι Hilbert με $V \subset H \subset V^*$ συνεχώς και πυκνά και $A : V \to V^*$ ένας γραμμικός, συνεχής, συμμετρικός, θετικός πεπερασμένος τελεστής. Έστω $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ κυρτή, κάτω ημισυνεχής και κατάλληλη συνάρτηση.

Θεωρούμε τον τελεστή $M : V \times H \to V \times H$ ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ A & \partial\varphi \end{bmatrix}$$

$$dom(M) = \{(v,h) \in V \times H; \{Av \cap \partial\varphi(h)\} \cap H \neq \emptyset \text{ και } h \in dom(\partial\varphi)\}$$

ο οποίος εμφανίζεται στην μελέτη των δεύτερης τάξης (υπερβολικών) αφηρημένων μη γραμμικών εξελικτικών εξισώσεων. Τότε ο M είναι μεγιστικός μονότονος στον $V \times H$ εφοδιασμένος με το βαθμωτό γινόμενο

$$\langle (\upsilon_1, h_1), (\upsilon_2, h_2) \rangle = (A\upsilon_1, \upsilon_2)_{V \times V^*} + (h_1, h_2)_H$$

(Brézis [1972, p.141]), αλλά δεν είναι υποδιαφορικό.

Παράδειγμα 1.7 Ο τελεστής Leray-Lions του λογισμού των μεταβλητών (ο γενικευμένος τελεστής απόκλισης).

Έστω $A_\alpha(x, \eta)$ μία οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων ορισμένη στον $\Omega \times \mathbb{R}^{N_1}$, όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ είναι ένα φραγμένο ομαλό χωρίο, α είναι ένας πολυδείκτης με μήκος $|\alpha| \leq m$, και με N_1 συμβολίζεται ο αριθμός παραγώγων τάξης από 0 μέχρι m.

Με το συνηθισμένο συμβολισμό κατανομών ορίζουμε τον τελεστή

$$A(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(A_\alpha \left(x, u, Du, ..., D^m u \right) \right).$$

Θεωρώντας ότι η A_α είναι Καραθεοδωρή (συνεχής στο η και μετρήσιμη στο x) και

$$|A_\alpha(x, \eta)| \leq c \left(|\eta|^{p-1} + k(x) \right)$$

όπου c είναι μία θετική σταθερά, $p > 1$, $k \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε ο τελεστής $A(u) : W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{-m,q}(\Omega)$ είναι καλά ορισμένος (Lions [1969, p.182]).

Αν, επιπλέον

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \left(A_\alpha \left(x, \eta \right) - A_\alpha \left(x, \tilde{\eta} \right) \right) \left(\eta_\alpha - \tilde{\eta}_\alpha \right) \geq 0$$

σχεδόν παντού στον Ω, τότε ο A είναι μονότονος και hemicontinuous, σχεδόν παντού μεγιστικός μονότονος.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να ορίσουμε την *πραγματοποίηση (realization)* του A στον $L^2(\Omega)$, συμβολιζόμενο με $A_{L^2(\Omega)}$ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
&A_{L^2(\Omega)}(u) = A(u), \quad u \in dom\left(A_{L^2(\Omega)}\right), \text{ όπου} \\
&dom\left(A_{L^2(\Omega)}\right) = \left\{w \in W_0^{m,p}(\Omega); A(w) \in L^2(\Omega)\right\}.
\end{aligned}$$

Αν ο A είναι πιεστικός:

$$(A(u), u)_{W_0^{m,p}(\Omega)\times W^{-m,q}(\Omega)} \geq \alpha \left|u\right|^p_{W_0^{m,p}(\Omega)} + c, \qquad \alpha > 0$$

τότε ο $A_{L^2(\Omega)}$ είναι μεγιστικός μονότονος μέσα στο $A_{L^2(\Omega)} \times A_{L^2(\Omega)}$.

Κεφάλαιο 2

Δεύτερης τάξης ελλειπτικές εξισώσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε περιληπτικά την επιλυσιμότητα των ομοιόμορφων ελλειπτικών, δεύτερης τάξης μερικών διαφορικών εξισώσεων υπό καθορισμένες συνοριακές συνθήκες.

2.1 Ορισμοί

2.1.1 Ελλειπτικές εξισώσεις.

Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} Lu = f \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U, \end{cases} \tag{2.1}$$

όπου U είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$ είναι ο άγνωστος, $u = u(x)$. Θεωρούμε γνωστή την $f : U \to \mathbb{R}$, και L

συμβολίζει έναν δεύτερης τάξης μερικό διαφορικό τελεστή ο οποίος είναι

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{2.2}$$

ή

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{2.3}$$

για δοσμένες συναρτήσεις συντελεστές a^{ij}, b^i, c με $i, j = 1, ..., n$.

Λέμε ότι η PDE $Lu = f$ είναι σε $divergence form$ αν ο L δίνεται από τη σχέση (2.2), και σε $nondivergence form$ αν ο L δίνεται από τη (2.3). Η απαίτηση ότι $u = 0$ στο ∂U λέγεται συνοριακή συνθήκη Dirichlet.

Ορισμός 2.1 *Λέμε ότι ο μερικός διαφορικός τελεστής L είναι (ομοιόμορφα) ελλειπτικός αν υπάρχει μια σταθερά $\theta > 0$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \theta \left|\xi\right|^2 \tag{2.4}$$

για σχεδόν παντού (a.e.) $x \in U$ και για όλα τα $\xi \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Ασθενείς λύσεις.

Ας θεωρήσουμε αρχικά το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.1) όταν ο L έχει την $divergence form$ (2.2). Το γενικό μας σχέδιο είναι να ορίσουμε πρώτα και μετά να κατασκευάσουμε μια κατάλληλη ασθενής λύση u της (2.1), και αργότερα να εξετάσουμε την ομαλότητα και τις άλλες ιδιότητες της u.

Θα θεωρήσουμε στα παρακάτω ότι

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U) \ (i, j = 1, ...n)$$

και

$$f \in L^2(U).$$

Ορισμός 2.2 *i. Η διγραμμική μορφή $B[\ ,]$, η σχετική με τον divergence form ελλειπτικό τελεστή L που ορίζεται από τη σχέση (2.2) είναι*

$$B[u,v] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuvdx$$

για $u, v \in H_0^1(U)$.

ii. Λέμε ότι η $u \in H_0^1(U)$. είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1) αν

$$B[u,v] = (f,v)$$

για όλα τα $v \in H_0^1(U)$, όπου $(\ ,)$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(U)$.

Πιο γενικά, ας θεωρήσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial \mathrm{U}, \end{cases} \tag{2.5}$$

όπου ο L ορίζεται από την (2.2) και $f^i \in L^2(U)$ $(i = 0, ..., n)$. Λαμβάνοντας υπόψην τη θεωρία του προηγούμενου κεφαλαίου (παρ.1.9.1) βλέπουμε ότι ο όρος $f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i}$ στο δεξί μέλος ανήκει στον $H^{-1}(U)$, τον δυϊκό χώρο του $H_0^1(U)$.

Ορισμός 2.3 *Λέμε ότι η $u \in H_0^1(U)$ είναι μια ασθενής λύση του προβλήματος (2.5) υπό τον όρο ότι*

$$B[u, v] = \langle f, v \rangle$$

για όλα τα $v \in H_0^1(U)$ όπου $\langle f, v \rangle = \int_U f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i}$ και $\langle \ , \rangle$ είναι η αντιστοίχιση (pairing) μεταξύ του $H^{-1}(U)$ και του $H_0^1(U)$.

2.2 Ύπαρξη ασθενών λύσεων

2.2.1 Θεώρημα Lax-Milgram.

Εισάγουμε τώρα κάποιες αρκετά απλές αφηρημένες αρχές από τη γραμμική συναρτησιακή ανάλυση, οι οποίες θα παρέχουν κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες την ύπαρξη και την μοναδικότητα μιας ασθενούς λύσης στο πρόβλημα συνοριακών τιμών.

Θεωρούμε ότι H είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert με νόρμα $\| \ \|$ και εσωτερικό γινόμενο $(\ ,)$. Συμβολίζουμε με $\langle \ , \rangle$ την αντιστοίχιση (*pairing*) του H με το δυϊκό του χώρο.

Θεώρημα 2.4 (Θεώρημα Lax-Milgram) *Θεωρούμε ότι*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

είναι μια διγραμμική απεικόνιση, για την οποία υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ τέτοιες ώστε

$$|B[u, v]| \leqslant a \|u\| \|v\| \quad (u, v \in H)$$

και

$$\beta \|u\|^2 \leqslant B[u,u] \ (u \in H).$$

Τελικώς, έστω $f : H \to \mathbb{R}$ *είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον* H.

Τότε υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $u \in H$ *τέτοιο ώστε*

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle$$

για όλα τα $v \in H$.

2.2.2 Ενεργειακές εκτιμήσεις

Για την συγκεκριμένη διγραμμική μορφή (ορισμένη στην παρ.2.1.2) $B[\ ,\ ]$

$$B[u,v] = \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} v + cuv dx$$

που ορίσαμε παραπάνω για $u, v \in H_0^1(U)$, και προσπαθώντας να επαληθεύσουμε το θεώρημα Lax-Milgram έχουμε:

Θεώρημα 2.5 (Ενεργειακές εκτιμήσεις - energy estimates) *Υπάρχουν σταθερές* $\alpha, \beta > 0$ *και* $\gamma \geqslant 0$ *τέτοιες ώστε*

$$|B[u,v]| \leqslant a \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$$

και

$$\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leqslant B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$$

για όλα τα $u, v \in H_0^1(U)$.

Θεώρημα 2.6 (Πρώτο θεώρημα ύπαρξης ασθενών λύσεων)
Υπάρχει ένας αριθμός $\gamma \geqslant 0$ *τέτοιος ώστε για κάθε*

$$\mu \geqslant \gamma$$

και για κάθε συνάρτηση

$$f \in L^2(U),$$

υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση $u \in H_0^1(U)$ *για το πρόβλημα συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f \ \text{στο}\ U \\ u = 0 \ \text{στο}\ \partial U. \end{cases}$$

Κεφάλαιο 3

Γραμμικές εξελικτικές εξισώσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε διάφορες γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις που εμπεριέχουν χρόνο. Συχνά ονομάζουμε αυτές τις εξισώσεις εξελικτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDE linear evolution equations), και η γενική ιδέα είναι ότι η λύση εξελίσσεται με το πέρασμα του χρόνου από μια αρχική κατάσταση. Θα μελετήσουμε μεθόδους ενέργειας (energy methods) για γενικές δεύτερης τάξης παραβολικές εξισώσεις.

3.1 Δεύτερης τάξης παραβολικές εξισώσεις

Οι δεύτερης τάξης παραβολικές PDE είναι φυσικές γενικεύσεις της εξίσωσης της θερμότητας. Θα μελετήσουμε στη συνέχεια την ύπαρξη και μοναδικότητα κατάλληλα ορισμένων ασθενών λύσεων, την ομαλότητά τους και άλλες ιδιότητες.

3.1.1 Ορισμοί.

α. Παραβολικές εξισώσεις.

Θεωρούμε το U να είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και, όπως θέσαμε προηγουμένως $U_T = U \times (0,T]$ σε κάποια χρονική στιγμή (fixed time) $T > 0$.

Θα μελετήσουμε αρχικά το αρχικών τιμών/συνοριακό πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t + Lu = f \text{ στο } U_T \\ u = 0 \text{ στο } \partial U \times [0,T] \\ u = g \text{ στο } U \times \{t=0\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

όπου $f : U_T \to \mathbb{R}$ και $g : U \to \mathbb{R}$ είναι δοσμένα, και $u : \bar{U}_T \to \mathbb{R}$ είναι ο άγνωστος, $u = u(x,t)$. Το γράμμα L συμβολίζει για κάθε χρονική στιγμή t έναν δεύτερης τάξης μερικό διαφορικό τελεστή, ο οποίος έχει είτε την divergence form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u \tag{3.2}$$

είτε την nondivergence form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u, \tag{3.3}$$

για δοσμένους συντελεστές a^{ij}, b^i, c με $i,j = 1,...,n$.

Ορισμός 3.1 *Λέμε ότι ο μερικός διαφορικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L$ είναι (ομοιόμορφα) παραβολικός αν υπάρχει μια σταθερά $\theta > 0$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \theta\,|\xi|^2 \tag{3.4}$$

για όλα τα $(x,t) \in U_T$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Σημείωση. Ας παρατηρήσουμε γενικότερα ότι για κάθε χρονική στιγμή (fixed time) $0 \leqslant t \leqslant T$ ο τελεστής L είναι ένας ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής για την χωρική μεταβλητή x.

Ένα προφανές παράδειγμα είναι όταν $a^{ij} \equiv \delta_{ij}$, $b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$, οπότε σ' αυτή τη περίπτωση $L = -\Delta$ και η PDE $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu$ γίνεται η εξίσωση θερμότητας. Θα δούμε στη πράξη ότι οι λύσεις της γενικής δεύτερης τάξης παραβολικής PDE είναι σε πολλές περιπτώσεις παρόμοιες με λύσεις της εξίσωσης θερμότητας.

Οι γενικές δεύτερης τάξης παραβολικές εξισώσεις περιγράφουν σε φυσικές εφαρμογές την μεταβολή με το πέρασμα του χρόνου της πυκνότητας κάποιας ποσότητας u, π.χ. της χημικής συγκέντρωσης, μέσα σε ένα χωρίο U. Ο δεύτερης τάξης όρος $\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j}$ περιγράφει την διάχυση, ο πρώτης τάξης όρος $\sum_{i=1}^n b^i u_{x_i}$ περιγράφει τη μεταφορά, και ο μηδενικής - τάξης όρος cu περιγράφει δημιουργία ή μείωση.

