

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ
ΕΡΓΑΣΙΑ

“Αεροακουστική Έρευνα στην
Βιομηχανία Αυτοκινήτων”

Καρατζάς Ευθύμιος
Μεταπτυχιακός Φοιτητής Τμήματος Μαθηματικών
Επιβλέπων καθηγητής: Δημ. Τσουμπελής

Τομέας Εφαρμοσμένης Ανάλυσης
Μαθηματικά των Φυσικών και Βιομηχανικών Εφαρμογών

Πάτρα, 2001

Αφιερώνεται
στην
οικογένειά
μου

Πρόλογος

Η διπλωματική αυτή εργασία έγινε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Πατρών και υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Δ. Τσουμπελή.

Επιθυμώ να εκφράσω θερμές ευχαριστίες στην οικογένειά μου που με στήριξε όλο αυτό το διάστημα με το καλύτερο τρόπο, και στον κ. Δ. Τσουμπελή για την κατανόηση και την υπομονή καθώς και τις εύστοχες υποδείξεις του, τόσο κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας, όσο και καθόλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Υποδείξεις και διδάγματα που μου στάθηκαν τόσο πολύτιμα και η προσφορά τους δεν μπορεί να εκφραστεί με λόγια. Τέλος θα ήταν μεγάλη παράλειψή μου, αν δεν ευχαριστούσα αρκετούς συναδέλφους φοιτητές που οι συζητήσεις μαζί τους με οδήγησαν σε γόνιμους προβληματισμούς, σχέψεις και μελέτη.

Η εργασία πραγματεύεται τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην μελέτη της παραγωγής και διάδοσης του ήχου. Καταρχήν εισάγουμε τις θεμελιώδεις ιδέες και αρχές της παραγωγής και διάδοσης του ήχου με παράλληλη αναφορά στην ιστορία των διάφορων ηχητικών προβλημάτων, με σκοπό να εισαγάγουμε τον αναγνώστη που έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με αυ-

τό το αντικείμενο, στη συγκεκριμένη ερευνητική περιοχή. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το βασικό μαθηματικό μοντέλο με το οποίο είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τον ήχο, καθώς και τα συνήθη μοντέλα ακουστικών πηγών. Επιπλέον αναλύεται πώς όλα τα παραπάνω βρίσκουν εφαρμογή στη βιομηχανία αυτοκινήτων και πιο συγκεκριμένα στις διάφορες αεροακουστικές έρευνες στο τομέα αυτό. Τέλος παρουσιάζεται το μοντέλο της ραδιοφωνικής κεραίας ενός οχήματος και του αεροδυναμικού ήχου που παράγεται απ' αυτήν. Ολοκληρώνουμε με την έκθεση κάποιων προβλημάτων που απασχολούν τους σημερινούς ερευνητές και την παράθεση εξειδικευμένης βιβλιογραφίας ώστε ο αναγνώστης που θα ενδιαφερθεί για την βαθύτερη μελέτη του αντικειμένου να μπορέσει να βρεί ένα δρόμο.

Πάτρα, Ιούνιος 2001

Ευθύμιος Καρατζάς

karmakis@master.math.upatras.gr

Περιεχόμενα

Πρόλογος	2
1 Εισαγωγή	6
2 Βασική ακουστική	15
3 Το μαθηματικό μοντέλο του ήχου	23
3.1 Εισαγωγή	23
3.2 Παραγωγή της εξίσωσης του Lighthill	24
3.3 Λύση της εξίσωσης του Lighthill	29
3.4 Επίδραση συνοριακών συνθηκών	34
4 Μοντέλα ακουστικών πηγών	38
4.1 Ακουστικό δυναμικό ταχύτητας	38
4.2 Διάδοση επίπεδων ηχητικών κυμάτων	41
4.3 Ένταση ήχου και ηχητική ισχύς	43
4.4 Μονόπολα - απλές σφαιρικές ηχητικές πηγές	44
4.5 Δίπολα	49
4.6 Τετράπολα - παράλληλα και διαμήκη	58

4.7	Η ανάλυση της λύσης της εξίσωσης του Lighthill σε μονόπολα, δίπολα και τετράπολα	62
4.8	Τα αποτελέσματα της παρουσίας στερεών σωμάτων στη ροή	63
4.9	Η θεωρία των Powell - Howe για τον ήχο που παράγεται από στροβιλισμό	66
5	Το μοντέλο της ραδιοφωνικής κεραίας	72
5.1	Εισαγωγή	72
5.2	Εξισώσεις του εκπεμπόμενου ήχου σε ένα μη περιορισμένο ρευστό	74
5.3	Ακίνητος κύλινδρος με συντονισμένη παραγωγή στροβίλων .	85
5.4	Ακίνητος κύλινδρος με μερικώς συντονισμένη παραγωγή στροβίλων	92
5.4.1	Οι εξισώσεις για τον εκπεμπόμενο ήχο	92
5.4.2	Εκπεμπόμενος ήχος με $\lambda \gg L$	96
6	Παρατηρήσεις - ανοιχτά προβλήματα	104
	Βιβλιογραφία	107

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η επιστήμη της ακουστικής αναπτύχθηκε ουσιαστικά τον δέκατο ένατο αιώνα. Θεμελιωτές της μπορεί να θεωρηθούν οι *Stokes* και *Rayleigh*. Οι ήχοι με τους οποίους ασχολήθηκαν αυτοί οι ερευνητές ήταν γενικά ευχάριστοι. Για παράδειγμα, μελέτησαν τους ήχους που παράγονται από ταλαντώμενες χορδές και από αυλούς εκκλησιαστικού οργάνου. Σήμερα οι περισσότεροι από τους ήχους μηχανολογικού ενδιαφέροντος είναι δυσάρεστοι και έχει γίνει μεγάλη ερευνητική προσπάθεια όσο αφορά τον ήχο που παράγεται από ισχυρά μηχανήματα και αεριοπροωθητικές μηχανές.

Όμως δεν ασχολείται η σύγχρονη ακουστική μόνο με τους δυσάρεστους θορύβους. Οι αρχιτέκτονες για παράδειγμα είναι αναγκαίο να μπορούν να σχεδιάσουν ένα δωμάτιο ή μία αίθουσα συναυλιών με καλές ακουστικές ιδιότητες. Επιπλέον, οι εταιρίες ήχου έχουν ανάγκη τη βελτίωση της απόδοσης ήχου, καθώς και την κατανόηση της λειτουργίας των διάφορων μουσικών οργάνων, ενώ ο ηχητικός εντοπιστής (*sonar*) χρησιμοποιείται ευρέως στην υποβρύχια ναυσιπλοΐα και ανίχνευση, και συνεχώς βελτιώνεται. Στην ια-

τρική η υπερηχητική χρησιμοποιείται για την παραγωγή “φωτογραφιών” σε διαυγές χαρτί ακτίνων X, δείχνοντας, για παράδειγμα την βλάβη κάποιας βαλβίδας στην καρδιά του ασθενή. Ακόμα, η υπερηχητική χρησιμοποιείται για τον έλεγχο διαφόρων κατασκευών και της λειτουργίας τους, όπως για παράδειγμα των πυρηνικών αντιδραστήρων οι οποίοι κάθε στιγμή ελέγχονται για ήχους που προδίδουν κάποια δυσλειτουργία ή ρωγμή, ενώ περνάνε από διάφορα υπερηχητικά τεστ για πτώση πίεσης στον αντιδραστήρα.

Γενικά η σύγχρονη ακουστική είναι ένα αντικείμενο με πολλές και ποικίλες εφαρμογές και οι περισσότερες βιομηχανίες έχουν σήμερα ομάδες μηχανολόγων-μαθηματικών ειδικευμένων στον έλεγχο θορύβων και ταλαντώσεων κάθε είδους.

Η αεροακουστική, που ασχολείται με τη δημιουργία και τη διάδοση του θορύβου εξαιτίας της ροής του αέρα, είναι ένας σχετικά νέος κλάδος σε σχέση με τα άλλα πεδία της μηχανικής.

Οι μελέτες γύρω από τέτοιες εφαρμογές, ουσιαστικά, άρχισαν όταν ο λόρδος *Rayleigh* έκδωσε το βιβλίο του *Theory Of Sound* (1877), [40], όπου εξετάζει μικρές διακυμάνσεις με χαρακτηριστικές συχνότητες στην ακουόμενη κλίμακα, στον αέρα και το νερό, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιότητες ομοιομορφίας. Γενικά, εκείνη την εποχή, στις πρώτες θεωρήσεις σχετικά με την ακουστική διέγερση αναφερόταν ότι οι ακουστικές διεγέρσεις είναι μηχανικής προέλευσης.

Με το κλείσιμο του 19ου αιώνα, λίγα είχαν μείνει να γίνουν στην ακουστική, όσον αφορά τα συνήθη μέσα και τις συνηθισμένες προϋποθέσεις-

συνθήκες. Ελάχιστες σημαντικές ιδέες παρουσιάστηκαν τα επόμενα πενήντα χρόνια και το διάστημα αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως περίοδος προσανατολισμού της ακουστικής στην μηχανική των ρευστών. Αξιοσημείωτη είναι η θεωρία του *Taylor* (1910) για την κατασκευή-δομή ενός αδύναμου κρουστικού κύματος (*weak shock wave*) και το άρθρο του *Fay* (1931) πάνω στα σταθερά (*stable*) περιοδικά μη γραμμικά κύματα μέσα σε ένα θερμο-ιξώδες (*thermo-viscous*) αέριο, όπου, όπως και στην λύση του *Taylor*, τα αδύναμα κρουστικά κύματα διαχωρίζουν ουσιαστικά τις ανιζωδικές ροές και αποκτούν μία δομή που οφείλεται στην ισορροπία μεταξύ μη γραμμικότητας εκ μεταφοράς και διάχυσης (βλέπε [9]).

Τα παραπάνω συμπεράσματα είναι θεμελιώδη στην μηχανική των ρευστών (αν και το άρθρο του *Fay*, [13], είναι ελάχιστα γνωστό έξω από τη κοινότητα της μη γραμμικής ακουστικής). Λίγα ακόμα τέτοια παραδείγματα εμφανίστηκαν στο τομέα της ακουστικής έως το 1950. Η ακουστική παρουσίασε ραγδαία πρόοδο από την χρονιά αυτή και μετά, αλλά σε γενικά πλαίσια διαφοροποιήθηκε σε περιοχές ολοένα και πιο απόμακρες από αυτές στα χρόνια του *Rayleigh*.

Θέματα όπως η μετάδοση του λόγου (*speech communication*), η φωνητική (*phonetics*), η φυσιολογική ακουστική (*physiological acoustics*), η ψυχοακουστική (*psychoacoustics*), η υπερηχητική¹ (*ultrasonics*), η φυσική ακουστική (*physical acoustics*) (ευρέως το συμπέρασμα του κύριου όγκου ιδιοτήτων στερεού υλικού από την μελέτη της διάδοσης σε στερεό

¹επιστήμη.

διατμητικών και συμπιεστικών κυμάτων (*shear and compression waves*), ο θόρυβος και η αντικειμενική και υποκειμενική ποσοτικοποίησή του, η διάδοση σήματος (*signal processing*) κ.τ.λ. ήρθαν στο προσκήνιο με την ακουστική, και συνεχίζουν να αποτελούν αντικείμενα εντατικής έρευνας. Όλα αυτά συντέλεσαν στο να εισχωρήσει η ακουστική στην φυσική, λειτουργώντας παράλληλα με τη μηχανική των ρευστών περισσότερο, παρά σαν κλάδος της. Ορισμένα μαθηματικά προβλήματα στη θεωρία της ακουστικής διάθλασης, ωστόσο, παρέμειναν καθόλη τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος, και αφού δεν υπήρξε κάποια εξέλιξη στη λύση τους οι έρευνες συνεχίστηκαν (ειδικά από το 1950 και έπειτα, αφού τότε δημιουργήθηκε και το πρώτο κατάλληλο ακουστικό μοντέλο).

Γενικότερα αυτή η κατάσταση έχει μετατραπεί τα τελευταία σαράντα χρόνια με την ανάπτυξη των αντικειμένων της αερο- και υδρο-ακουστικής.

Παραγωγή ήχου λόγω στροβιλώδους ροής. Σκοπός της αεροακουστικής θεωρίας είναι καταρχήν να παρέχει αξιόπιστες μεθόδους πρόβλεψης όσο το δυνατόν περισσότερων χαρακτηριστικών του ήχου που παράγεται από τυρβώδη ροή από την περιγραφή αυτής, και κατά δεύτερο λόγο (και πιο πρόσφατο), να παρέχει ένα πλαίσιο εργασίας για την επίλυση προβλημάτων μοντέλων συμπεριλαμβανομένης και της αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε απλές στροβιλώδεις και συμπιεστές κινήσεις με σκοπό αυτοί οι μηχανισμοί να είναι δυνατόν να διερευνηθούν λεπτομερώς.

Ο *Lighthill* (1952), [30], θεωρείται ο δημιουργός της αεροακουστικής θεωρίας και όρισε το πρότυπο των περισσότερων μεταγενέστερων θεωριών για

τη διατύπωση μιας αναλογίας μεταξύ της πραγματικής κατάστασης (π.χ. την δημιουργία της κύριας-ευρείας περιοχής θορύβου από τα καυσαέρια που προέρχονται από ένα υψηλής ταχύτητας αεριωθούμενο) και μιας απλής κλασικής ακουστικής κατάστασης στην οποία η τυρβώδης ροή δρά ως μια επιβαλλόμενη εξωτερική κατανομή πηγής με μια χαρακτηριστική δομή. Τέτοιες αναλογίες έχουν χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα για να επιλυθούν ορισμένα προβλήματα μοντέλων, καθώς ο απευθείας υπολογισμός των ασταθών, στροβιλωδών, συμπιεστών ροών μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο σε λίγες περιπτώσεις.

Η θεωρία του *Lighthill* είναι κατά πολύ η πιο επιτυχημένη και η πιο εφαρμόσιμη. Έχει χρησιμοποιηθεί ως βάση σε αμέτρητα μοντέλα, για την πρόβλεψη συνδυασμού θορύβου από αεροκινητήρα σε αεριωθούμενο και οριακού στρώματος (*boundary layer*) και θορύβου απορεύματος από διάφορα οχήματα. Επίσης έχει εφαρμοστεί σε θεωρίες της θερμότητας (εξαιτίας της διάχυσης της ενέργειας από αεροδυναμικώς παραγόμενα ακουστικά κύματα) του ηλιακού στέμματος.

Αν και αρχικά είχε δημιουργηθεί για υποηχητικές ροές, έχει επεκταθεί τόσο, ώστε να καλύψει ολόκληρο το φάσμα αριθμών $Mach^2$ που παρουσιάζουν μηχανολογικό ενδιαφέρον, και έχει γενικευτεί έτσι ώστε να συμπεριλάβει την επίδραση στερεού συνόρου, είτε σε ακινησία είτε σε αυθαίρετη κίνηση, και τα φαινόμενα που σχετίζονται με μη γραμμικά στοιχεία στην τύρβη-όπως τα μη γραμμικά στοιχεία λόγω θερμότητας, φυσαλίδων σε υγρά και σωματιδίων σκόνης μέσα σε αέρια (*Ffowcs Williams-1968, 1977,*

²Ο αριθμός *Mach* είναι ίσος με $\frac{U}{c} = \frac{\text{ταχύτητα ρευστού}}{\text{ταχύτητα του ήχου}}$ και είναι μέτρο της τάσης του ρευστού να συμπιέζεται καθώς συναντά μια κατασκευή.

Crighton-1975, *Goldstein-1976* -βλέπε [9]-). Η θεωρία του *Lighthill* έχει επίσης χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της εκπομπής ενέργειας από καθορισμένες ασταθείς ροές για τις οποίες μία ακριβής λύση είναι γνωστή μέσα στα όρια ασυμπίεστότητας, για αυτούς τους σκοπούς όμως δεν είναι ούτε η πιο αποτελεσματική ούτε και η καλύτερη τεχνική.

Πάρα πολλές επιλογές ακουστικών αναλογιών είναι δυνατές. Τρεις είναι όμως οι πιο δημοφιλείς. Αυτή των *Lighthill* (1952), [30], *Powell* (1964), [39], (αξιοσημείωτα επεκταμένη από τον *Howe* (1975), [23]) και *Ribner* (1962), [42], ενώ για υψηλούς αριθμούς *Mach* δύο άλλες αναλογίες προτάθηκαν από τους *Phillips* (1960) και *Lilley* (1976)-βλέπε *Goldstein* (1976), [20].