Οι εξισώσεις Fokker - Planck και Kolmogorov από την πιθανολογική μελέτη των διαδικασιών διάχυσης είναι επίσης δεύτερης τάξης παραβολικές εξισώσεις.

β. Ασθενείς λύσεις.

Μιμούμενοι τα αναπτύγματα του προηγούμενου κεφαλαίου για τις ελλειπτικές εξισώσεις, θεωρούμε αρχικά την περίπτωση που ο L έχει την divergence form (3.2) και προσπαθούμε να βρούμε μια κατάλληλη έννοια ασθενούς λύσης για το αρχικών/συνοριακών τιμών πρόβλημα (3.1). Θεωρούμε για τώρα ότι

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U_T) \ (i,j = 1, ...n),$$

$$f \in L^2(U_T),$$

$$g \in L^2(U).$$

Πάντα επίσης θα υποθέτουμε ότι $a^{ij} = a^{ji}$ $(i,j = 1, ...n)$.

Τώρα θα ορίσουμε, ανάλογα με το προηγούμενο κεφάλαιο, την εξαρτημένη από το χρόνο διγραμμική μορφή

$$B[u, v; t] := \int_U \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\cdot, t) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(\cdot, t) u_{x_i} v + c(\cdot, t) uv dx$$

για $u, v \in H_0^1(U)$ και σχεδόν παντού $0 \leqslant t \leqslant T$.

Κίνητρο για ορισμό μιας ασθενούς λύσης.

Για να κάνουμε εύλογο τον ακόλουθο ορισμό ασθενούς λύσης, αρχικά ας υποθέσουμε προσωρινά ότι η $u = u(x, t)$ είναι μια ομαλή λύση του παραβολικού προβλήματος (3.1). Βλέπουμε τώρα το προβλημά μας από άλλη σκοπιά, σχετίζοντας την u με μια απεικόνιση

$$\mathbf{u} : [0, T] \to H_0^1(U)$$

ορισμένη από την

$$[\mathbf{u}(t)](x) := u(x, t) \ (x \in U, \ 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Με άλλα λόγια, πρόκειται να θεωρήσουμε την u όχι ως μια συνάρτηση του x και του t μαζί, αλλά ως μια απεικόνιση $\mathbf{u}$ του t μέσα στον χώρο $H_0^1(U)$ των συναρτήσεων του x. Αυτή η όψη των πραγμάτων θα κάνει πιο ξεκαθαρή την παρακάτω παρουσίαση.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα (3.1), ορίζουμε ομοίως την

$$\mathbf{f} : [0,T] \to L^2(U)$$

από την

$$[\mathbf{f}(t)](x) := f(x,t) \ (x \in U,\ 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Τώρα αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση $v \in H_0^1(U)$, μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την PDE $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$ με v και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη, βρίσκουμε

$$(\mathbf{u}', v) + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v) \quad ('= \frac{d}{dt}) \tag{3.5}$$

για κάθε $0 \leqslant t \leqslant T$, η αντιστοίχιση (pairing) (,) συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(U)$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι

$$u_t = g^0 + \sum_{j=1}^{n} g^j_{x_j} \text{ στο } U_T$$

για $g^0 := f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu$ και $g^j := \sum_{i=1}^n a^{ij} u_{x_i}$ $(j = 1, ..., n)$. Συνεπώς η τελευταία σχέση και οι ορισμοί από το πρώτο κεφάλαιο υποδηλώνουν ότι το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης βρίσκεται σε ένα χώρο Sobolev $H^{-1}(U)$, με

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)} \leqslant \left(\sum_{j=0}^{n} \left\|g^j\right\|^2_{L^2(U)} \right)^{1/2} \leqslant C \left(\|u\|_{H_0^1(U)} + \|f\|_{L^2(U)} \right).$$

Αυτή η εκτίμηση υπονοεί πως είναι λογικό να ψάχνουμε μια ασθενής λύση με $\mathbf{u}' \in H^{-1}(U)$ με τον χρόνο σχεδόν παντού $0 \leqslant t \leqslant T$, σ' αυτή τη περίπτωση ο πρώτος όρος της σχέσης (3.5) μπορεί να ξαναεκφραστεί ως $\langle \mathbf{u}', v \rangle$, όπου $\langle\ ,\ \rangle$ είναι η αντιστοίχιση του $H^{-1}(U)$ με τον $H_0^1(U)$.

Όλες αυτές οι θεωρήσεις μας οδηγούν στον εξής ορισμό

Ορισμός 3.2 *Λέμε ότι μια συνάρτηση*

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U)) \text{ με } \mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U)),$$

είναι μια ασθενής λύση του παραβολικού αρχικών/συνοριακών τιμών προβλήματος (3.1) με τη προϋπόθεση

i. $\langle \mathbf{u}', v \rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v)$ *για κάθε* $v \in H_0^1(U)$ *και για το χρόνο σχεδόν παντού* $0 \leqslant t \leqslant T$, *και*

ii. $\mathbf{u}(0) = g$.

Σημείωση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το Θεώρημα (1.36), βλέπουμε πως $\mathbf{u} \in C([0,T];L^2(U))$ οπότε και η ισότητα (ii) αποκτά νόημα.

3.1.2 Ύπαρξη ασθενών λύσεων.

α. Προσεγγίσεις Galerkin.

Έχουμε την πρόθεση να κατασκευάσουμε μια ασθενή λύση για το παραβολικό πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t + Lu = f \text{ στο } U_T \\ u = 0 \text{ στο } \partial U \times [0,T] \\ u = g \text{ στο } U \times \{t=0\} \end{cases} \tag{3.6}$$

αρχικά κατασκευάζοντας λύσεις για συγκεκριμένες, πεπερασμένης διάστασης, προσεγγίσεις της (3.6) και έπειτα βάζοντας όρια. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος Galerkin.

Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τις συναρτήσεις $w_k = w_k(x)$ $(k = 1, ...)$ οι οποίες είναι ομαλές,

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι μια ορθογώνια βάση του } H_0^1(U) \tag{3.7}$$

και

$$\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ είναι μια ορθοκανονική βάση του } L^2(U). \tag{3.8}$$

(Προς το παρόν, θα μπορούσαμε να πάρουμε $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ να είναι το πλήρες σύνολο κατάλληλων κανονικοποιημένων ιδιοσυναρτήσεων (complete set of appropriately normalized eigenfunctions) για $L = -\Delta$ στον $H_0^1(U)$.)

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα θετικό ακέραιο m. Θα ψάξουμε για μια συνάρτηση $\mathbf{u}_m : [0, T] \to H_0^1(U)$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \tag{3.9}$$

όπου ελπίζουμε να επιλέξουμε τους συντελεστές $d_m^k(t)w_k$ $(0 \leqslant t \leqslant T,$ $k = 1, ..., m)$ τέτοιους ώστε

$$d_m^k(0) = (g, w_k) \ (k = 1, ..., m) \tag{3.10}$$

και

$$(\mathbf{u}_m', w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k) \ (0 \leqslant t \leqslant T, \ k = 1, ..., m). \tag{3.11}$$

(Εδώ, όπως και προηγουμένως, το (,) συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(U)$.)

Οπότε ψάχνουμε μια συνάρτηση $\mathbf{u}_m$ της μορφής (3.9) που ικανοποιεί την "προβολή (projection)" (3.11) του προβλήματος (3.6) πάνω σε πεπερασμένο διανυσματικό υπόχωρο που παράγεται (spanned) από την $\{w_k\}_{k=1}^m$.

Θεώρημα 3.3 (Κατασκευή των προσεγγιστικών λύσεων) *Για κάθε ακέραιο* $m = 1, 2, ...$ *υπάρχει μια μοναδική λύση* $\mathbf{u}_m$ *της μορφής (3.9) που ικανοποιεί τις σχέσεις (3.10), (3.11).*

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι η $\mathbf{u}_m$ έχει την μορφή (3.9), αρχικά παρατηρούμε από τη σχέση (3.8) ότι

$$(\mathbf{u}'_m(t), w_k) = d_m^k{}'(t).$$

Επιπλέον

$$B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t),$$

για $e^{kl}(t) := B[u_l, w_k; t]$ $(k, l = 1, ...m)$. Ας γράψουμε επίσης $f^k(t) := (\mathbf{f}(t), w_k)$ $(k = 1, ..., m)$. Οπότε η (3.11) μετατρέπεται σε ένα γραμμικό ODE σύστημα

$$d_m^k{}'(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t) \ (k = 1, ..., m), \tag{3.12}$$

αίτιο των αρχικών συνθηκών (3.10). Σύμφωνα με τη θεωρία ύπαρξης για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, υπάρχει μια μοναδική απολύτως συνεχής συνάρτηση $\mathbf{d}_m(t) = (d_m^1(t), ..., d_m^m(t))$ που ικανοποιεί την (3.10) και την (3.12) για σχεδόν παντού $0 \leqslant t \leqslant T$. Και τότε η $\mathbf{u}_m$ ορισμένη από την (3.9) λύνει την (3.11) για σχεδόν παντού $0 \leqslant t \leqslant T$.

β. Υπολογισμοί ενέργειας.

Έχουμε σκοπό τώρα να στείλουμε το m στο άπειρο και να δείξουμε ότι μια υπακολουθία των λύσεών μας $\mathbf{u}_m$ των προσεγγιστικών προβλημάτων (3.10), (3.11) συγκλίνει σε μια ασθενής λύση του (3.9). Για να το επιτύχουμε αυτό θα χρειαστούμε μερικές ομοιόμορφες εκτιμήσεις (uniform estimates).

Θεώρημα 3.4 (Ενεργειακές εκτιμήσεις) *Υπάρχει μια σταθερά C, που εξαρτάται μόνο από τα U, T και τους συντελεστές του L, τέτοια ώστε*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)}+\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}+\|\mathbf{u}'_m\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{L^2(U)}\right)$$

για $m=1,2,....$

γ. Ύπαρξη και μοναδικότητα.

Στη συνέχεια περνάμε σε όρια όπως $m\to\infty$, για να κατασκευάσουμε μια ασθενής λύση του αρχικών/συνοριακών τιμών προβλήματος (3.6).

Θεώρημα 3.5 (Ύπαρξη μιας ασθενούς λύσης) *Υπάρχει μια ασθενής λύση του (3.6).*

Θεώρημα 3.6 (Μοναδικότητα των ασθενών λύσεων) *Μια ασθενής λύση του (3.6) είναι μοναδική.*

3.1.3 Ομαλότητα - regularity.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα συζητήσουμε την ομαλότητα (regularity) των ασθενών λύσεων $\mathbf{u}$ του αρχικών/συνοριακών τιμών προβλήματος για δεύτερης τάξης παραβολικές εξισώσεις. Ο τελικός μας σκοπός είναι να αποδείξουμε ότι η $\mathbf{u}$ είναι ομαλή (smooth), υπό την προϋπόθεση ότι οι συντελεστές της PDE, το σύνορο του χωρίου, κ.τ.λ. είναι ομαλά (smooth).

Θεώρημα 3.7 (Βελτιωμένη ομαλότητα) *i. Θεωρούμε* $g \in H_0^1(U)$, $\mathbf{f} \in L^2(0,T;L^2(U))$.

Υποθέτουμε $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$, *με* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U)$, *είναι η ασθενής λύση του*

$$\begin{cases} u_t + Lu = f \ \textit{στο}\ U_T \\ u = 0 \ \textit{στο}\ \partial U \times [0,T] \\ u = g \ \textit{στο}\ U \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Τότε είναι

$$\mathbf{u} \in L^2(0,T;H^2(U)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(U)),$$
$$\mathbf{u}' \in L^2(0,T;L^2(U)),$$

και έχουμε την εκτίμηση

$$\begin{aligned} &ess \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\|_{H_0^1(U)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^2(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;L^2(U))} \\ &\leqslant C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H_0^1(U)}\right), \end{aligned}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα U, T και τους συντελεστές του L.

ii. Αν επιπλέον

$$g \in H^2(U),\ \mathbf{f}' \in L^2(0,T;L^2(U)),$$

τότε

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} \in L^{\infty}(0,T;H^2(U)),\\
&\mathbf{u}' \in L^{\infty}(0,T;L^2(U)) \cap L^2(0,T;H_0^1(U)),\\
&\mathbf{u}'' \in L^2(0,T;H^{-1}(U)),
\end{aligned}$$

με την εκτίμηση

$$\begin{aligned}
&ess \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|\mathbf{u}(t)\|_{H^2(U)} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(U)}\right) + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} +\\
&+\|\mathbf{u}''\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \leqslant C\left(\|\mathbf{f}\|_{H^1(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{H^2(U)}\right).
\end{aligned}$$

Σημείωση. Στις εφαρμογές στα παραβολικά προβλήματα, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $Q = \Omega \times (0, \mathrm{T})$,

$$\begin{aligned}
&W^{2,1,p}(Q) = L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;L^p(\Omega)), p \geq 1,\\
&H^{2,1}(Q) = L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) = W^{2,1,2}(Q).
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική ανάλυση προβλημάτων ελέγχου

4.1 Εισαγωγή

4.1.1 Γραμμικές παραβολικές εξισώσεις

Θεωρούμε ότι $V \subset H \subset V^*$ (δυϊκός χώρος) είναι τρεις χώροι Hilbert με συνεχή, πυκνά εμφυτεύματα. Η αντιστοίχιση μεταξύ των V, V^*, συμβολίζοντας με $(v, w)_{V \times V^*}$ ταυτίζεται με το εσωτερικό γινόμενο $(v, w)_H$ στον H, αν $v, w \in H$. Έστω $A(t) : V \to V^*$ είναι μια οικογένεια γραμμικών τελεστών, $t \in [0, T]$, που ικανοποιεί τις συνθήκες:

i. για κάθε $y \in V$, η απεικόνιση $t \to A(t)y$ είναι ισχυρά μετρήσιμη (strong measurable) στο $[0, T]$,

ii. για κάθε $t \in [0, T]$, $A(t)$ συνεχές και με

$$|A(t)|_{L(V,V^*)} \leq C \ \text{ σχεδόν παντού στο } [0, T],$$

iii. α-πιεστική συνθήκη (α-coercivity condition):

$$(A(t)y, y)_{V\times V^*} + \alpha\, |y|_H^2 \geq \omega\, |y|_V^2\,,$$
$$\text{όπου } \alpha \in \mathbb{R},\ \omega > 0\ \forall y \in V,\quad \text{σχεδόν παντού για } t \in [0,T].$$

Θα ασχοληθούμε με το γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών σε πεπερασμένους διανυσματικούς χώρους:

$$\frac{dy}{dt}(t) + A(t)y(t) = f(t)\ \ \text{σχεδόν παντού για } t \in (0,T), \tag{4.1}$$

$$y(0) = y_0. \tag{4.2}$$

Με την αντικατάσταση της άγνωστης συνάρτησης $y(t) = e^{at}z(t)$, παίρνουμε για το z την εξίσωση

$$\frac{dz}{dt}(t) + \alpha z(t) + A(t)z(t) = f(t)e^{-\alpha t}\ \ \text{σχεδόν παντού για } t \in (0,T).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πάρουμε $\alpha = 0$ στην α-πιεστική συνθήκη.