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η μελέτη παραγόμενων από ροή ακουστικών κυμάτων άρχισε με την θεωρία του *Gutin*, [22], σχετικά με την προπέλα-έλικα, που αναπτύχθηκε το 1937. Επίσης οι ιδέες του *Lighthill* επεκτάθηκαν στη συνέχεια από τους *Curle* (1955), [11], *Powel* (1960), [38], και *Ffowcs Williams* και *Hall* (1970), [15], ώστε να συμπεριληφθεί η επίδραση στερεών συνόρων. Αυτές οι επεκτάσεις περιλαμβάνουν την ανάλυση του *Gutin* και παρέχουν μια πλήρη θεωρία για τον αεροδυναμικά παραγόμενο ήχο η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη τόσο του θορύβου που προέρχεται από ένα έλασμα γενικότερα (πτερύγιο, λεπίδα κ.τ.λ.), όσο και του θορύβου ενός αεριορεύματος (αεριοπροωθητικής μηχανής, αεριοθούμενου κ.τ.λ.).

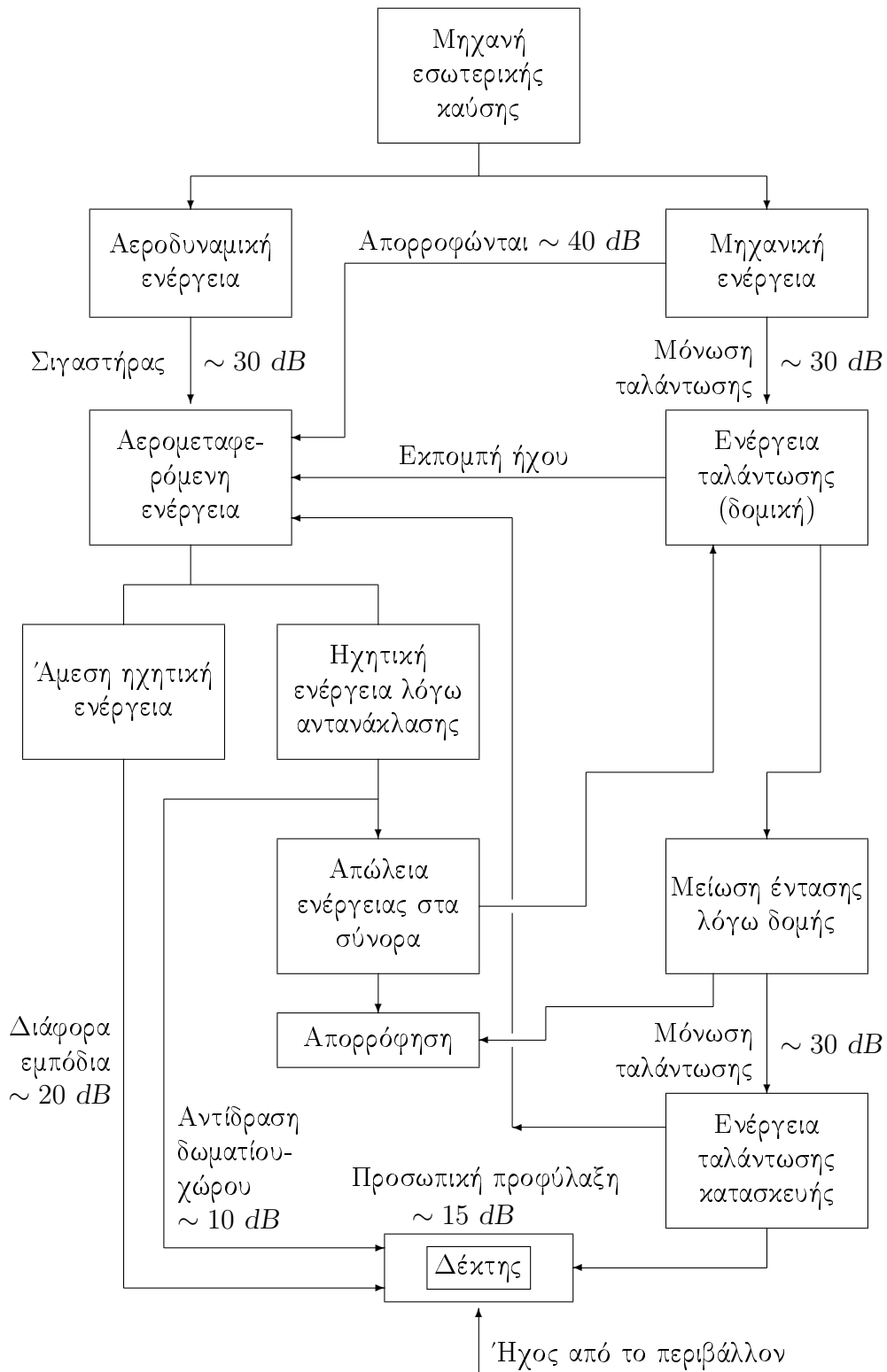
Επίσης πολλές εφαρμογές είναι δυνατόν να βρεθούν για τις μη ομογε-

νείς εξισώσεις (σχετικά με τον αεροδυναμικό ήχο). Κάθε μία από αυτές με το δικό της τρόπο θα αντιπροσωπεύει μία θεωρία παραγωγής ήχου λόγω στροβιλισμού. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η θεωρία του *Lighthill* είναι κατά πολύ η πιο επιτυχημένη στο να οδηγεί σε γενικά αποτελέσματα (ενώ για παράδειγμα η έκδοση των *Powell-Howe* παρέχει περισσότερο την δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων μοντέλων). Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι εκτός από την παραγωγή ήχου λόγω στροβιλώδους ροής η αεροακουστική καταπιάνεται και με την παραγωγή στροβιλωδών ροών λόγω ήχου, αλλά αυτός είναι άλλος κλάδος και δεν θα μας απασχολήσει.

Γενικά τα επόμενα χρόνια οι μελέτες εντατικοποιήθηκαν με σκοπό την επίλυση διαφόρων προβλημάτων ακουστικής, με περισσότερη εξειδίκευση όμως σε συγκεκριμένα προβλήματα, αφού είχαν δημιουργηθεί ικανές - γενικές θεωρίες (με μια από τις σημαντικότερες του *Lighthill*) ώστε να αποτελέσουν στήριγμα για τους διάφορους ερευνητές.

Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι και η μείωση του θορύβου του αυτοκινήτου που απασχόλησε πολλές μεγάλες βιομηχανίες. Πολυάριθμες έρευνες έγιναν με αποτελέσματα καθόλου ευκαταφρόνητα.

Έτσι καθώς ο θόρυβος μιάς μηχανής μειώθηκε, είτε λόγω καλύτερου σχεδιασμού είτε λόγω ηχητικής μόνωσης (βλέπε σχήμα 1.1), ο θόρυβος που παράγεται από την ροή αέρα πάνω στο σώμα αυτοκινήτου γίνεται σημαντικότερος. Επίσης εφόσον η ικανοποίηση κάποιου πελάτη συνδέεται με το πόσο ήσυχος είναι ο θάλαμος του επιβάτη, είναι ζωτικής σημασίας για την αυτοκινητοβιομηχανία να μειώσει ή να εξουδετερώσει όσο το δυνατόν



Σχήμα 1.1: Θόρυβος και ταλαντώσεις σε μία μηχανική πηγή ([33]).

περισσότερες πηγές θορύβου.

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζεται η γενική ιδέα και ορολογία της ακουστικής και επεξηγούνται κάποια πεδία της αεροακουστικής έρευνας στη βιομηχανία αυτοκινήτων που πρόσφατα ερευνηθήκαν (η ραδιοφωνική κεραία ως πηγή θορύβου). Παρουσιάζονται απλά αναλυτικά μοντέλα, συγκρίνονται με πειραματικά δεδομένα και επισημαίνονται ανάγκες βελτιώσεων και εμπλουτισμών για μελλοντική ερευνητική εργασία.

Πιο συγκεκριμένα εξετάζουμε αναλυτικά το συγκεκριμένο πρόβλημα της κεραίας, στο Κεφάλαιο 5, αφού παρουσιάσουμε τα βασικά στοιχεία της αεροακουστικής, Κεφάλαιο 2, και της θεωρίας του *Lighthill*, ειδικότερα στο Κεφάλαιο 3. Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζουμε τα μοντέλα ακουστικών πηγών που χρησιμοποιούνται, και συνδέονται με το μοντέλο του *Lighthill*, ενώ επίσης αναφερόμαστε και σε κάποιες βασικές αρχές της θεωρίας των *Powel-Howe* για τον ήχο που παράγεται από στροβιλισμό. Κλείνοντας στο Κεφάλαιο 6, επισημαίνουμε κάποια ανοιχτά προβλήματα που είναι διαθέσιμα για μελέτη και ερευνητική εργασία ώστε να βελτιωθεί και να εμπλουτιστεί το παραπάνω μοντέλο.

Κεφάλαιο 2

Βασική ακουστική

Ο ήχος, ως επιστημονική έννοια, είναι ένα (διαμήκης) κύμα πίεσης που διαδίδεται μέσω ενός ελαστικού μέσου με κάποια χαρακτηριστική ταχύτητα. Είναι η μεταφορά της κινητικής ενέργειας διαμέσου των μορίων και δεν μπορεί επομένως να διαδοθεί στο κενό. Για να υπάρχει αυτή η κίνηση κύματος, το μέσο πρέπει να χαρακτηρίζεται από ελαστικότητα και αδράνεια. Υπάρχουν δύο θεμελιώδεις μηχανισμοί σχετικά με την διάδοση του ήχου:

- i. Ταλάντωση στερεών σωμάτων (όπως είναι ο κινητήρας) που έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή και εκπομπή ηχητικής ενέργειας. Αυτός ο ήχος ονομάζεται ήχος παραγόμενος από κάποια κατασκευή-δομή (*structure-borne*).
- ii. Θόρυβος προερχόμενος από ροή αποτέλεσμα διακυμάνσεων της πίεσης που προκαλούνται από τυρβώδεις (*turbulent*) και ασταθείς (*unsteady*) ροές, ο οποίος ονομάζεται αεροδυναμικός ήχος.

Και στις δύο περιπτώσεις η ηχητική πίεση ικανοποιεί την κυματική εξίσωση: Για τον ήχο που προκαλείται από κάποια κατασκευή (*structure-borne*) η κυματική εξίσωση είναι ομογενής (εφόσον δεν υπάρχουν πηγές στο μέσο), ενώ για τον αεροδυναμικό ήχο η κυματική εξίσωση είναι μη ομογενής. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εστιάσουμε στον αεροδυναμικό ήχο.

Ο αεροδυναμικός ήχος προκαλείται από ένα φαινόμενο που ονομάζεται εκπομπή στροβίλων *Von Karman* (*Von Karman vortex-shedding*). Θα θεωρήσουμε αρχικά εκπομπή στροβίλων που προέρχεται από ένα κύλινδρο σε μία σταθερή υποηχητική ροή προς κατεύθυνση κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου. Ο αριθμός *Reynolds*¹ Re ορίζεται ως

$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

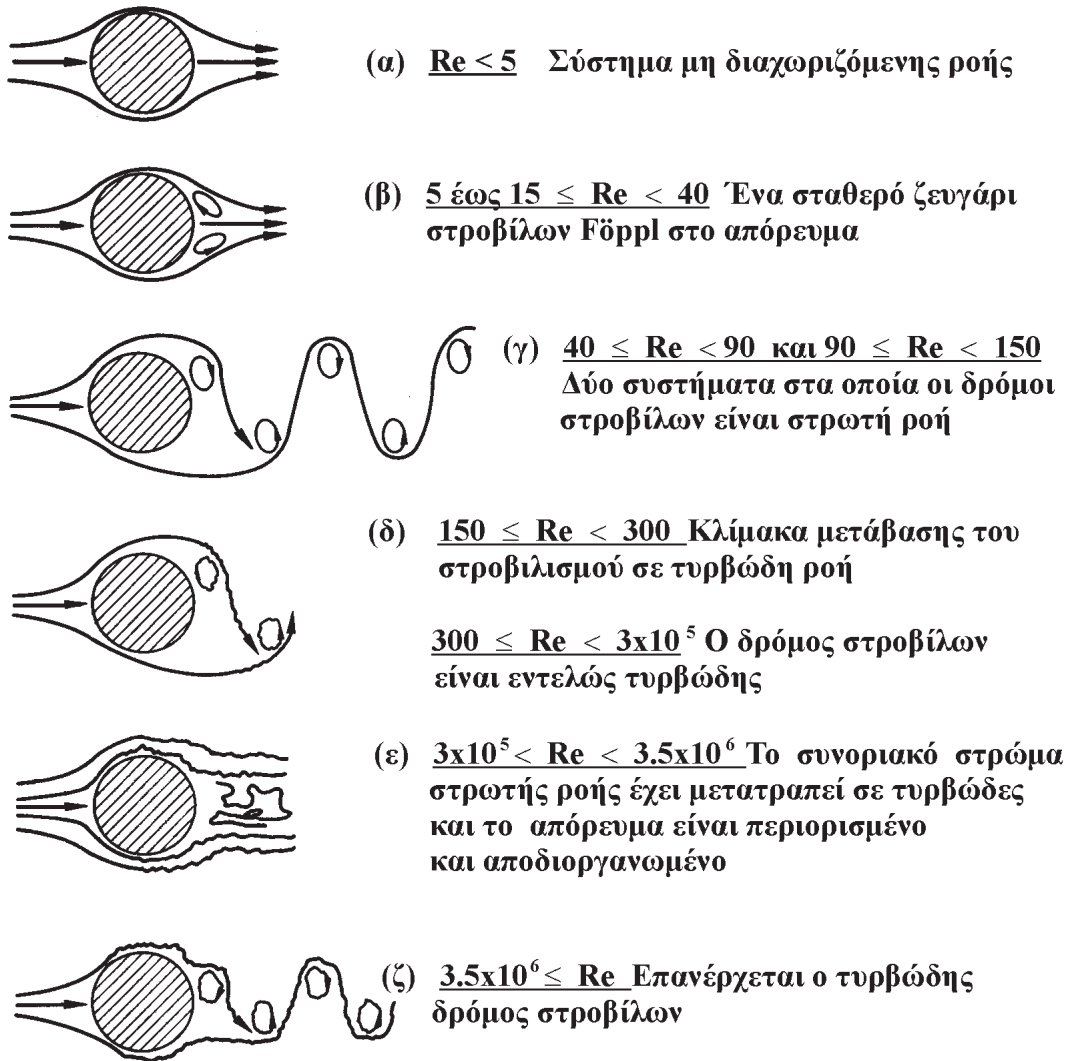
όπου U είναι η ενιαία ταχύτητα ροής, D είναι η διάμετρος του κυλίνδρου και ν το κινηματικό ιξώδες² του ρευστού. Σε πολύ χαμηλούς αριθμούς *Reynolds* για μικρότερους περίπου του $Re=5$, η ροή του ρευστού ακολουθεί το περίγραμμα του κυλίνδρου όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1 (α). Για την κλίμακα,

$$5 < Re < 40$$

η ροή διαφοροποιείται στο πίσω μέρος του κυλίνδρου και ένα συμμετρικό ζευγάρι στροβίλων σχηματίζεται στο απόρευμα (*wake*) όπως φαίνεται και

¹Στην ουσία είναι η αδρανειακή δύναμη προς την διατμητική τάση του ρευστού, και είναι μέτρο του πάχους του οριακού στρώματος και της μετατροπής ομαλής ροής σε τυρβώδη. Το είδος της ροής στο πίσω μέρος διαφόρων σωμάτων χαρακτηρίζεται από τον αριθμό Re , βλέπε [7].

²Ίσο με την απόλυτη τιμή του ιξώδους διαιρεμένο με την πυκνότητα του ρευστού.



Σχήμα 2.1: Συστήματα ροής ρευστού κατά μήκος κυλίνδρου.

στο σχήμα 2.1 (β). Καθώς ο αριθμός Re αυξάνεται περισσότερο το κύμα γίνεται ασταθές και έχουμε ως αποτέλεσμα μία περιοδική διέγερση και δημιουργία ασταθών στροβίλων αντίθετου προσήμου. Αυτό καλείται δρόμος στροβίλων (*vortex street*), και εμφανίζεται στο διάστημα

$$40 < Re < 150$$

σύμφωνα με το σχήμα 2.1 (γ). Καθώς ο Re συνεχίζει να αυξάνεται, η μεταβολή σε τύρβη συμβαίνει έως ότου ο δρόμος στροβίλων να είναι εντελώς τυρβώδης (*turbulent*), όπως συμβαίνει στο διάστημα

$$150 < Re < 3 \times 10^5$$

ενώ στη κλίμακα

$$3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^6$$

τριδιάστατα φαινόμενα διαταράσσουν την ομαλή διαδικασία στροβιλισμού, και το απόρευμα αποδιοργανώνεται, βλέπε σχήμα 2.1 (ε). Τέλος, για

$$Re > 3.5 \times 10^6$$

ο στροβιλισμός ομαλοποιείται ξανά, βλέπε σχήμα 2.1 (ζ). Το σχήμα 2.1 προέρχεται από τον *Lienard* (1966), για περισσότερες πληροφορίες στην αναφορά [7].