Με αυτή την υπόθεση, μια απεικόνιση $y \in L^2(0,T;V)$ με $\frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;V^*)$ ονομάζεται μια ασθενής λύση της (4.1) αν

$$\left(\frac{d}{dt}y(t), \psi\right)_{V\times V^*} + (A(t)y(t), \psi)_{V\times V^*} = (f(t), \psi)_{V\times V^*} \tag{4.3}$$

$\forall \psi \in V$, σχεδόν παντού ($\sigma.\pi.$) για $t \in [0,T]$. Θεωρούμε επίσης ότι $f \in L^2(0,T;V^*)$.

Θεώρημα 4.1 *Έστω $y_0 \in H$, $f \in L^2(0,T;V^*)$. Τότε υπάρχει μια μοναδική ασθενής λύση για τις (4.1), (4.2).*

Όταν ο A είναι ανεξάρτητος από το t, $y_0 \in dom(A_H)$ (π.χ. $Ay_0 \in H$), και $f \in L^2(0,T;H)$, τότε η ασθενής λύση είναι πιο ομαλή, $y \in C(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;H)$ (Barbu and Precupanu [1986]).

Είναι προτιμότερο όμως να θεωρήσουμε την ισοδύναμη διατύπωση όταν ο $A(t)$ παράγεται από ένα διγραμμικό, ανεξάρτητο του χρόνου, φραγμένο συναρτησιακό $\alpha(t,\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ το οποίο είναι

$$\alpha\left(t,y,\psi\right) = \left(A(t)y,\psi\right)_{V\times V^*}, \ \forall \mathrm{y},\psi \in \mathrm{V},\, \forall \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}].$$

Αν θεωρήσουμε $t \to \alpha(t,y,\psi)$ είναι μετρήσιμη για κάθε y,ψ στο V, $\left|\alpha\left(t,y,\psi\right)\right| \leq c\left|y\right|_V \left|\psi\right|_V$ και ότι η πιεστική συνθήκη (i)

$$\alpha\left(t,y,y\right) + \alpha\left|y\right|_H^2 \geq \omega\left|y\right|_V^2, \quad \forall y \in V, \quad \sigma.\pi. \ \ t \in [0,T], \tag{4.4}$$

ισχύει, τότε ισχύουν οι αρχικές προϋποθέσεις (i), (ii), (iii) που θέσαμε για τον $A(t)$. Οπότε η ασθενής λύση (4.3) μπορεί να γραφεί

$$\left(\frac{d}{dt}y(t),\psi\right)_{V\times V^*} + \alpha\left(t,y(t),\psi\right) = \left(f(t),\psi\right)_{V\times V^*} \tag{4.5}$$

$\forall \psi \in V$, σχεδόν παντού για $t \in [0,T]$.

Παράδειγμα. Αν θέσουμε $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $\alpha(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ με

$$\alpha\left(y,\psi\right) = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla\psi dx$$

και $f \in L^2(\Omega)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$. Ο τελεστής $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ που παράγεται από τον $\alpha(\cdot,\cdot)$ είναι ο τελεστής Laplace, οπότε η (4.5) είναι η ασθενής λύση του ομογενούς προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών Dirichlet

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f \ \ \text{στο} \ \ Q = \Omega \times (0,T),$$

$$y(x,t) = 0 \;\; \text{στο} \;\; \Sigma = \partial\Omega \; \times [0,T]$$

$$y(x,0) = y_0(x) \;\; \text{στο} \;\; \Omega \;\; (\text{ομαλό φραγμένο χωρίο}).$$

4.1.2 Προσέγγιση παραβολικών εξισώσεων

Αυτή η παράγραφος είναι βασισμένη στο βιβλίο Neittaanmäki and Tiba [1984 Ch III].

Διακριτοποίηση

Εξετάζουμε την quasiautonomous μεταβλητή της ασθενούς μορφής (4.3), (4.5), των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u(t), \psi\right)_{V\times V^*} + \alpha\left(u(t), \psi\right) = \left(f(t), \psi\right)_{V\times V^*} \tag{4.6}$$

$\forall \psi \in V$, σχεδόν παντού για $t \in (0,T)$

$$u(0) = u^0. \tag{4.7}$$

Υποθέτουμε, όπως και προηγουμένως, ότι $V \subset H \subset V^*$ είναι τρείς χώροι Hilbert, με συνεχή, πυκνά εμφυτεύματα και $\alpha(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ ένα διγραμμικό συναρτησιακό που ικανοποιεί συγκεκριμένες υποθέσεις (βλέπε προηγούμενη παράγραφο), $u^0 \in H$, $f \in L^2(0,T,V^*)$ τέτοιες ώστε οι (4.6), (4.7) έχουν μια μοναδική λύση $u \in L^2(0,T;V) \cap W^{1,2}(0,T;V^*)$. Σε πολλά παραδείγματα ο V, είναι ένας υπόχωρος του $H^1(\Omega)$ σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στη μερική διαφορική εξίσωση. Αν V_h είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένων στοιχείων του V, τότε η πεπερασμένων στοιχείων προσέγγιση της (4.6) είναι η αναζήτηση των $u_h = u_h(x,t)$ που ανήκουν στον V_h για κάθε $t \in (0,T)$ και ικανοποιούν την

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \upsilon_h\right)_{L^2(\Omega)} + \alpha\left(u_h, \upsilon_h\right) = \left(f(t), \upsilon_h\right)_{V\times V^*}, \tag{4.8}$$

$\forall \upsilon_h \in V_h$, σχεδόν παντού για $t \in (0,T)$.

Αυτό ονομάζεται ημιδιακριτό σχήμα Galerkin καθώς έχουμε κάνει διακριτοποίηση μόνο στις χωρικές μεταβλητές ενώ η χρονική μεταβλητή t είναι συνεχής.

Ψάχνοντας την u_h της μορφής

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{m} U_i(t)\varphi_i(x), \tag{4.9}$$

όπου $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ είναι μια βάση του V_h, παίρνουμε ένα σύστημα πρώτης τάξης συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{m} (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)} \frac{dU_j}{dt} + \sum_{j=1}^{m} \alpha(\varphi_i, \varphi_j) U_j = (f, \varphi_i)_{V\times V^*}, \tag{4.10}$$

με $i = 1, ..., m$, $t \in (0,T)$ για άγνωστες συναρτήσεις $U_1(t), ..., U_m(t)$ $(m = dimV_h)$. Οι συνοριακές συνθήκες εμπεριέχονται στο σύστημα μέσω του χώρου V, πρέπει τώρα να λάβουμε υπόψιν μας την αρχική συνθήκη (4.7). Συμβολίζουμε με $u_h^0(x) = u_h(x,0)$. Θέτουμε $u_h^0 = u^0$ όταν $u^0 \in V_h$. Αν $u^0 \notin V_h$ τότε το u_h^0 προς στιγμήν μπορεί να είναι η κλασική παρεμβολή $\Pi_h u^0 \in V_h$ του u^0 ή κάποια άλλη προβολή του u^0 στον V_h, π.χ.,

$$(u_h^0, \upsilon_h)_{L^2(\Omega)} = (u^0, \upsilon_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \upsilon_h \in V_h.$$

Οι αρχικές τιμές για τα U_i είναι μοναδικά ορισμένα από τη σχέση:

$$\sum_{i=1}^{m} U_i(0)\varphi_i = u_h^0,$$

αφού $\{\varphi_i\}$ είναι μια βάση του V_h. Συμβολίζοντας με $U = (U_1, ..., U_m)^T$ το διάνυσμα των αγνώστων, ξαναγράφουμε την (4.10) σε μορφή πινάκων

$$MU' + KU = \mathcal{F}, \tag{4.11}$$

όπου $\mathcal{F} = (F(\varphi_1), ..., F(\varphi_m))^T$ (load vector), $F(\varphi_i) = (f, \varphi_i)_{V \times V^*}$ μπορεί να εξαρτάται από το χρόνο καθώς έχουμε υποθέσει πως $f \in L^2(0, T, V^*)$. Επίσης

$M = \big((\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)}\big)_{i,j=1,\dots,m}$ (mass matrix) και

$K = (\alpha(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1,\dots,m}$ (stiffness matrix).

Ας θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$$

του χρονικού διαστήματος χρόνου $[0, T]$ με ισαπέχοντες κόμβους $t_n = n\tau$ και με χρονικό βήμα $\tau = T/N$. Ας συμβολίσουμε με $f^{(n)}$ την τιμή του $\mathcal{F}$ στο n-οστό χρονικό σημείο, και ας προσεγγίσουμε την (4.11) συμμετρικά ως προς το $(n + \frac{1}{2}\tau)$, π.χ.

$$M\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\tau} + K\frac{U^{(n+1)} + U^{(n)}}{2} = \frac{f^{(n+1)} - f^{(n)}}{2},$$

όπου το $U^{(n)}$ συμβολίζει τις προσεγγιστικές τιμές του U στο n-οστό χρονικό σημείο. Οπότε το $U^{(n+1)}$ μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση

$$\left(M + \frac{\tau K}{2}\right) U^{(n+1)} = \left(M - \frac{\tau K}{2}\right) U^{(n)} + \tau\frac{f^{(n+1)} + f^{(n)}}{2}, \qquad n = 0, 1, ..., N-1 \tag{4.12}$$

με $U^{(0)} = (U_1(0), ..., U_m(0))^T$.

Αυτό είναι γνωστό ως το σχήμα Crank - Nicolson.

Άλλη κατάλληλη μέθοδος διακριτοποίησης του χρόνου για την (4.11) είναι η πεπλεγμένη (implicit) προς τα πίσω μέθοδος Euler:

$$M\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\tau} + KU^{(n+1)} = f^{(n+1)}.$$

Αυτή μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} &(M + \tau K)\, U^{(n+1)} = MU^{(n)} + \tau f^{(n+1)},\ n = 0, 1, ..., N-1, \\ &U^{(0)} = U(0). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Η πεπλεγμένη (implicit) προς τα πίσω μέθοδος Euler και το σχήμα Crank - Nicolson είναι άνευ όρων ευσταθής, π.χ. το μέγεθος του τ περιορίζεται μόνο από τις απαιτήσεις ακρίβειας. Από την άλλη πλευρά η λελυμένη (explicit) μέθοδος Euler

$$M\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\tau} + KU^{(n)} = f^{(n)}$$

δεν συνίσταται καθώς το χρονικό βήμα πρέπει να περιορίζεται από την $\tau \leq Ch^2$ διαφορετικά εμφανίζονται εκθετικές αστάθειες.

Μια ενοποιημένη και πιο γενική μέθοδος δίνεται από το ακόλουθο θ-σχήμα, $\theta \in [0, 1]$:

$$M\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\tau} + \theta KU^{(n+1)} + (1-\theta)KU^{(n)} = \theta f^{(n+1)} + (1-\theta) f^{(n)}.$$

Για $\theta = \frac{1}{2}, 1, 0$ έχουμε τους παραπάνω αλγορίθμους.

Παράδειγμα. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Να βρεθεί το $u = u(x,t)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{για } x \in (0,1),\ t > 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{για } x \in (0,1).$$

Γράφουμε το τύπο (4.8):

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \upsilon_h\right)_{L^2(0,1)} + \alpha\left(u_h, \upsilon_h\right) = 0,\ \forall \upsilon_h \in V_h,$$

με $V_h = span(\varphi_i)_{i=1,\ldots,m}$,

$$\alpha(u,\upsilon) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial x} dx,$$

και

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\varphi_i(x).$$

Οπότε έχουμε το σύστημα

$$M\frac{d}{dt}U + KU = 0$$

όπου

$$U = (u_1(t), ..., u_m(t))^T,$$
$$M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx,$$
$$K_{ij} = \alpha(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx.$$

Έστω $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < ...$ μια διαμέριση του διαστήματος του χρόνου με βήμα $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ και $U^{(j)} = U(t_j)$. Εφαρμόζοντας το σχήμα Crank - Nicolson έχουμε

$$\left(\frac{1}{\Delta t}M + \frac{1}{2}K\right)U^{(n+1)} = \left(\frac{1}{\Delta t}M + \frac{1}{2}K\right)U^{(n)} \qquad n = 0,1,2,... \quad (4.14)$$

Όπου $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m} \in V_h$ είναι τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις βάσης.