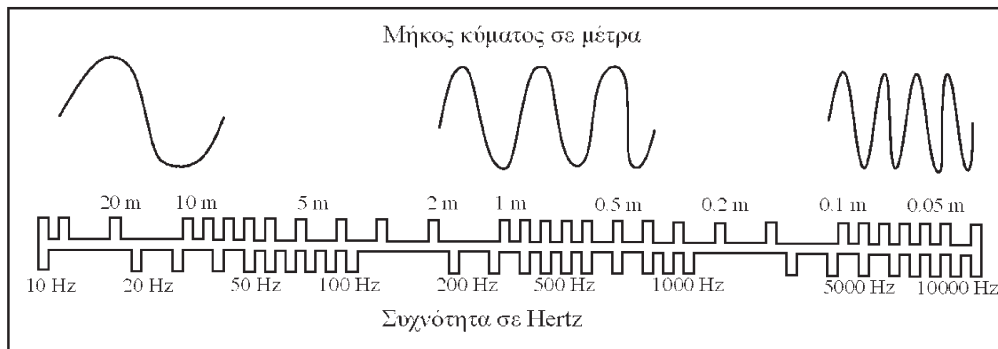
Εκπομπή στροβίλων από κατασκευές-δομές (*structures shed vortices*) σε υποηχητική ροή. Πρέπει να σημειωθεί πως ο δρόμος στροβιλισμού είναι παρόμοιος ανεξάρτητα της γεωμετρίας της κατασκευής. Καθώς οι στροβίλοι παράγονται, επιφανειακές πιέσεις ασκούνται

στην κατασκευή. Αυτές οι πιέσεις προκαλούν σε μία ελαστική κατασκευή ταλάντωση και παραγωγή αεροακουστικών ήχων. Αυτό το φαινόμενο έχει παρατηρηθεί ακόμα και στους αρχαίους χρόνους. Μάλιστα, αυτοί οι αεροακουστικοί ήχοι καλούνται Αιολικοί τόνοι, από την αρχαία Ελληνική άρπα (Αιολική) όταν αυτή ηχούσε στον άνεμο.

Όταν χρησιμοποιείται η λέξη “ήχος” όμως, εννοούμε κάτι περισσότερο σαφές από την παραπάνω περιγραφή: Εννοούμε κάθε μεταβολή πίεσης (στον αέρα, νερό ή άλλο μέσο) την οποία το ανθρώπινο αυτί μπορεί να αντιληφθεί, αυτός ο ορισμός θα χρησιμοποιείται στο εξής.

Ο αριθμός των μεταβολών της πίεσης ανά δευτερόλεπτο καλείται *συχνότητα του ήχου*, και μονάδα μέτρησής του είναι το *Hertz (Hz)*. Η συχνότητα του ήχου παράγει ένα χαρακτηριστικό τόνο, ο μακρινός κεραυνός ή το χτύπημα ενός τυμπάνου έχει χαμηλή συχνότητα, ενώ ένα σφύριγμα έχει υψηλή συχνότητα. Η συνηθισμένη κλίμακα ακοής εκτείνεται κατά προσέγγιση από 20 *Hz* έως 20000 *Hz* (ή 20 *kHz*), η χαμηλότερη νότα στο πιάνο είναι 27.5 *Hz* και η υψηλότερη 4186 *Hz*. Το ανθρώπινο αυτί είναι περισσότερο ευαίσθητο στο διάστημα των 1-5 *kHz*.

Το πιο γνωστό όργανο μετρήσεων μεταβολής της πίεσης είναι το βαρόμετρο. Οι μεταβολές της πίεσης στην ατμόσφαιρα είναι πάρα πολύ αργές ώστε να τις αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί, και επομένως δεν ανταποκρίνονται στον παραπάνω ορισμό. Ένα βαρόμετρο δεν μπορεί να ανταποκριθεί αρκετά γρήγορα σε απότομες μεταβολές της πίεσης και επομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση του ήχου.



Σχήμα 2.2: Σχέση μεταξύ μήκους κύματος σε μέτρα και συχνότητας σε *Hertz*.

Για ευκολία στις μετρήσεις και στους διάφορους υπολογισμούς η ταχύτητα του ήχου σε θερμοκρασία δωματίου θεωρείται ότι είναι σταθερή και ίση με 344 m/s.

Θυμίζουμε ότι

$$\text{Μήκος κύματος}(\lambda) = \frac{\text{Ταχύτητα του ήχου}}{\text{Συχνότητα}}$$

Στο σχήμα 2.2 είναι φανερό η σχέση μεταξύ μήκους κύματος σε μέτρα και συχνότητας σε *Hz*. Για παράδειγμα, στα 20 *Hz* το μήκος κύματος είναι περίπου 17 μέτρα, ενώ στα 20 *kHz* είναι μόνο 1.7 *cm*. Ένας ήχος ο οποίος έχει μόνο μια συχνότητα ονομάζεται *καθαρός τόνος (pure tone)*. Στην πράξη οι περισσότεροι ήχοι αποτελούνται από διαφορετικές συχνότητες. Ο βιομηχανικός θόρυβος αποτελείται από ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων, γνωστές ως *κύρια ή ευρεία περιοχή θορύβου (broad band noise)*. Αν οι συχνότητες είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στην ακουόμενη κλίμακα, ο ήχος καλείται

λευκός θόρυβος (*white noise*) (ακούγεται σαν ροή ορμητικού νερού).

Ο ήχος περιγράφεται απο δύο ποσότητες: την συχνότητα και το πλάτος των διακυμάνσεων της πίεσης. Ο ασθενέστερος ήχος που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί έχει πλάτος 20 εκατομμυριοστά του *Pascal* ($20\mu Pa$), όπου $1 Pa = 1 \text{ newton/m}^2$, ή

$$1 \text{ ατμοσφαιρική πίεση} \approx 101,000 \text{ Pa}$$

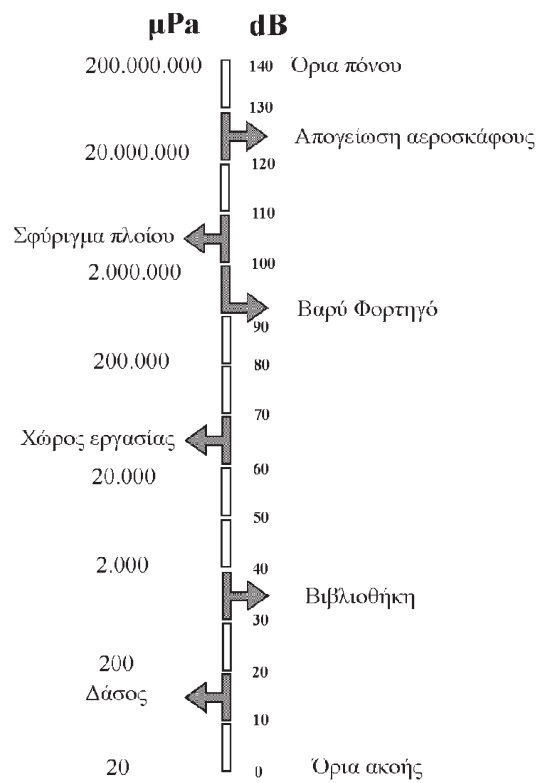
Μία αλλαγή πίεσης $20\mu Pa$ είναι τόσο μικρή που κάνει το τύμπανο του αυτιού να διεγερθεί κατά μια απόσταση μικρότερη απο τη διάμετρο ενός απλού μορίου υδρογόνου. Το αυτί μπορεί να ανεχτεί ηχητικές πιέσεις υψηλότερες από ένα εκατομμύριο της $20\mu Pa$. Οπότε αν μετρούσαμε τον ήχο σε *Pa* θα συναντούσαμε δυσκολίες αφού θα είχαμε να κάνουμε με αρκετά δύσχρηστους αριθμούς. Για να το αποφύγουμε αυτό, χρησιμοποιούμε μία άλλη κλίμακα - το *decibel* ή *dB* κλίμακα.