Το ίδιο αλγεβρικό σύστημα μπορεί να παραχθεί εφαρμόζοντας το σχήμα Crank - Nicolson απευθείας στην εξίσωση (4.6) του προβλήματος και παίρνοντας την προς τα εμπρός χωρική διακριτοποίηση.

Από την αρχική συνθήκη έχουμε

$$u^0(x_i) = \sum_{k=1}^{m} u_0(x_k)\varphi_k(x_i) = u_0(x_i)$$

και

$$U_i^{(0)} = u_0(x_i) \quad i = 1, ..., m.$$

Οπότε παίρνουμε

$$K_{ii} = 2/h \quad \text{για } i = 1, ..., m,$$

$$K_{i,i+1} = -1/h \quad \text{για } i = 1, ..., m-1,$$

όλα τα άλλα στοιχεία του K κάτω από τη διαγώνιο είναι μηδέν και

$$M_{ii} = 2h/3 \quad \text{για } i = 1, ..., m,$$

$$M_{i,i+1} = h/6 \quad \text{για } i = 1, ..., m-1,$$

όλα τα άλλα στοιχεία του M κάτω από τη διαγώνιο είναι μηδέν. Εδώ $h = 1/(m-1)$.

Ο πίνακας του γραμμικού αλγεβρικού συστήματος (4.14) είναι $A = M/\Delta t + K/2$ και εδώ τα μη μηδενικά στοιχεία είναι

$$a_{ii} = 2h/(3\Delta t) + 1/h \quad \text{για } i = 1, ..., m,$$

$$a_{i,i+1} = h/(6\Delta t) - 1/(2h) \quad \text{για } i = 1, ..., m-1.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο A ικανοποιεί το κριτήριο (row diagonal dominance)

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \text{ για κάθε } i.$$

Το παραπάνω κριτήριο εξασφαλίζει τη σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων κατά την επίλυση του (4.14) (βλέπε Ciarlet [1989], για παράδειγμα).

4.1.3 Γραμμικά συστήματα ελέγχου

Το πρόβλημα μοντέλο και παραδείγματα

Έστω V, H, U, τρεις χώροι Hilbert με $V \subset H \subset V^*$ (ο δυϊκός χώρος) συμπαγώς. Έστω $A : V \to V^*$, $B : U \to V^*$ γραμμικοί φραγμένοι τελεστές. Στη προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι το πρόβλημα Cauchy

$$y' + Ay = Bu + f, \text{σχεδόν παντού στο } (0,T) \tag{4.15}$$

$$y(0) = y_0, \tag{4.16}$$

έχει μια μοναδική λύση $y \in C(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, $y' \in L^2(0,T;V^*)$ αν $f \in L^2(0,T;V^*)$, $y_0 \in H$, και ο A να ικανοποιεί τη συνθήκη (4.4) Επιπλέον αν $f \in L^2(0,T;H)$, $Ay_0 \in H$, και B είναι H-*valued*, τότε η λύση y στην πραγματικότητα απαιτεί $y \in C(0,T;V)$, $y' \in L^2(0,T;H)$. Η απεικόνιση $u \to y$ είναι affine και φραγμένη με τις κατάλληλες νόρμες -βλέπε Θεώρημα (4.1).

Συσχετίζουμε τις (4.15), (4.16) με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$Minimize \left\{ \int_0^T L\left(y(t), u(t)\right) dt + \ell\left(y(T)\right) \right\} \tag{4.17}$$

για όλα τα $u \in L^2(0,T;U)$, $y \in L^2(0,T;V)$ που δίνονται από τις (4.15), (4.16), υπό τους περιορισμούς ελέγχου

$$y(t) \in C, \quad \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}], \tag{4.18}$$

$$\mathrm{u} \in U_{ad}. \tag{4.19}$$

Όπου $C \subset H$, $U_{ad} \subset L^2(0,T;U)$ είναι κυρτά, κλειστά υποσύνολα, $\ell : H \to (-\infty,+\infty)$, είναι κυρτή και συνεχής και $L : H \times U \to (-\infty,+\infty)$ είναι κατάλληλη (proper), κυρτή, και κάτω ημισυνεχής. Πιο συγκεκριμένα, φραγμένο από κάτω (majorized from below) από affine συναρτήσεις και $L\left(y(\cdot),u(\cdot)\right)$ είναι μετρήσιμη στο $[0,T]$ για κάθε μετρήσιμες απεικονίσεις $y(\cdot),u(\cdot)$. Αυτό δίνει νόημα στο ολοκλήρωμα στην (4.17), που μπορεί τελικά να ισούται με $+\infty$. Όπου είναι απαραίτητο θα επιβάλουμε και άλλες τέτοιες ειδικές υποθέσεις.

Το πρόβλημα (4.17) συνήθως αναφέρεται ως πρόβλημα Bolza στη βιβλιογραφία. Για άλλες μορφές προβλημάτων ελέγχου ισοδύναμες με την παραπάνω βλέπε και Fleming and Rishel [1975, Ch.II] .

Ένα κλασικό παράδειγμα του συναρτησιακού κόστους είναι το δευτέρου βαθμού, τετραγωνικό (quadratic) συναρτησιακό:

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(|Dy(t) - y_d(t)|_H^2 + |u(t)|_U^2\right)dt + \frac{\nu}{2}\,|y(\mathrm{T}) - y_{\mathrm{T}}|_H^2\,, \tag{4.20}$$

όπου $y_d \in L^2(0,T;H)$, $y_T \in H$ είναι δοσμένα, $\nu > 0$ είναι μια σταθερά και D είναι ένας γραμμικός, φραγμένος observation τελεστής. Η σημασία του προβλήματος (4.17) έγκειται στο ότι ψάχνουμε ένα u στο σύνολο των αποδεκτών ελέγχων U_{ad}, έτσι ώστε η αντίστοιχη λύση y των (4.15), (4.16) να είναι αποδεκτή, $y(t) \in C$ στο $[0,T]$, και η y να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην επιθυμητή κατάσταση y_d και σε μια τιμή y_T που είναι και ο τελικός στόχος. Επιπλέον, αυτό πρέπει να επιτευχθεί με το ελάχιστο κόστος, το οποίο το μετράμε με τη νόρμα του u στον $L^2(0,T;U)$.

Ένα τέχνασμα είναι να ξαναορίσουμε τον L ως εξής

$$\widetilde{L}(y,u) = \begin{cases} L(y,u) & \text{αν } u \in U_0, \\ +\infty & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{4.21}$$

στην περίπτωση που $U_{ad} = \{u \in L^2(0,T;U); u(t) \in U_0 \;\; \sigma.\pi. \text{ στο } [0,T]\}$ και $U_0 \subset U$ είναι ένα κυρτό, κλειστό υποσύνολο. Η απεικόνιση $\widetilde{L}$ παραμένει κυρτή, κάτω ημισυνεχής και οι περιορισμοί (4.19) θα περιέχονται εν δυνάμει στην απαίτηση ότι το κόστος δεν είναι $+\infty$, η οποία είναι φυσικά συσχετισμένη με τα προβλήματα ελαχιστοποίησης.

Θα μπορούσαμε ομοίως να προχωρήσουμε από την (4.18), αλλά οι δυσκολίες που σχετίζονται με τους state constraints μας οδηγούν στο να κρατήσουμε την (4.18) explicit.

Ως προς τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, μια μεγάλη ποικιλία συναρτησιακών κόστους είναι επί του ενδιαφέροντος και παραθέτουμε πολλά παραδείγματα που μπορεί να συγκριθούν με αυτά που παρουσιάζονται στο κλασικό βιβλίο του Lions [1968].

Παράδειγμα 1. Έστω Ω ένα φραγμένο χωριό στον $\mathbb{R}^N$ με ομαλό σύνορο Γ και $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $U = L^2(\Omega)$, και έστω $D : H \to H$ η ταυτοτική απεικόνιση. Τότε θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \Big\{(y(x,t) - y_d(x,t))^2 + (u(x,t))^2\Big\} dxdt$$
$$+\frac{\nu}{2}\int_\Omega (y(x,T) - y_T(x))^2\, dx.$$

με συνθήκες περιορισμού

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= u + f \quad \text{στο } Q = \Omega \times (0,T), \\ y &= 0 \qquad\qquad \text{στο } \Sigma = \partial\Omega \times [0,T]. \end{aligned}$$

(θεωρούμε $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $Au = -\Delta u$, $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $Bu = u$. Η εξίσωση (4.15) παίρνει τη παραπάνω μορφή) και λέμε ότι έχουμε κατανεμημένο πρόβλημα ελέγχου (distributed control problem) καθώς το u δρα σε όλο το χωρίο Ω.

Παράδειγμα 2. Αν η $D : V \to H$ δίνεται από τη σχέση $Dy = grady$, $y_d \in L^2(0,T;H)^N$ και $U = L^2(\Gamma)$, θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |grad(y - y_d)|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma u^2(x,t) d\tau dt$$
$$+\frac{\nu}{2}\int_\Omega (y(x,T) - y_T(x))^2\, dx.$$

με συνθήκες περιορισμού :

$$y_t - \Delta y = f \text{ στο } Q,$$
$$\frac{\partial y}{\partial n} = u \text{ στο } \Sigma$$

(θεωρούμε $V = H^{-1}(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ και $A : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)^*$ ο τελεστής Laplace. Ορίζουμε $B : U = L^2(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)^*$ τον

$$(Bu, v)_{V\times V^*} = \int_{\partial\Omega} uv d\sigma \quad \forall v \in V.$$

Τότε από το τύπο του Green, η εξίσωση (4.15) (state equation) μπορεί να γραφεί με τη παραπάνω μορφή) και έχουμε ένα boundary control system.

Παράδειγμα 3. Αν $D : V \to L^2(\Gamma)$ είναι ο τελεστής ίχνους, $y_d \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ και $U = L^2(\Gamma)$, $\nu = 0$ παίρνουμε

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Gamma \Big\{(y(x,t) - y_d)^2 + |u(x,t)|^2\Big\} d\tau dt.$$

Σ' αυτά τα παραδείγματα λέμε ότι έχουμε distributed (boundary) observation and/or control. Ας δούμε τα επόμενα παραδείγματα, όπου σχολιάζουμε σύντομα την επιλογή και τη σημασία του τελεστή B.

Παράδειγμα 4. Τελικώς παίρνουμε $V = H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $m > \frac{N}{2}$, $H = L^2(\Omega)$, $U = \mathbb{R}$ και $A = -\Delta : V \to V^*$ ο οποίος είναι γραμμικός και φραγμένος.

Για $V \subset C(\overline{\Omega})$ και για γραμμικό και συνεχές συναρτησιακό Dirac $\delta : V \to \mathbb{R}$, $\delta(v) = v(x_0)$ (το x_0 είναι fixed) με $\delta \in V^*$. Τότε, ο τελεστής $B : \mathbb{R} \to V^*$

$$Bu = u\delta$$

είναι γραμμικός, συνεχής και έχουμε ορίσει ένα pointwise control system:

$$y_t - \Delta y = u\delta + f \text{ στο } Q$$

$$y = 0 \text{ στο } \Sigma.$$

Φυσικά, σε κάθε μια από τις παραπάνω τρεις καταστάσεις, πρέπει να προστεθεί η αρχική συνθήκη (4.16). Πιο γενικοί ελλειπτικοί τελεστές A μπορούν επίσης να ληφθούν υπόψιν.

Τελικώς, εξετάζουμε εν συντομία τις (4.18), (4.19). Συχνά, το U_{ad} (ή C) ορίζεται μέσω ανισοτήτων ή ισοτήτων.

Παράδειγμα 5. Έστω $U = L^2(G)$, $G = \Omega$, ή $G = \partial\Omega$. Οπότε μπορούμε να πάρουμε

$$U_{ad}^1 = \left\{ u \in L^2(G); a \leqslant u(x) \leqslant b \ \text{ σχεδόν παντού στο } G \right\},$$

$$U_{ad}^2 = \left\{ u \in L^2(\Omega); \int_G u^2(x)dx \leqslant 1 \right\}$$

και ομοίως για το C. Όταν $C \subset H^1(\Omega)$, μπορεί κάποιος να θεωρήσει περιορισμούς για το gradient

$$C = \left\{ y \in H^1(\Omega); |grad\ y(x)| \leqslant 1 \ \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \right\}.$$

Ας επιλέξουμε ένα u της μορφής

$$u(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin v(x), \tag{4.22}$$

όπου v είναι μια "free" control mapping. Αντικαθιστώντας την (4.22) στην εξίσωση (4.15) παίρνουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης για την μεταβλητή ελέγχου v. Οι περιορισμοί ελέγχου που εκφράζονται από την U_{ad}^1 ικανοποιούνται αυτόματα. Τέτοιες τεχνικές (σύμφωνα με τον A. Miele) μπορούν να υλοποιηθούν σε μια μεγάλη τάξη περιορισμών ελέγχου (Banichuk [1983, Ch I]).

Ας σημειώσουμε ότι η απεικόνιση $v \mapsto y$ που ορίζεται από τις (4.15), (4.16), (4.22) είναι μη γραμμική. Συμπερασματικά, το (4.17) δεν είναι πια κυρτό ως προς το v, αλλά οι ιδιότητες διαφορισιμότητας διατηρούνται. Φαινομενικά, αυτό είναι ένα σοβαρό μειονέκτημα συγκρίνοντας με το τύπο

(4.21), ο οποίος επίσης εγγυάται την κυρτότητα του παραγόμενου προβλήματος, αλλά σε πολλές εφαρμογές στοιχειώδεις τεχνικές όπως η (4.22) είναι πολύ χρήσιμες.