Ορισμός. Δύο μεταβλητές διαφέρουν κατά ένα *bel* αν η μία είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την άλλη, διαφέρουν κατά δύο *bel* (τρία *bel* κ.τ.λ.) αν η μία είναι 10^2 (10^3 , κ.τ.λ.) φορές μεγαλύτερη από την άλλη.

Το *bel* είναι πολύ μεγάλο σαν μετρική μονάδα και είναι πιο χρήσιμο αν το διαιρέσουμε σε δέκα μέρη, οπότε έχουμε το *decibel*:

Ορισμός. Δύο μεταβλητές διαφέρουν κατά ένα *decibel* ($1 dB$) αν ο λόγος τους είναι $10^{1/10}$, διαφέρουν κατά $2 dB$ ($3 dB$, κ.τ.λ.) αν ο λόγος τους είναι $10^{2/10}$ ($10^{3/10}$, κ.τ.λ.).

Σημειώνουμε ότι $10^{1/10} \approx 1.26$ και $10^{3/10} \approx 2$. Οπότε $3 dB$ αντιπροσωπεύουν διπλασιασμό της σχετικής ποσότητας (π.χ. ηχητική ισχύς).



Σχήμα 2.3: Συγκριτική κλίμακα των μPa και dB .

Στην τυπική κλίμακα συχνοτήτων το ανθρώπινο αυτί μπορεί να διακρίνει δύο ηχητικές εντάσεις αν διαφέρουν κατά $3 dB$.

Στο σχήμα 2.3 είναι φανερή η κλίμακα σύγκρισης των μPa και dB , και της έντασης του ήχου σε ορισμένα περιβάλλοντα.

Κεφάλαιο 3

Το μαθηματικό μοντέλο του ήχου

3.1 Εισαγωγή

Το μαθηματικό μοντέλο του αεροδυναμικά παραγόμενου ήχου αρχικά παρουσιάστηκε από την κλασική δουλειά του *Lighthill* το 1952, [30]. Ο βασικός του σκοπός είναι να εκφράσει όλα τα μη γραμμικά στοιχεία (*nonlinearities*) της κίνησης (φαινόμενα διάδοσης θερμότητας, τύρβη (*turbulence*), κ.τ.λ.) ως όρους στο δεξί μέρος της κυματικής εξίσωσης. Ο εκπεμπόμενος ήχος υπολογίζεται με αυτό τον τρόπο σαν να ήταν μέσα σε ομογενές μέσο με μία συνάρτηση πηγής στο δεξί μέλος.

Το μοντέλο του *Lighthill* αναφέρεται στον ήχο σε τρισδιάστατο πεδίο ορισμού χωρίς συνοριακές συνθήκες. Ο *Curle*, [11], επέκτεινε το μοντέλο ώστε να συμπεριλάβει την επίδραση στερεών συνόρων πάνω στο ηχητικό πεδίο.

Η δουλειά των *Lighthill*, [30], και *Curle*, [11], περιγράφεται επίσης και στα βιβλία των *Blevins*, [7], *Dowling-Williams*, [12], και *Norton*, [33].

3.2 Παραγωγή της εξίσωσης του Lighthill

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μάζας έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0, \\ \text{ή} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ανάλογα η αρχή διατήρησης της ορμής εκφράζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p &= \nu \nabla^2 \vec{u}, \\ \text{ή} \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(p \delta_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

(βλέπε [33]) όπου ν το κινηματικό (ή διατμητικό - *shear*) ιξώδες (*viscosity*) και

$$\tau_{ij} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

είναι η διατμητική τάση (ή επιφανειακή τάση λόγω ιξώδους-*viscous shear stress*)¹. Ο όρος $\rho u_i u_j$ καλείται ασταθής διατμητική τάση *Reynolds* (*unsteady - fluctuating Reynolds shear stress*) ενώ επίσης αναφέρεται και ως τανυστής ροής ορμής (ο ρυθμός-ταχύτητα με τον οποίο η ορμή στην x_i κατεύθυνση διαπερνά μοναδιαίο εμβαδό επιφάνειας στην x_j κατεύθυνση).

Η παραγωγή ως προς t της σχέσης (3.1) δίνει

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial^2(\rho u_i)}{\partial x_i \partial t} = 0. \quad (3.3)$$

¹Για λεπτομερέστερη ανάλυση ο αναγνώστης παραπέμπεται και στα βιβλία του κ. Καφούσια, [2].

Ανάλογα παίρνοντας την απόκλιση της (3.2) καταλήγουμε στην

$$\frac{\partial^2(\rho u_i)}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2(p\delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (3.4)$$

και αφαιρώντας την (3.4) από την (3.3), έχουμε

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2(p\delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho u_i u_j)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.5)$$

Στη συνέχεια γίνεται ο διαχωρισμός: $\rho = \rho_0 + \rho'$, όπου ρ_0 η σταθερή ως προς το χρόνο πυκνότητα, και ρ' οι διακυμάνσεις της πυκνότητας. Οπότε θα είναι και $\partial^2 \rho / \partial t^2 = \partial^2 \rho' / \partial t^2$ στην (3.5).

Επίσης πριν συνεχίσουμε στην παραγωγή της εξίσωσης του *Lighthill* είναι σημαντικό να γίνει αναφορά στην ταχύτητα του ήχου c και στη προσέγγιση $p \approx c^2 \rho'$, που θα θεωρηθεί στη συνέχεια.

Η διάδοση των ηχητικών κυμάτων στον αέρα γενικά δεν προκαλεί σημαντικές ανταλλαγές θερμικής ενέργειας μεταξύ των σωματιδίων, και η εντροπία του αερίου είναι σταθερή. Επιπλέον η θερμική αγωγιμότητα του αερίου είναι πολύ μικρή. Η διάδοση των ηχητικών κυμάτων μπορεί να θεωρηθεί επομένως σχεδόν αδιαβατική. Αυτή η υπόθεση ισχύει για μικρού μεγέθους ηχητικά κύματα μέσα στην ακουόμενη κλίμακα συχνοτήτων. Οποιαδήποτε απώλεια θερμικής ενέργειας θα είχε ως αποτέλεσμα την εξασθένηση των ηχητικών κυμάτων με το χρόνο και την απόσταση. Έτσι η καταστατική εξίσωση (σε αδιαβατική μεταβολή) για ένα ιδανικό αέριο είναι

$$P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma, \quad (3.6)$$

όπου γ ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων και P η πίεση (όμοια με την πυκνότητα έχουμε: $P = P_0 + p$).

Για αέρια τα οποία δεν είναι ιδανικά, η καταστατική εξίσωση μπορεί να παραχθεί από την ανάλυση σε σειρά *Taylor* μιας πειραματικά προσδιορισμένης ισεντροπικής σχέσης μεταξύ των διακυμάνσεων της πίεσης και της πυκνότητας. Με την προϋπόθεση πως αυτές οι διακυμάνσεις είναι μικρές, αυτή η σχέση είναι γραμμική και παίρνει τη μορφή (βλέπε και [27])

$$p = B \left\{ \frac{\rho'}{\rho_0} \right\}, \quad (3.7)$$

όπου B είναι μία σταθερά (*adiabatic bulk modulus*)

$$B = \rho_0 \left\{ \frac{\partial P}{\partial \rho} \right\}_{\rho_0}. \quad (3.8)$$

Η μερική παράγωγος στην εξίσωση (3.8) είναι υπολογισμένη για μία αδιαβατική διαδικασία και δηλώνει την αδιαβατική συμπίεση ή εκτόνωση του αερίου γύρω από την μέση πυκνότητα.