Σημείωση. Όπως έχουμε πει, το πρόβλημα (4.17) είναι αρκετά γενικό και περιγράφει μεγάλη τάξη εφαρμογών. Ωστόσο, υπάρχουν αξιοσημείωτες άλυτες επεκτάσεις που δεν ταιριάζουν με αυτή τη τοποθέτηση και αναφέρουμε κάποιες από αυτές με σκοπό να ρίξουμε μια γρήγορη ματιά σ' αυτή τη περιοχή της έρευνας:

– προβλήματα ελέγχου σε Banach και πιο γενικούς χώρους,

– συνοριακά προβλήματα ελέγχου με συνθήκη Dirichlet

– μη γραμμικά A, B και μη κυρτά L, ℓ,

– εξαρτημένα από το χρόνο A, L,

– μικτοί περιορισμοί που εμπεριέχουν state and control, terminal state περιορισμούς στον $y(T)$, κ.τ.λ.

4.2 Τα κύρια αποτελέσματα

Η πρώτη ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί για το πρόβλημα (4.17) είναι για το σύνολο επιλογής ανεκτών ζευγών (admissibility): υπάρχει ένα ζευγάρι $[y, u]$ στο $C(0, T; H) \times L^2(0, T, U)$ που ικανοποιεί τις (4.15)-(4.19) και τέτοια ώστε $L(y, u) \in L^1(0, T)$; Στην πραγματικότητα, κάποιος χρειάζεται το σύνολο των αποδεκτών ζευγών να είναι επαρκώς πλούσιο, κατά κάποια έννοια, αλλιώς το πρόβλημα (4.17) γίνεται τετριμμένο. Αν δεν επιβάλλονται state περιορισμοί ($C = H$), τότε κάθε $u \in U_{ad}$ μπορεί να παράγει ένα αποδεκτό ζεύγος από τις (4.15), (4.16). Διαφορετικά, εκτός απο κάποιες ειδικές περιπτώσεις, αυτή η ερώτηση είναι σε μεγάλο εύρος ανοικτή και μια καταφατική απάντηση συνήθως τίθεται ως υπόθεση.

Παρόλ' αυτά σε πολλά πρακτικά προβλήματα, είναι αρκετό να βρούμε ένα αποδεκτό ζεύγος. Επιπλέον, σε μη κυρτά προβλήματα ελαχιστοποίησης, τα οποία εμφανίζονται για παράδειγμα όταν ασχολούμαστε με μη γραμμικά συστήματα ελέγχου, οι αλγόριθμοι γενικά παράγουν μόνο τοπικούς ελαχιστοποιητές (minimizers) ή κρίσιμα σημεία (critical points).

Οπότε, η ύπαρξη αποδεκτών ζευγών είναι σημαντική και από θεωρητική αλλά και από πρακτική άποψη. Πρέπει να συζητηθεί σε κάθε ειδική περίπτωση και σχετίζεται με κατάλληλες ιδιότητες ελέγχου. Μερικά αποτελέσματα για αυτό το ζήτημα δίνονται στο βιβλίο Neittaanmäki and Tiba [1984 ChIII-IV].

Τώρα, επιστρέφουμε στην ύπαρξη βέλτιστων ζευγών. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\varphi : U \to (-\infty, +\infty)$ είναι *πιεστική* με την έννοια:

$$\lim_{|u|_U \to \infty} \frac{\varphi(u)}{|u|_U^2} = +\infty.$$

Θεώρημα 4.2 *Κάτω από την υπόθεση ότι υπάρχει σύνολο επιλογής ανεκτών ζευγών (admissibility), και έστω τα L, ℓ ικανοποιούν τις υποθέσεις της προηγούμενης παραγράφου και το U_{ad} φραγμένο στο $L^2(0,T;U)$ ή το L είναι πιεστικό στο u ομοιόμορφα ως προς το y. Τότε το πρόβλημα (4.17) έχει τουλάχιστον ένα βέλτιστο ζεύγος $[y^*, u^*]$.*

Απόδειξη. Αν το U_{ad} είναι φραγμένο κάποιος μπορεί να ξαναορίσει

$$\Psi(y,u) = \int_0^T L(y(t),u(t))dt + \ell(y(T))$$

καθώς το $+\infty$ είναι έξω από το U_{ad} (όπως στην (4.21)) και εξασφαλίζουμε μια απεικόνιση η οποία είναι πιεστική στον $L^2(0,T;U)$ ομοιόμορφα ως προς το y. Οπότε, είναι αρκετό να αναλύσουμε αυτή τη κατάσταση.

Η συνθήκη για το σύνολο επιλογής των ανεκτών (admissibility) εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ακολουθίας ελαχιστοποίησης $[y_n,u_n]$, π.χ.

$$\lim_{n\to\infty} \Psi(y_n,u_n) = \inf(P) < +\infty. \tag{4.23}$$

Αν η $\{u_n\}$ δεν είναι φραγμένη στον $L^2(0,T;U)$, παίρνουμε $\alpha > 0$, $K > 0$ δοσμένα από την πιεστική υπόθεση τέτοια ώστε

$$L(y,u) \geqslant \alpha\,|u|_U^2\,, \text{ για } |u|_U \geqslant K,$$

και συμβολίζουμε το μετρήσιμο υποσύνολο

$$\chi_n = \{t \in [0,T]; |u_n(t)|_U \geqslant K\}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^T L(y_n(t),u_n(t))dt &\geqslant \alpha \int_{\chi_n} |u_n(t)|_U^2\, dt + \int_{[0,T]\setminus\chi_n} L(y_n(t),u_n(t))dt \geqslant \\ &\geqslant \alpha \int_{\chi_n} |u_n(t)|_U^2\, dt + \int_{[0,T]\setminus\chi_n} \{(g,y_n(t))_H + (h,u_n(t))_U + c\}dt, \end{aligned} \tag{4.24}$$

όπου τα $g \in H$, $h \in U$, $c \in \mathbb{R}$ ορίζουν την affine απεικόνιση μεγιστοποιώντας το L από κάτω.

Η εξάρτηση $u \to y$ δοσμένη από τις (4.15), (4.16) είναι υπογραμμική (sublinear) από τον $L^2(0,T;U)$ στον $C(0,T;H)$, από το θεώρημα (4.1), και η (4.24) δίνει

$$\begin{aligned}
&\int_0^T L(y_n(t),u_n(t))dt \geqslant \\
&\geqslant \alpha \int_{\chi_n} |u_n(t)|_U^2 \, dt - c_1 \, |u_n|_{L^2(0,T;U)} - c = \\
&= \alpha \int_0^T |u_n(t)|_U^2 \, dt - c_1 \, |u_n|_{L^2(0,T;U)} - c - \alpha \int_{[0,T]\setminus\chi_n} |u_n(t)|_U^2 \, dt \geqslant \\
&\geqslant \alpha \, |u_n|_{L^2(0,T;U)}^2 - c_1 \, |u_n|_{L^2(0,T;U)} - c - \alpha K^2 T.
\end{aligned}$$

Αφού η $\ell(y_n(T))$ είναι επίσης φραγμένη από κάτω από μια affine απεικόνιση, αυτό δίνει $\Psi(y_n,u_n) \to +\infty$ και αντικρούει την (4.23). Επίσης η $\{u_n\}$ είναι φραγμένη στον $L^2(0,T;U)$ και, σε μια υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n \to u^*$ ασθενώς στον $L^2(0,T;U)$. Τότε, ξανά το θεώρημα (4.1), δείχνει ότι $y_n \to y^*$ ισχυρώς στον $C(0,T;H)$ και ασθενώς στον $L^2(0,T;V)$.

Προφανώς $u^* \in U_{ad}$ και $y^*(t) \in C$, $t \in [0,T]$, που σημαίνει πως το ζεύγος $[y^*,u^*]$ είναι αποδεκτό για το πρόβλημα (4.17). Επιπλέον, εφόσον η Ψ είναι κάτω ημισυνεχής, παίρνουμε

$$\Psi(y^*,u^*) \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \Psi(y_n,u_n) = \inf(4.17)$$

και $[y^*,u^*]$ είναι ένα βέλτιστο ζεύγος για το (4.17).

Σημείωση. Αν υποθέσουμε κάποια αυστηρή κυρτότητα για το L ή το ℓ, τότε κάποιος μπορεί να εξασφαλίσει τη μοναδικότητα για το βέλτιστο ζεύγος $[y^*,u^*]$. Επιπλέον, είναι ξεκάθαρο ότι η παραπάνω απόδειξη επίσης δουλεύει αν το L ικανοποιεί την ασθενέστερη συνθήκη

$$\lim_{|u|_U \to \infty} \frac{L(y,u)}{|u|_U^p} = +\infty, \ p > 1, \tag{4.25}$$

ομοιόμορφα ως προς y.

Το επιχείρημα που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος (4.2), σχετίζεται με την ονομαζόμενη " άμεση μέθοδο" στο λογισμό των μεταβλητών, η οποία μιλώντας πρόχειρα, στοχεύει στο να κατασκευάσουμε μια ακολουθία ελαχιστοποίησης $[y_n, u_n]$. Τώρα, ξεκινάμε να περιγράψουμε μια " έμμεση μέθοδο" στη μελέτη των προβλημάτων ελέγχου, βασισμένη στις πρώτης τάξης απαραίτητες συνθήκες βελτιστοποίησης. Πρέπει να επιβάλλουμε τις ακόλουθες εσωτερικές υποθέσεις:

– υπάρχει μια συνάρτηση $\bar{u} \in L^2(0,T;U)$ τέτοια ώστε η αντίστοιχη λύση $\bar{y} \in C(0,T;H)$ των (4.15), (4.16) ικανοποιεί

$$\bar{y}(t) \in intC, \quad \forall t \in [0,T] \ \text{ και } \ L(\bar{y},\bar{u}) \in L^1(0,T). \tag{4.26}$$

– για κάθε $\widetilde{y} \in C(0,T;H)$, υπάρχει μια συνάρτηση $\widetilde{u} \in L^2(0,T;U)$ τέτοια ώστε

$$\widetilde{y} \in int \left\{ z \in L^\infty(0,T;H); \int_0^T L(z,\widetilde{u})dt < +\infty \right\}. \tag{4.27}$$

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη (4.27) είναι λόγω της γενικότητας του συναρτησιακού κόστους για να μελετηθεί και αυτή ικανοποιεί αυτόματα το τετραγωνικό κριτήριο (4.20), ενώ η (4.26) είναι το τύπου Slater πιστοποιητικό περιορισμών.

Θεώρημα 4.3 *Κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις, αν $[y^*, u^*]$ είναι ένα βέλτιστο ζεύγος για το πρόβλημα (4.17), τότε υπάρχει μια συνάρτηση $p^* \in$*

$L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \cap BV(0,T;V^*)$, $\mu \in M(0,T;H)$ *τέτοια ώστε*

$$(p^*)' - A^*p^* - \mu \in \partial_1 L(y^*, u^*) \tag{4.28}$$

$$(\mu, z-y) \geqslant 0 \ \forall z \in C(0,T;H),\ z(t) \in C \ \textit{στο}\ [0,T] \tag{4.29}$$

$$p^*(T) \in -\partial\ell(y^*(T)), \tag{4.30}$$

$$B^*p^* \in \partial_2 L(y^*, u^*), \tag{4.31}$$

όπου $[\partial_1 L, \partial_2 L]$ *είναι οι συνιστώσες του υποδιαφορικού*[1] ∂L *και* $(\cdot,\cdot)$ *είναι η αντιστοίχιση μεταξύ του* $M(0,T;H)$ *και* $C(0,T;H)$.

Αντιστρόφως, αν υπάρχει μια συνάρτηση p^* *τέτοια ώστε το* $[y^*, u^*]$ *να ικανοποιεί τις (4.28)-(4.31) μαζί με τις (4.15), (4.16), τότε αυτό είναι ένα βέλτιστο ζευγάρι για το πρόβλημα (4.17).*

Ας εξετάσουμε τώρα ένα παράδειγμα θεωρητικού μοντέλου με σκοπό να περιγράψουμε κάποιες βασικές εφαρμογές των συνθηκών βελτιστοποίησης.

Θεωρούμε ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ είναι ένα φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και παίρνουμε $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $A : V \to V^*$ είναι $Ay = -\Delta y$,

[1]Όπου $BV(0,T;V^*)$ ο χώρος των φραγμένων συναρτήσεων (bounded variation functions) στον $[0,T]$ με τιμές στον V^*.

Όπου $M(0,T;X^*)$ ο δυϊκός του $C(0,T;X)$= ο χώρος των X^*-valued μέτρων στο $[0,T]$.

Υπενθυμίζουμε ότι για μια κάτω ημισυνεχή, κυρτή, κατάλληλη συνάρτηση $\varphi : X \to \bar{\mathbf{R}}$, υποδιαφορικό είναι η απεικόνιση $\partial\varphi : X \to X^*$ με $\partial\varphi(x) = \{x^* \in X^*; \varphi(x) \leq \varphi(y) + (x-y, x^*),\ \forall y \in X\}$. Επίσης η ανίσωση $(y'(t) + Ay(t), y(t) - z) + \varphi(y(t)) - \varphi(z) \leq (f(t), y(t) - z)$ σχεδόν παντού για $t \in (0,T)$, $\forall z \in V$ χρησιμοποιώντας το διαφορικό μπορεί να γραφεί: $y'(t) + Ay(t) + \partial\varphi(y(t)) \ni f(t)$ σχεδόν παντού $t \in (0,T)$.