Αφού αντικατασταθεί η παραγωγή ως προς το χρόνο της αρχής διατήρησης της μάζας στην απόκλιση της αρχής διατήρησης της ορμής (λαμβάνοντας τους όρους δεύτερης τάξης ως αμελητέους, βλέπε και [33]) καταλήγουμε στην

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}, \quad (3.9)$$

ή, απαλείφοντας την ρ' με τη βοήθεια της σχέσης (3.7),

$$\nabla^2 p = \frac{\rho_0}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

Η εξίσωση (3.10) είναι η γραμμική, ομογενής ακουστική κυματική εξίσωση ως προς τις διακυμάνσεις της πίεσης p ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Η σταθερά c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και συνεπώς η ταχύτητα του ήχου

με

$$c = \left(\frac{B}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \right\}^{1/2}. \quad (3.11)$$

Μερικές χρήσιμες προσεγγίσεις μπορούν να γίνουν τώρα, σχετικά με την ταχύτητα του ήχου c θεωρώντας πως το μέσο διάδοσης του ήχου είναι ένα ιδανικό αέριο. Απο τη σχέση (3.6)

$$P = \frac{P_0 \rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}, \quad (3.12)$$

οπότε και

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\gamma P}{\rho}. \quad (3.13)$$

Έτσι η ταχύτητα του ήχου είναι

$$c = \left(\frac{\gamma P}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Επίσης αν αντικατασταθεί η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων $P = \rho R T_k$, όπου R είναι η σταθερά των αερίων και T_k η απόλυτη θερμοκρασία, στην σχέση (3.14)

$$c = (\gamma R T_k)^{1/2}, \quad (3.15)$$

και για μικρές διακυμάνσεις

$$c \approx c_0 \approx \left(\frac{\gamma P_0}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

Αυτή η προσέγγιση είναι πολύ σημαντική και χρήσιμη και θα χρησιμοποιηθεί στα επόμενα.

Σημειώνουμε ότι

$$c^2 \nabla^2 \rho' = c^2 \frac{\partial^2 (\rho' \delta_{ij})}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3.17)$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση στην (3.5) έχουμε

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho' = \frac{\partial^2 (p \delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho u_i u_j - c^2 \rho' \delta_{ij})}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.18)$$

οπότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την (3.5) στην μορφή

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.19)$$

η οποία είναι και η μη γραμμική, ιξώδης (*viscous*) μη ομογενής κυματική εξίσωση του *Lighthill* και T_{ij} είναι ο τανυστής τάσης του *Lighthill*

$$T_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_{ij} + \rho u_i u_j - c^2 \rho' \delta_{ij}. \quad (3.20)$$

Για τον υπολογισμό του T_{ij} σε ροές χαμηλών αριθμών *Mach* (βλέπε και [43]) έχουμε:

- $\rho u_i u_j$. Αυτός ο όρος του T_{ij} αναπαριστά την μετάδοση της ορμής ρu_i με ταχύτητα u_j και $\rho \approx \rho_0$.
- τ_{ij} . Παριστάνει τις τάσεις λόγω τριβής, οι οποίες θεωρούνται αμελητέες σε σχέση με τον όρο $\rho u_i u_j$.
- Τέλος ο όρος $(p - c^2 \rho') \delta_{ij}$ σχετίζεται με τις επιδράσεις της διάδοσης θερμότητας και θεωρείται πολύ μικρός σε σχέση με τον $\rho u_i u_j$

Οπότε προσεγγίζουμε το T_{ij} με

$$T_{ij} \approx \rho_0 u_i u_j. \quad (3.21)$$

3.3 Λύση της εξίσωσης του Lighthill

Μία λύση της κυματικής εξίσωσης

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \nabla^2 w = q(x, t) \quad (3.22)$$

σε τρισδιάστατο πεδίο ορισμού V δίνεται από την σχέση

$$w(x, t) = \int_V \frac{q(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} d^3x$$

Πράγματι παρατηρούμε (για αυθαίρετη f) -βλέπε και [12]- ότι:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \left(\frac{f(t-r/c)}{r} \right) dV &= \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{f(t-r/c)}{r} \right) dS & (3.23) \\ &= 4\pi \varepsilon^2 \left\{ -\frac{f(t-\varepsilon/c)}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial r}(t-\varepsilon/c) \right\} \\ &= -4\pi f(t) \quad \text{καθώς το } \varepsilon \rightarrow 0. & (3.24) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση που το ολοκλήρωμά της είναι μονάδα σε ένα πάρα πολύ μικρό χωρίο γύρω από την αρχή των αξόνων, ορίζεται να είναι η τριών διαστάσεων συνάρτηση δέλτα $\delta(x)$ (το x είναι διάνυσμα στις τρεις διαστάσεις), βλέπε και βιβλία κ. Τσουμπελή, [1].

$$\begin{aligned} \int_V \delta(x) dV &= 1 \quad \text{αν το } V \text{ περιλαμβάνει το } x = 0 \\ &= 0 \quad \text{διαφορετικά} & (3.25) \end{aligned}$$

π.χ. $\delta(x) = 0$ όταν $x \neq 0$, αλλά κοντά στο σημείο $x = 0$ είναι πολύ μεγάλο έτσι ώστε το ολοκλήρωμά του σε οποιοδήποτε χωρίο που περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων να είναι ίσο με μονάδα. Αν η (3.25) πολλαπλασιαστεί με $4\pi f(t)$ και συγκριθεί με την (3.24) βλέπουμε ότι

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \frac{f(t-r/c)}{r} = 4\pi f(t) \delta(x). \quad (3.26)$$

Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα, που θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για τον προσδιορισμό της λύσης διαφόρων προβλημάτων παραγωγής ήχου. Ξαναγράφοντας το δεξί μέλος της (3.22) ως

$$q(x, t) = \int_V q(y, t) \delta(x - y) d^3y \quad (3.27)$$

η εξίσωση (3.26) μας δίνει:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \frac{q(y, t - r/c)}{r} = 4\pi q(y, t) \delta(x - y) \quad (3.28)$$

όπου $r = |x - y|$. Η σχέση (3.28) ολοκληρώνοντάς τη γίνεται:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \int_V \frac{q(y, t - r/c)}{r} d^3y = 4\pi \int_V q(y, t) \delta(x - y) d^3y$$

και σύμφωνα με την (3.27)

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \int_V \frac{q(y, t - r/c)}{r} d^3y = 4\pi q(x, t)$$

ενώ από την (3.22) παίρνουμε

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{q(y, t - r/c)}{r} d^3y = w(x, t)$$

και τέλος έχουμε την λύση

$$w(x, t) = \int_V \frac{q(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x - y|} d^3x. \quad (3.29)$$

Παίρνοντας τη λύση

$$w_{ij}(x, t) = \int_V \frac{T_{ij}(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x - y|} d^3x \quad (3.30)$$

που αντιστοιχεί για $q = T_{ij}$ και παρατηρώντας πώς η $\partial^2 w_{ij} / \partial x_i \partial x_j$ είναι μια λύση που αντιστοιχεί στην (3.19) (αφού η $\partial^2 / \partial x_i \partial x_j$ στην

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t^2} - \nabla^2 w_{ij} = T_{ij} \quad (3.31)$$

δίνει

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \nabla^2 w_{ij} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

έχουμε

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την (3.19) καταλήγουμε στο ότι η παράσταση:

$$p(x, t) = \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} d^3y \quad (3.32)$$

είναι μια λύση της εξίσωσης (3.19) στο χωρίο V . Επίσης

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \frac{T_{ij}(y, t - r/c)}{r} d^3y &= \int_V \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{T_{ij}(y, t - r/c)}{r} \right\} d^3y \\ &= \int_V \frac{\partial r}{\partial x_i} \left\{ -\frac{1}{cr} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{r^2} T_{ij} \right\} d^3y \end{aligned}$$

αφού

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} \quad (3.33)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}(y, t - r/c)}{r} d^3y &= \\ = \int_V \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} + \frac{2}{cr^2} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} - \frac{2}{r^3} T_{ij} \right\} d^3y \quad (3.34) \end{aligned}$$

δηλαδή μεταφέροντας την διαφοροποίηση μέσα στο ολοκλήρωμα στην σχέση (3.32) έχουμε

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} d^3y + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \frac{2}{cr^2} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} d^3y \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \frac{2}{r^3} T_{ij} d^3y \equiv I_1 + I_2 + I_3 \quad (3.35) \end{aligned}$$

όπου $r = |x - y|$ και ο όρος $\partial^k T / \partial t^k$ είναι υπολογισμένος στο σημείο $(y, t - |x - y|/c)$.

Τα σχετικά μεγέθη των τριών όρων μέσα στα άγκυστρα της (3.33) είναι:

$$\frac{(n)^2 T_{ij}}{(2\pi)^2 c^2 r} : \frac{n T_{ij}}{2\pi c r^2} : \frac{2 T_{ij}}{r^3},$$

όπου n είναι η τυπική συχνότητα, και αφού $c = \lambda n$, όπου λ το μήκος κύματος η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} : \frac{\lambda}{2\pi r} : \frac{\lambda^2}{r^2},$$

και αν $r \gg \lambda$, ο πρώτος όρος κυριαρχεί και η εξίσωση (3.34) γίνεται τότε ίση με

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_V \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} \right] dy \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_V \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r^3} \left[\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} \right] dy \end{aligned}$$

συνεπώς ο όρος I_1 στην (3.34) είναι ένας όρος απόμακρου πεδίου, ενώ οι I_2 και I_3 είναι όροι εγγύς πεδίου.