$U = L^2(\Omega)$, και $B : U \to H$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Θεωρούμε

$$U_{ad} = \{v \in L^2(Q);\ \ c \leq v(x,t) \leq d \quad \text{σχεδόν παντού στο } Q\},$$

$$C = \{y \in H;\ \ y(x) \in [a,b] \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega\},$$
$$\int_0^T L(y,u)dt = g(y) + h(u),$$

όπου $g : L^2(0,T,H) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και συνεχής, και $h : L^2(Q) \to (-\infty, +\infty)$ είναι κυρτή, κάτω ημισυνεχής, κατάλληλη, με $h(u) = \frac{1}{2}\,|u|^2_{L^2(Q)} + I_{U_{ad}}(u)$, όπου $I_{U_{ad}}$ η δείκτρια συνάρτηση του U_{ad} στον $L^2(Q)$. Εδώ a, b, c, d είναι κάποιες πραγματικές σταθερές τέτοιες ώστε $0 \in [a,b] \cap [c,d]$ (συμβατότητα με συνοριακές συνθήκες Dirichlet και επιτρέπεται ο μηδενικός έλεγχος) και $y_0(x) \in [a,b]$ σχεδόν παντού στον Ω.

Το πρόβλημα ελέγχου (4.17) παίρνει τη μορφή

$$Minimize\left\{g(y) + \frac{1}{2}\,|u|^2_{L^2(Q)}\right\} \tag{4.32}$$

υπό τους όρους

$$y_t - \Delta y = u \qquad \text{στο } Q, \tag{4.33}$$

$$y(x,t) = 0 \qquad \text{στο } \Sigma, \tag{4.34}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \qquad \text{στο } \Omega, \tag{4.35}$$

$$u \in U_{ad}, \tag{4.36}$$

$$y(\cdot,t) \in C \qquad \text{για } [0,T]. \tag{4.37}$$

Σημείωση 1. Αν πληρείται η υπόθεση για το σύνολο επιλογής των ανεκτών, τότε παίρνουμε την ύπαρξη ενός μοναδικού βέλτιστου ζεύγους

$[y^*, u^*]$, εφόσον το U_{ad} είναι φραγμένο και το κόστος είναι αυστηρά κυρτό.

Σημείωση 2. Προφανώς, ο C έχει ένα κενό εσωτερικό στον H. Αντί της συνθήκης του Slater (4.26), υποθέτουμε την ύπαρξη της $\bar{u} \in U_{ad}$ τέτοιας ώστε η αντίστοιχη λύση $\bar{y}$ των (4.33)-(4.35) ικανοποιεί

$$\bar{y}(x,t) \in (a,b), \qquad \forall (x,t) \in Q. \tag{4.38}$$

Καθώς όπως έχουμε αναφέρει μπορούμε επίσης να επιβάλλουμε τη συνθήκη (4.27) σ' αυτή τη τοποθέτηση.

Για να παράγουμε τις συνθήκες βελτιστοποίησης και σύμφωνα με Brézis and Strauss[1973], Barbu[1976], Neittaanmäki and Tiba [1984 IV], έχουμε

$$\begin{aligned}
(p^*)' - \Delta p^* - \mu \in \partial g(y^*) &\qquad \text{στο } Q,\\
(\mu, z - y^*)_{L^\infty(Q)^* \times L^\infty(Q)} \geqslant 0 &\qquad \forall z \in L^\infty(Q),\ z(x,t) \in [a,b] \ \sigma.\pi. \text{ στο } Q,\\
p^*(x,T) = 0, &\qquad \text{στο } \Omega,\\
p^*(x,t) = 0, &\qquad \text{στο } \Sigma,\\
p^* \in \partial h(u^*) &\qquad \text{στο } Q.
\end{aligned}$$

Επίσης βλέπε Neittaanmäki and Tiba [1984 IV παρ.4], όπου μια διαφορετικού τύπου τοποθέτηση και συνθήκες βελτιστοποίησης δίνονται με λεπτομέρεια.

4.3 Προσεγγισιμότητα σε κυρτά προβλήματα ελέγχου

Τώρα θα συζητήσουμε την επίδραση των αριθμητικών προσεγγίσεων όταν εφαρμόζονται σε προβλήματα βέλτιστου ελέγχου. Θα θέλαμε να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ των βέλτιστων λύσεων των πραγματικών και των διακριτοποιημένων προβλημάτων. Για το σκοπό αυτό, η βιβλιογραφία δεν είναι πολύ πλούσια, ωστόσο υπάρχουν διάφορες αξιοσημείωτες αναφορές όπως των Winther [1978, 1980], Malanowski [1982], Lasiecka [1980, 1984], Knowles [1982], Pawlow [1987, Ch.6], Mackenroth [1987], Roubicek and Verdi [1992]. Μια βασική ιδέα πίσω από αυτές τις προσεγγίσεις είναι η χρήση γνωστών ιδιοτήτων ομαλότητας βέλτιστου ελέγχου. Το σύστημα των συνθηκών βελτιστοποίησης θα παίξει σημαντικό ρόλο στις αποδείξεις. Στην περίπτωση των μη γραμμικών governing state συστημάτων, οι ιδιότητες ομαλότητας βέλτιστου ελέγχου ή της συζυγούς βέλτιστης μεταβλητής (adjoint optimal state) είναι πολύ ασθενείς για να εφαρμοστούν οι υπολογισμοί λάθους (Neittaanmäki and Tiba [1984 Ch III]). Συμπερασματικά, τα υπάρχοντα αποτελέσματα σχετίζονται κυρίως με τις ιδιότητες σύγκλισης των προσεγγιστικών λύσεων: Hackbusch [1979], Saguez [1980], Arnăutu [1980, 1982], Bonnans [1982], Arnăutu and Barbu[1985], Bermudez and Saguez [1985], Hoffmann and Sprekels [1984], Alt and Mackenroth [1984, 1989], Pawlow [1983, 1987], Roubicek [1990, 1991], Krabs and Lamp [1987], Tiba [1984, 1990b ChIV], Neittaanmäki and Tiba [1984], Tröltzsch [1987, 1992].

Στη πρώτη ενότητα θα εξετάσουμε την προσεγγισιμότητα των προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου έχοντας ως συνθήκη κυρτό συναρτησιακό (control constrained convex control problems) - συμπεριλαμβανομένων και των γραμμικών (linear state) εξισώσεων. Οι επόμενες ενότητες έχουν σχέση με τη διακριτοποίηση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου συμπεριλαμβανομένων διαφόρων ανισοτήτων και χωρίς σύνορο (free boundary) συστημάτων μαζί με την σχετική θεωρία σύγκλισης. Στην τελευταία ενότητα θα συζητήσουμε κάποιες εφαρμογές.

Επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε ένα κλασικά κατανεμημένο (standard distributed) πρόβλημα ελέγχου με σημειακούς περιορισμούς ελέγχου (point-wise control constraints):

$$\text{Minimize}\left\{\frac{1}{2}\int_Q (y-\hat{y})^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q u^2 dxdt\right\} \tag{4.39}$$

με $u(t,x) \geq 0$ σχεδόν παντού στο Q και

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x_i}\right) + a_0(x)y(x,t) = f(x,t) + u(x,t) \tag{4.40}$$

στο Q,

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x_j}\cos(n,x_i) = g(x,t) \text{ στο } \Sigma, \tag{4.41}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \text{ στο } \Omega. \tag{4.42}$$

Όπου Ω είναι ένα φραγμένο ομαλό χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times [0,\mathrm{T}]$, α_0, $\alpha_{ij} \in C^\infty(\Omega)$ με $\alpha_{ij}(x) = \alpha_{ji}(x)$ και για κάποιο

$\rho_0 > 0$, έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \rho_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \forall x \in \Omega.$$

Σε εφαρμογές της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων, η λύση του προβλήματος (4.40)-(4.42) είναι εφικτή με τη ασθενή έννοια (weak sense):

$$\left(\frac{\partial y(t)}{\partial t}, \varphi\right) + \alpha\left(y(t), \varphi\right) = \left(f(t) + u(t), \varphi\right) + \left(g(t), \varphi\right) \qquad (4.43)$$

$\forall \varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, για σχεδόν παντού $t \in [0, \mathrm{T}]$.

Όπου $(\cdot, \cdot)$ είναι η αντιστοίχιση μεταξύ του $\mathrm{H}^1(\Omega)$ και του δυϊκού του (ή του βαθμωτού γινομένου στον $L^2(\Omega)$) και

$$a(y, \varphi) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial y(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + \alpha_0(x) y(x) \varphi(x) \right\} dx.$$

Εδώ, η $g(t, \cdot)$ ορίζει ένα στοιχείο από τον $\mathrm{H}^1(\Omega)^*$ σύμφωνα με το τύπο

$$(g(t), \varphi) = \int_\Gamma g(t) \varphi d\Gamma$$

και το θεώρημα ίχνους (trace theorem). Τότε, αν $f \in L^2(Q)$, $u \in L^2(Q)$, $g \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)$, $y_0 \in H^1(\Omega)$, τότε η εξίσωση (variational equation) (4.42), (4.43) έχει μια μοναδική λύση $y \in H^{2,1}(Q)$ σύμφωνα με τους Neittaanmäki and Tiba[1994,Ch.II-2.2], δηλαδή, σ'αυτήν την περίπτωση η ασθενής λύση έχει τις περισσότερες ιδιότητες ομαλότητας.

Εφόσον το συναρτησιακό κόστους (cost functional) είναι πιεστικό (και αυστηρώς κυρτό), προκύπτει η ύπαρξη ενός μοναδικού βέλτιστου ζεύγους $[\bar{y}, \bar{u}]$ – και Neittaanmäki and Tiba[1994,Ch.IV-1]. Επιπλέον, υπάρχει ένα $\bar{p}$ (adjoint optimal state) τέτοιο ώστε να ικανοποιείται το ακόλουθο σύστημα βέλτιστων συνθηκών:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}\right) - a_0\bar{p} = \bar{y} - \hat{y} \text{ στο Q}, \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} = 0 \text{ στο } \Sigma, \tag{4.45}$$

$$\bar{p}(x,T) = 0 \text{ στο } \Omega, \tag{4.46}$$

$$\bar{p}(x,t) \in \bar{u}(x,t) + \partial I_{\mathrm{K}}(\bar{u}(x,t)) \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega. \tag{4.47}$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει την καλούμενη αρχή μεγίστου (maximum principle) και το ∂I_{K} συμβολίζει το υποδιαφορικό δείκτριας συνάρτησης (indicator function) του κλειστού κυρτού κώνου $\mathrm{K} \subset L^2(Q)$,

$$\mathrm{K} = \left\{ v \in L^2(Q); v(x,t) \geq 0 \text{ σχεδόν παντού στο Q} \right\}. \tag{4.48}$$

Η σχέση (4.47) μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί ως εξής

$$\bar{u} = (I + \partial I_{\mathrm{K}})^{-1}(\bar{p}) = \mathrm{P}_{\mathrm{K}}(\bar{p}), \tag{4.49}$$

όπου $\mathrm{P}_{\mathrm{K}} : L^2(Q) \to \mathrm{K}$ είναι ο μη γραμμικός τελεστής προβολής σύμφωνα με τους Neittaanmäki and Tiba[1994,Ch.II-Thm1.18-Example 1.26]. Σ'αυτήν την περίπτωση είναι

$$\mathrm{P}_{\mathrm{K}}(\bar{p})(x,t) = \sup\left(\bar{p}(x,t), 0\right) \text{ σχεδόν παντού στο Q}. \tag{4.50}$$

Καθώς ο $H^1(Q)$ είναι lattice–Neittaanmäki and Tiba[1994,Ch.II-1] (πλέγμα), από τις σχέσεις (4.48)-(4.50) και την μέγιστη ομαλότητα του $\bar{p}$ ως λύση στο (4.44)-(4.45), συμπεραίνουμε ότι $\bar{u} \in H^1(Q)$. Πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι λόγω απουσίας περιορισμού ελέγχου, η ομαλότητα του $\bar{u}$ είναι μέγιστη (όπως και του $\bar{p}$ σ'αυτήν την περίπτωση).

Τελικώς εξασφαλίζουμε ότι η επιλογή $\bar{z}(x,t) \in \partial I_{\mathrm{K}}(\bar{u}(x,t))$ σχεδόν παντού στο Q, η οποία ικανοποιεί την ισότητα (4.47), $\bar{z}(x,t) = \bar{p}(x,t) - \bar{u}(x,t)$ σχεδόν παντού στο Q, είναι επίσης ομαλή: $\bar{z} \in H^1(Q)$. Αυτές οι ιδιότητες ομαλότητας για τα $\bar{u}, \bar{z}$ είναι θεμελιώδεις στη συνέχεια εφόσον εξασφαλίζουν την εγκυρότητα των υπολογισμών σύμφωνα με την πεπερασμένης διάστασης γραμμική παρεμβολή (Neittaanmäki and Tiba[1994,Ch.III-1]). Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιούμε το μη γραμμικό τελεστή προβολής P_{K} μόνο για να εξασφαλίσουμε την ομαλότητα των παραμέτρων $\bar{u}, \bar{z}$.

Για να διακριτοποιήσουμε το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, αντικαθιστούμε το Ω από ένα πολυεδρικό χωρίο παραλείποντας το σχετικό σφάλμα. Προσεγγίζουμε την state equation με πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο και με πεπλεγμένη (implicit) μέθοδο Eyler για το χρόνο. Αν T_h είναι ένας διαχωρισμός του Ω σε πλέγμα μεγέθους $h > 0$ και $V_h \subset H^1(\Omega)$ είναι τα σχετικά πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο που αποτελούνται από τμηματικά συνεχείς γραμμικές συναρτήσεις, τότε η προσέγγιση Galerkin της (4.43) οδηγεί στην εύρεση της διανυσματικής απεικόνισης $y_h = \left(y_h^i\right)_{i=1,\ldots,m} \in V_h^{m+1}$ τέτοιας ώστε

$$\left(\frac{y_h^{k+1} - y_h^k}{\tau}, \varphi_h\right) + \alpha\left(y_h^{k+1}, \varphi_h\right) = \left(u_h^{k+1} + f_h^{k+1}, \varphi_h\right) + \left(g_h^{k+1}, \varphi_h\right), \tag{4.51}$$

$$\forall \varphi_h \in V_h, 0 \leq k \leq m-1,$$

$$y_h^0 = R_h y_0 \in V_h. \tag{4.52}$$

Όπου $\tau = \frac{T}{m}$ είναι η παράμετρος διακριτοποιήσης του χρόνου, $R_h : H^1(\Omega) \to V_h$ ο γραμμικός τελεστής παρεμβολής και τα u_h^i, f_h^i, g_h^i συμβολίζουν τις προσεγγίσεις των u, f, g στην i-οστή χρονική στιγμή, $i = 0, ..., m$. Αν g, u και f ορίζονται σημειακά τότε $g_h^i = R_h g(x, i\tau)$, $u_h^i = R_h u(x, i\tau)$, $f_h^i = R_h f(x, i\tau)$, διαφορετικά μπορούμε να πάρουμε

$$g_h^i = R_h \left[\frac{1}{\tau} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} g(\cdot, s) ds \right], u_h^i = R_h \left[\frac{1}{\tau} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} u(\cdot, s) ds \right],$$

$$f_h^i = R_h \left[\frac{1}{\tau} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} f(\cdot, s) ds \right].$$

Σημειώνουμε ότι, για τα παραπάνω θα θεωρήσουμε πως υπάρχουν κάποιες σταθερές $c, d > 0$ τέτοιες ώστε

$$ch^2 \leq \tau \leq dh^2, \forall h > 0, \tag{4.53}$$

η οποία είναι και ο λόγος που δεν αποδεικνύουμε την εξάρτηση από το χρόνο της παράμετρου διακριτοποίησης στον συμβολισμό μας από την (4.51).

Το συναρτησιακό κόστους διακριτοποιείται ως ακολούθως:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \tau \int_{\Omega} (y_h^k - \hat{y}_h^k)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \tau \int_{\Omega} (u_h^k)^2 dx, \tag{4.54}$$

όπου το $\hat{y}_h^k$ συνδέεται με το $\hat{y}$ με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω. Οπότε, η προσέγγιση του πεπερασμένης διάστασης βέλτιστου ελέγχου προβλήματος (4.39), που το συμβολίζουμε με $(\mathrm{P_h})$ καταλήγει στην ελαχιστοποίηση της (4.54) υπό τις (4.51), (4.52) και τους περιορισμούς ελέγχου

$$u_h^i(x) \geq 0, \quad i = 1, ..., m, \quad x \in \Omega. \tag{4.55}$$

Με αυτήν την επιλογή του V_h, η (4.55) είναι ισοδύναμη με την απαίτηση η u_h^i να είναι θετική σε κάθε κόμβο του T_h.

Θεώρημα 4.4 *Υπάρχει ένα μοναδικό βέλτιστο ζεύγος* $[\bar{y}_h, \bar{u}_h] \in V_h^m \times V_h^m$ *για το πρόβλημα* (P_h)*, το οποίο χαρακτηρίζεται από το ακόλουθο σύστημα βελτιστοποίησης:*

$$\left(\frac{\bar{p}_h^{k+1} - \bar{p}_h^k}{\tau}, \varphi_h\right) + \alpha\left(\bar{p}_h^k, \varphi_h\right) = \left(\bar{y}_h^{k+1} - \hat{y}_h^{k+1}, \varphi_h\right), \tag{4.56}$$

$$\forall \varphi_h \in V_h, k = 0, ..., m-1,$$

$$\bar{p}_h^m(x) = 0, \ \text{στο}\ \Omega, \tag{4.57}$$

$$\bar{p}_h^{k-1} \in \bar{u}_h^k + \partial I_{K \cap V_h}(\bar{u}_h^k) \ \text{στο}\ \Omega. \tag{4.58}$$

Η σχέση (4.58) είναι η διακριτή μορφή της αρχής του μεγίστου, ενώ οι (4.56), (4.57) δίνουν το διακριτό συζυγές σύστημα (discrete adjoint system).

Απόδειξη. Η ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης του διακριτού συστήματος μεταβλητών (4.51), (4.52) επιπρόσθετα για τις (4.56), (4.57) προκύπτει απο τη παράγραφο (4.1.2). Αν $[y_{h,\ell}, u_{h,\ell}]_{\ell \in N}$ είναι μια ακολουθία ελαχιστοποίησης, τότε είναι φραγμένη από τη πιεστικότητα του συναρτησιακού (4.54) και για τη u και για τη y. Τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι για μια υπακολουθία συμβολιζόμενη ξανά με ℓ, $u_{h,\ell}^k \to \tilde{u}_h^k$ ισχυρώς στον $L^2(\Omega)$, $y_{h,\ell}^k \to \tilde{y}_h^k$ ισχυρώς στον $L^2(\Omega)$, για $k = 1, ...m$. Αυτό είναι λόγω του πεπερασμένης διάστασης χαρακτήρα του $u_{h,\ell}^k \in V_h$, $y_{h,\ell}^k \in V_h$. Ουσιαστικά οι παραπάνω συγκλίσεις είναι ισοδύναμες με τις σημειακές συγκλίσεις στους κόμβους του

T_h. Οπότε, κάποιος μπορεί να μεταβεί στο όριο στην (4.51), (4.52) (συγκρίνοντας με την αλγεβρική μορφή της εξίσωσης state equation) (4.13 παρ. 4.1.2). Όλοι οι περιορισμοί ελέγχου ικανοποιούνται ξεκάθαρα από την $\tilde{u}_h$, βλέπουμε ότι $[\tilde{y}_h, \tilde{u}_h]$ είναι ένα αποδεκτό ζεύγος για το $(\mathrm{P_h})$. Προκύπτει ότι αυτή είναι βέλτιστη ως το όριο μιας ακολουθίας ελαχιστοποίησης και το ξανασυμβολίζουμε με $[\bar{y}_h, \bar{u}_h]$. Από την αυστηρή κυρτότητα του $(\mathrm{P_h})$, το βέλτιστο ζεύγος είναι μοναδικό και οι παραπάνω συγκλίσεις είναι έγκυρες χωρίς να πάρουμε υπακολουθίες.

Τώρα, ο ορισμός του $\bar{p}_h \in (V_h)^m$ από τις (4.56), (4.57) είναι ξεκαθαρός. Για να εξασφαλίσουμε την αρχή του μεγίστου (4.58) παρουσιάζουμε τη μεταβολή του $\bar{u}_h$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\tau\int_\Omega (\bar{y}_h^k - \hat{y}_h^k)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\tau\int_\Omega (\bar{u}_h^k)^2 dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\tau\int_\Omega (y_h^k - \hat{y}_h^k)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\tau\int_\Omega (u_h^k)^2 dx \end{aligned} \tag{4.59}$$

για κάθε ζεύγος $[y_h, u_h]$ που ικανοποιεί τις (4.51), (4.52), (4.55). Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε $u_h = \bar{u}_h + \lambda(v_h - \bar{u}_h)$ για κάθε $v_h \in (K \cap V^h)^m$ και για κάθε $0 \leq \lambda \leq 1$, σύμφωνα με τη κυρτότητα του K.

Με αυτή την επιλογή, και μετά από κάποιους υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι το $z_h = lim_{\lambda\to 0}\frac{y_h - \bar{y}_h}{\lambda}$ ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} &\left(\frac{z_h^{k+1} - z_h^k}{\tau}, \varphi_h\right) + a(z_h^{k+1}, \varphi_h) = (v_h^{k+1} - \bar{u}_h^{k+1}, \varphi_h), \\ &\qquad\qquad\qquad \forall \varphi_h \in V_h,\ k = 0, ..., m-1, \end{aligned} \tag{4.60}$$

$$z_h^0(x) = 0 \qquad \text{στο } \Omega. \tag{4.61}$$

Η ύπαρξη του ορίου είναι φανερό απο τον affine χαρακτήρα των (4.51), (4.52). Υπό τις (4.60), (4.61) μπορούμε να ξαναγράψουμε την (4.59) ως εξής

$$\sum_{k=1}^{m} \tau \int_{\Omega} z_h^k (\bar{y}_h^k - \hat{y}_h^k) dx + \sum_{k=1}^{m} \tau \int_{\Omega} (\upsilon_h^k - \bar{u}_h^k) \bar{u}_h^k dx \geqslant 0, \qquad \forall \upsilon_h^k \in (K \cap V_h)^m \; k = 1, ..., m. \tag{4.62}$$

Στη πραγματικότητα, έχουμε υπολογίσει το Gâteaux gradient του συναρτησιακού κόστους (4.54) στο σημείο $\bar{u}_h$ και στη κατεύθυνση $\upsilon_h - \bar{u}_h$ που δίνεται από το αριστερό μέλος της σχέσης (4.62). Μπορούμε να το ξαναεκφράσουμε σε μια πιο επωφελή μορφή χρησιμοποιώντας το διακριτό συζυγές σύστημα (4.56), (4.57). Παίρνουμε $\varphi_h = z_h^{k+1}$ στην (4.56) και αθροίζουμε για $k = 0, ..., m-1$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m-1} \tau \int_{\Omega} z_h^{k+1} (\bar{y}_h^{k+1} - \hat{y}_h^{k+1}) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \tau \left(\frac{\bar{p}_h^{k+1} - \bar{p}_h^k}{\tau}, z_h^{k+1} \right) - \sum_{k=0}^{m-1} \tau a(\bar{p}_h^k, z_h^{k+1}) = \\ &= -\sum_{k=0}^{m-1} \tau \left(\frac{z_h^{k+1} - z_h^k}{\tau}, \bar{p}_h^k \right) - \sum_{k=0}^{m-1} \tau a(\bar{p}_h^k, z_h^{k+1}) = \\ &= -\sum_{k=0}^{m-1} \tau (\upsilon_h^{k+1} - \bar{u}_h^{k+1}, \bar{p}_h^k). \end{aligned} \tag{4.63}$$

Παραπάνω έχουμε κάνει άθροιση κατά μέλη και έχουμε χρησιμοποιήσει τις (4.60), (4.61). Συνδυάζοντας τις (4.62) και (4.63) παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{m} \tau \int_{\Omega} (\upsilon_h^k - \bar{u}_h^k) \bar{u}_h^k dx - \sum_{k=1}^{m} \tau \int_{\Omega} (\upsilon_h^k - \bar{u}_h^k) \bar{p}_h^{k-1} dx \geqslant 0,$$

$$\forall \upsilon_h^k \in (K \cap V_h)^m, \; k = 1, ..., m.$$

Επιλέγοντας $\upsilon_h^k = u_h^k$ για όλους τους δείκτες εκτός από έναν, έχουμε

$$\int_\Omega (w_h - \bar{u}_h^k)\bar{u}_h^k dx - \int_\Omega (w_h - \bar{u}_h^k)\bar{p}_h^{k-1} dx \geqslant 0,$$
$$\forall w_h \in K \cap V_h \ k = 1, ..., m$$

το οποίο συμπληρώνει και την απόδειξη.

Παράδειγμα 4.1 Θεωρούμε το συνοριακό πρόβλημα ελέγχου

$$\min \left\{ J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |y - \hat{y}|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \frac{a}{2}\int_0^T |u|^2_{L^2(\Gamma)}\, dt \right\} \tag{4.64}$$

υπό τις συνθήκες

$$\frac{\partial}{\partial t}y - \Delta y = 0 \qquad \text{στο } Q, \tag{4.65}$$
$$\frac{\partial}{\partial n}y = u \qquad \text{στο } \Sigma, \tag{4.66}$$
$$y(x,0) = y_0(x) \quad \text{στο } \Omega. \tag{4.67}$$

Το ημιδιακριτό σύστημα που αντιστοιχεί στο (4.64) είναι

$$\min \left\{ J_h(u_h) = \frac{1}{2}\int_0^T |y_h - \hat{y}|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \frac{a}{2}\int_0^T |u_h|^2_{L^2(\Gamma)}\, dt \right\} \tag{4.68}$$

όπου $y_h(t) \in V_h$, $u_h \in U_{ad}^h$ =ο χώρος των ιχνών των συναρτήσεων από τον V_h, εφοδιασμένα με τη $L^2(\Gamma)$ νόρμα.

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{d}{dt}y_h, \upsilon_h\right)_{L^2(\Omega)} + a(y_h, \upsilon_h) = (u_h, \upsilon_h)_{L^2(\Gamma)} \text{ για όλα τα } \upsilon_h \in V_h,\ t > 0 \\ (y_h(0), \upsilon_h)_{L^2(\Omega)} = (y_0, \upsilon_h)_{L^2(\Omega)} \text{ για όλα τα } \upsilon_h \in V_h. \end{array} \right. \tag{4.69}$$

Ψάχνουμε ένα y_h της μορφής

$$y_h(x,t) = \sum_{i=1}^m Y_i(t)\varphi_i(x)$$

και ένα u_h της μορφής

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{m} U_i(t)\varphi_i(x)$$

όπου $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ είναι μια βάση του V_h. Υποθέτουμε ότι $\hat{y}(t) \in V_h$ ή, στη περίπτωση που αυτό δεν αληθεύει, αντικαθιστούμε το $\hat{y}$ με τη γραμμική παρεμβολή

$$\hat{y}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \hat{Y}_i(t)\varphi_i(x).$$

Επιπλέον, έστω $M = ((\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)})_{i,j=1}^m$ ο mass matrix, και $A = ((\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)_{L^2(\Omega)})_{i,j=1}^m$ συμβολίζει τον stiffness matrix.

Μπορούμε να ξαναγράψουμε το πρόβλημα (4.69) στην ισοδύναμη μορφή

$$\min_{\substack{U(t)\in\mathcal{U}\\ t\in[0,T]}} J(U) = \frac{1}{2}\int_0^T (Y(t) - \hat{Y}(t), M(Y(t) - \hat{Y}(t))) + \frac{a}{2}\int_0^T (U(t), BU(t)), \tag{4.70}$$

υπό τις συνθήκες

$$\begin{cases} M\frac{d}{dt}Y(t) + AY(t) = \hat{M}\hat{U}(t) \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \tag{4.71}$$

όπου $\mathcal{U} = \left\{U(t) \in \mathbb{R}^p \,|\, \; u_h(x,t) = \sum_{i=1}^p U_i(t)\varphi_i(x)\big|_{\partial\Omega} \in \mathcal{U}_{ad}^h\right\}$. Επιπλέον, $B = ((\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Gamma)})_{i,j\in I}$ είναι ο mass matrix ορισμένος στο $\partial\Omega$ και με I συμβολίζουμε το σύνολο των δεικτών των κόμβων του $\partial\Omega$ με τριγωνοποίηση T_h (για χάρη απλότητας υποθέτουμε ότι οι κόμβοι του $\partial\Omega$ έχουν αριθμηθεί πρώτα), $p = cardI$. Επιπλέον,

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{U}(t) = (U_1(t), ..., U_p(t), 0, ..., 0)\,.$$

Το πρόβλημα (4.70) είναι ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου που περιγράφεται από ένα γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των εξισώσεων στο (4.71) μπορεί να είναι πολύ μεγάλος. Σε γενικές γραμμές κάποιος μπορεί να εφαρμόσει έμμεσες μεθόδους (βασισμένες στις συνθήκες βελτιστοποίησης) ή άμεσες μεθόδους (βασισμένες σε τύπου-διαφορικού αλγορίθμους).

Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε μια άμεση μέθοδο για να λύσουμε το (4.70). Πριν το κάνουμε αυτό θα δώσουμε τις συνθήκες βελτιστοποίησης για το (4.70).

Πρόταση 4.1 *Η συνθήκη βελτιστοποίησης για το (4.70) είναι*

$$U_i(t) = -\frac{1}{a}\hat{P}_i(t),\ i \in I, \tag{4.72}$$

όπου $\hat{P}$ είναι η λύση του συζυγούς συστήματος

$$\begin{cases} -M\frac{d}{dt}\hat{P}(t) + A\hat{P}(t) = \hat{M}(Y(t) - \hat{Y}(t)),\ t \in (0,T] \\ \hat{P}(T) = 0 \end{cases} \tag{4.73}$$

και ο $Y(t)$ λύνει το (4.71).

Για την αριθμητική πραγματοποίηση είναι απαραίτητο επίσης να παράγουμε τη συνθήκη βελτιστοποίησης στη πλήρη διακριτή μορφή. Για να το καταφέρουμε αυτό θα διακριτοποιήσουμε τη χρονική παράγωγο στη (4.71) με την implicit μέθοδο Euler με χρονικό βήμα Δt:

$$\begin{cases} M\frac{Y^k - Y^{k-1}}{\Delta t} + AY^k = \hat{M}\hat{U}^k,\ k = 1, ..., N_T \\ Y^0 = Y_0, \end{cases} \tag{4.74}$$

όπου το $Y^k = (Y_1^k, ..., Y_m^k)$ συμβολίζει τη τιμή του $Y(t)$ στο k-οστό χρονικό σημείο και N_T συμβολίζει τον αριθμό των χρονικών βημάτων.

Το πλήρες διακριτό σύστημα που αντιστοιχεί στο (4.70) είναι

$$\min_{U \in \mathcal{U}} \left\{ J(U) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_T} (Y^k - \hat{Y}^k, M(Y^k - \hat{Y}^k)) + \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{N_T} (\hat{U}^k, \hat{M}\hat{U}^k) \right\} \tag{4.75}$$

όπου $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{N_T p}$ είναι το σύνολο των αποδεκτών ελέγχων και Y^k δίνεται από την (4.74).

Οι συνθήκες βελτιστοποίησης στη πλήρως διακριτή περίπτωση δίνονται από την

Πρόταση 4.2 *Οι συνθήκες βελτιστοποίησης για το (4.75) είναι*

$$U_i^k = -\frac{1}{a}\hat{P}_i^{k-1}, \ i \in I$$

όπου $\hat{P}^{k-1}$ είναι η λύση του συστήματος συζυγούς μεταβλητής τη χρονική στιγμή $k-1$:

$$\begin{cases} -M\frac{\hat{P}^{k-1}-\hat{P}^k}{\Delta t} + A\hat{P}^{k-1} = \hat{M}(Y^k - \hat{Y}^k), \ k = N_T, ..., 1 \\ \hat{P}^{N_T} = 0 \end{cases}$$

όπου ο Y^k λύνει το (4.74).

Σχετικά με τη σύγκλιση και την ακρίβεια των υπολογισμών έχουμε το

Θεώρημα 4.5 *Κάτω από τη υπόθεση (4.53), και ακολουθώντας τους υπολογισμούς για την απόσταση των βέλτιστων λύσεων των (4.39) και (P_h) ισχύει ότι:*

$$|\bar{y} - \bar{y}_h|_{L^2(Q)} = O(h^{\frac{1}{2}}).$$

Σημείωση 1. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του θεωρήματος (4.5) και ξανά τους υπολογισμούς για τις γραμμικές παραβολικές εξισώσεις μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς για το $|\bar{u} - \bar{u}_h|$ ή για τη διαφορά μεταξύ των βέλτιστων τιμών στα (4.39) και (P_h) και τις σχετικές συζυγείς μεταβλητές ελέγχου $|\bar{p} - \bar{p}_h|$.

Σημείωση 2. Μια προσέγγιση για τους υπολογισμούς λάθους στη διακριτοποίηση προβλημάτων βέλτιστου ελέγχου μπορεί να βρεθεί στην αναφορά Malanowski [1982].

Βιβλιογραφία

[1] Συρόπουλος Απόστολος. *"LATEX:ΕΝΑΣ ΠΛΗΡΗΣ ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑΣ LATEX"*. Παρατηρητής, 1998.

[2] Alt, W. and Mackenroth, U. "On the numerical solution of state constained coercive parabolic optimal control problems, in "Optimal control of partial differential equations", K.H. Hoffmann, W. Krabs (eds.)". *ISNM, Birkhauser Verlag, Basel*, 68:44–63, 1984.

[3] Alt, W. and Mackenroth, U. "Convergence of finite element approximation to state constrained convex parabolic boundary control problems". *SIAM J. Control Optim.* , 27(4):718–736, 1989.

[4] Arnãutu, V. "Charactirization and approximation of a class of nonconvex distributed control problems". *Mathematica*, 2:189–205, 1980.

[5] Arnãutu, V. "Approximation of optimal distributed control problems governed by variational inequalites". *Numer. Math.*, 38:393–417, 1982.

[6] Arnăutu, V. and Barbu, V. "Optimal control of the free boundary in a two-phase Stefan problems". Preprint Series in Mathematics 11, INCREST Bucharest, 1985.

[7] Aubin, J.P. *"Methodes explicites de l'optimisation"*. Dunod, Paris, 1982.

[8] Banichuk, N.V. *"Problems and methods of optimal structural design"*. Plenum Press, New York, 1983.

[9] Barbu, V. *"Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces"*. Noordhoff, Leyden, the Netherlands, 1976.

[10] Barbu, V. and Precupanu, Th. *"Convexity and optimization in Banach spaces"*. D. Reidel, Dordrecht, 1986.

[11] Bermudez, A. and Saguez, C. "Optimal control of variational inequalities". *Control and Cybernetics*, 14(1–3):9–30, 1985.

[12] Bonnans, J.F. "Application de methodes lagrangiennes en controle, analyse et controle de systemes distribues semi-lineares instables". These d'Etat de l'Universite de Technologie de Compiegne, 1982.

[13] Brézis, H. "Problems unilateraux". *J. Math. Pures et Appl.*, 51:1–168, 1972.

[14] Brézis, H. *"Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert"*. North Holland, Amsterdam-London, 1973.

[15] Brézis, H. and Strauss, W. "Semi-linear second-order elliptic equations in L^1". *J. Math. Soc. Jap.*, 25:565–590, 1973.

[16] Ciarlet, Ph.G. *"Introduction to numerial linear algebra and optimization"*. Cambridge University texts, Cambridge, 1989.

[17] Evans C. Lawrence. *"Partial Differential Equations"*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000. (Graduate Studies In Mathematics Volume 19).

[18] Fleming, W.H. and Rishel, R.W. *"Determenistic and stochastic optimal control"*. Springer Verlang, Berling, 1975.

[19] Hackbusch, W. "On the fast solving of parabolic boundary control problems". *SIAM J. Control Optim.*, 17:231–244, 1979.

[20] Hoffmann, K.H. and Sprekels, J. "Real time control in a free boundary problem connected with the continuous casting of steel, in "Optimal control of partial differential equations", K.H. Hoffmann, W. Krabs (eds.)". *ISNM, Birkhauser Verlag, Basel*, 68:127–143, 1984.

[21] Knowles, G. "Finite element approximations of parabolic time optimal control problems". *SIAM J. Control. Opt.*, 20:414–427, 1982.

[22] Krabs, W. and Lamp, U. "Numerical solution of time minimal control problems, in "Control for systems described by partial by par-

tial differential equations and applications", I. Lasiecka, R.Trigiani (eds.)". *LNCIS*, 97:265–274, 1987.

[23] Lasiecka, I. "Boundary control of parabolic systems:finite element approximation". *Appl. Math. Optim.*, 6:31–62, 1980.

[24] Lasiecka, I. "Ritz-Galerkin approximation of the time optimal boundary control problem for parabolic systems with Dirichlet boundary conditions". *SIAM J. Contr. Opt.*, 22:477–500, 1984.

[25] Lions, J.L. *"Contrôle optimal des systéms gouvernés par des équations aux deérivées partielles"*. Dunod, Paris, 1968.

[26] Lions, J.L. *"Quelques méthodes de résolution des problḿs aux limites non linéaires"*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[27] Mackenroth, U. "Numerical solution of some parabolic boundary control problems by finite elements, in "Control problems for systems described by partial differential equations and applications", I. Lasiecka, R. Triggiani (eds)". *LNCIS*, 97:325–335, 1987.

[28] Malanowski, K. "Convergence of approximations vs. regularity of solution for convex, control constrained, optimal control systems". *Appl. Math.Optim*, 8(1):69–96, 1982.

[29] Neittaänmaki P. and Tiba D . "On the finite element approximation of the boundary control for two-phase Stefan problems,

in "Analysis and Optimization of Systems," A. Bensoussan, J.L. Lions (eds.)". *LNCIS*, 62:356–370, 1984.

[30] Neittaänmaki P. and Tiba D. *"Optimal control of nonlinear parabolic systems : theory, algorithms, and applications"*. Marcel Dekker Inc., New York, 1994.

[31] Pawlow, I. "Variational inequality formulation and optimal control of nonlinear evolution systems governed by free boundary problems, in "Applied nonlinear functional analysis", R. Gorenflo, K.H. Hoffman (eds.)". *P.Lang Verlang, Frankfurt Main*, 1:213–250, 1983.

[32] Pawlow, I. "Analysis and control of evolution multi-phase problems with free boundaries". Polska Akademia Nauk, 1987.

[33] Rockafellar, R.T. *"Convex Analysis"*. Princeton Univ. Press, 1970.

[34] Roubicek, T. "Optimal control of a stefan problem with state-space constraints". Numerical Approximation, Numer. Math. 56, 1990.

[35] Roubicek, T. "A convergent computational method for constrained relaxed optimal control problems". *J. Optim. Th. Appl.*, 69:589–603, 1991.

[36] Roubicek, T. and Verdi, C. "A stable approximation of a constrained optimal control for continuous casting". *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 13:487–494, 1992.

[37] Saguez, Ch. "Controle optimal de systemes a frontiere libre". These d'Etat de l'Universite de Technologie de Compiegne, 1980.

[38] Tapia, R.A. *"The differentiation and integration of nonlinear operators in "Nonlinear functional analysis and applications""*. L.B. Rall(ed.), Academic Press, 45-101, New York - London, 1971.

[39] Tiba, D. "Subdifferentials of composed functions and applications in optimal control". *An. St., Al.I.Cusa, Iasi*, 23:381–386, 1977.

[40] Tiba, D. "Boundary control for a Stefan problem, in "Optimal control of partial differential equations", K.H. Hoffman, W. Krabs (eds.)". *Birkh*äuser, Basel, 1984.

[41] Tiba, D. *"Optimal control of nonsmooth distributed parameter systems"*. LNM 1459. Springer Verlang, 1990.

[42] Tröltzsch, F. "Semidiscrete finite element approximation of parabolic boundary control problems - convergence of switching points, in "Optimal Control of partial differential equations II"". *ISNM*, 78: 219–232, 1987.

[43] Tröltzsch, F. "On convergence of semidiscrete Ritz-Galerkin schemes applied to the boundary control of parabolic equations with nonlinear boundary conditions". *ZAAM*, 72: 291–301, 1992.

[44] Winther R. "Error estimates for a Galerkin approximation of a parabolic control problem". *Ann. Mat. Pura Appl.*, 107:173–206, 1978.

[45] Winther R. "Initial value methods for parabolic control problems". *Math. Comp.* , 34:115–125, 1980.

[46] Zalinescu, C. "On an abstract control problem". *Num. Funct. Anal. and Optimiz.*, 2:531–542, 1980.