Για μία ηχητική πηγή που αντιπροσωπεύει μόνο κάποια εξωτερικά εφαρμοσμένη δύναμη $f_i(x, t)$ (πιο συγκεκριμένα η συνάρτηση $f_i(x, t)$ αντιπροσωπεύει μία εξωτερικά εφαρμοζόμενη στο σώμα δύναμη ανά μονάδα όγκου, π.χ. ένα στερεό σώμα σε ροή), η f_i είναι ένα διάνυσμα στην i κατεύθυνση. Η εξίσωση της ορμής (θεωρούμε αμελητέες τις τάσεις λόγω τριβής) γίνεται

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = f_i(x, t), \quad (3.36)$$

(όπου P η ολική πίεση) η εξίσωση της διατήρησης της μάζας παραμένει όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.1), οπότε η μη ομογενής κυματική εξίσωση

γίνεται

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = -\frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_i} = -\text{div} f_i(x, t). \quad (3.37)$$

Ο όρος της πηγής στο δεξί μέρος της εξίσωσης (3.37) πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να μηδενίζεται έξω από κάποιο πεπερασμένο χωρίο γειτονικά της πηγής. Οπότε σε αναλογία με την σχέση (3.29) η λύση $p(x, t)$ είναι

$$p(x, t) = - \int_V \frac{\text{div} f_i(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} dy \quad (3.38)$$

ή

$$p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \frac{f_i(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} dy \quad (3.39)$$

Θα πρέπει να αναφέρουμε πως υπάρχουν και άλλοι τρόποι λύσης της εξίσωσης του *Lighthill*. Για παράδειγμα αυτή των *Ffowcs Williams* και *Hall* (1969), [15], οι οποίοι θεωρώντας τις επιδράσεις του ιξώδους αμελητέες², και ότι οι μεταβολές της p είναι ακριβώς ανάλογες με τις μεταβολές του $c^2 \rho$ με χρήση του γενικευμένου μετασχηματισμού *Fourier*:

$$f^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

κατάφεραν να μετατρέψουν την εξίσωση του *Lighthill* στην μη ομογενή εξίσωση *Helmoltz*:

$$\nabla^2 p^* + k^2 p^* = - \left[\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial y_i \partial y_j} \right]^*,$$

όπου $k = \omega/c$.

²Στην ουσία θέτοντας την p_{ij} ίση με $\rho \delta_{ij}$, όπου p είναι η ιστροπική πίεση του ρευστού.

3.4 Επίδραση συνοριακών συνθηκών

Επειδή η θεωρία του *Lighthill* είναι ακριβής είναι εύκολο να βρούμε τον ήχο που παράγεται από ξένα σώματα. Η θεωρία του *Lighthill* μας δείχνει ότι η παραγωγή ήχου είναι δυνατόν να περιγραφεί από όρους ενός ολοκληρώματος του T_{ij} , την τετραπολική πηγή του *Lighthill*. Όταν υπάρχουν ξένα σώματα στην ροή, είναι μερικές φορές χρήσιμο να ταξινομήσουμε σε ομάδες τα τετράπολα που κατανέμονται στο εσωτερικό των ξένων σωμάτων ως συνοριακές πηγές, οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν χωρίς ανάγκη για λεπτομερή γνώση της τάσης και του πεδίου ταλάντωσης μέσα σε τέτοια σώματα. Σκοπός μας είναι οπότε να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{T_{ij}(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} dV$$

στο εσωτερικό ενός ξένου σώματος σε όρους ολοκληρωμάτων πάνω στην επιφάνεια του σώματος.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση που το πεδίο ορισμού του ήχου (όγκος) V είναι περιορισμένο από ένα στερεό σώμα επιφάνειας S και εργαζόμαστε με τρόπο παρόμοιο του *Curle*, [11].

Καταρχήν θα ξαναγράψουμε τις παραγωγούς ως προς την θέση του παρατηρητή $\partial/\partial x_i$ σε όρους των παραγωγών ως προς τη θέση της πηγής y . Οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης μετατρέπουμε τα ολοκληρώματα σε επιφανειακά. Ξεκινώντας παρατηρούμε πως αφού η $|x-y|$ είναι μια

συμμετρική συνάρτηση των x και y :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{T_{ij}(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{|x-y|} \right\} = \frac{\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i}}{|x-y|} - \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \frac{T_{ij}(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{|x-y|} \right\} \quad (3.40)$$

Γράφουμε $|x-y| = r$ και υιοθετούμε το συμβολισμό οι αγκύλες $[\]$ να δηλώνουν πως η συνάρτηση που περιλαμβάνουν είναι υπολογισμένη στη θέση y και με καθυστέρηση χρόνου $t - r/c$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij} + \rho u_i u_j) = 0, \quad (\text{αρχή διατήρησης της ορμής})$$

όπου $p_{ij} = p\delta_{ij} - \tau_{ij}$, και τον ορισμό του $T_{ij} = \rho u_i u_j + p_{ij} - c^2 \rho' \delta_{ij}$ η (3.40) γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{T_{ij}}{r} \right] = - \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{\rho u_i u_j + p_{ij}}{r} \right] - c^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\rho'}{r} \right] - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) \right]. \quad (3.41)$$

Διαφορίζοντας την (3.41) ως προς x_j μας δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{T_{ij}}{r} \right] &= - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_j} \left[\frac{\rho u_i u_j + p_{ij}}{r} \right] - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left[\frac{\rho'}{r} \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

Η παραπάνω διαδικασία (σχέση (3.40)) μας οδηγεί στο ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) \right] &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y_j}(\rho u_j) \right] - \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) \right] \\ &= \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) \right], \end{aligned} \quad (3.43)$$

μετά απο χρήση της αρχής διατήρησης της μάζας³. Οπότε ακολουθεί:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{T_{ij}}{r} \right] &= - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_i} \left[\frac{\rho u_i u_j + p_{ij}}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) \right] \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right\} \left[\frac{\rho'}{r} \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

³ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0.$

Ο τελευταίος όρος της τελευταίας εξίσωσης είναι μηδέν διότι, για σταθερό y η συνάρτηση $[\rho(y, t - r/c)/r]$ είναι μια λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης στο σημείο (x, t) με την προϋπόθεση $r \neq 0$. Θεωρούμε πως τα x και y δεν συμπίπτουν, π.χ. ο παρατηρητής δεν είναι πάνω στο σώμα. Οπότε ολοκληρώνοντας τους εναπομείναντες όρους της εξίσωσης (3.44) σε ένα ακίνητο χωρίο V_0 , το οποίο είναι αρκετά μεγάλο ώστε να περιέχει το ξένο σώμα έχουμε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης, ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{V_0} \left[\frac{T_{ij}}{r} \right] dV = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S n_i \left[\frac{\rho u_i u_j + p_{ij}}{r} \right] dS \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho v \cdot n}{r} \right] dS \end{aligned} \quad (3.45)$$

όπου n το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα (το συνημίτονο κατεύθυνσης προς τα έξω -από το σώμα- κάθετο στην επιφάνεια S που περικλείει το ξένο σώμα). Όπως θα δούμε αναλυτικότερα και στο κεφάλαιο 4, αφού εξεταστούν τα διάφορα μοντέλα ακουστικών πηγών, το πεδίο τετραπόλων εσωτερικά του σώματος είναι ισοδύναμο με άθροισμα διπόλων και μονοπόλων. Και οι δύο αυτές πηγές είναι συγκεντρωμένες στην επιφάνεια του συνόρου S και η ισχύς του διπόλου (*dipole strength density*) είναι η τάση που εφαρμόζεται σ' αυτή την επιφάνεια, ενώ η ισχύς του μονόπολου ανά μονάδα επιφάνειας είναι η ροή μάζας (*mass flux*) που διαπερνά την επιφάνεια.

Αυτό το αποτέλεσμα επιτρέπει στην ακουστική αναλογία του *Lighthill* να εφαρμοστεί πάνω σε ένα περιορισμένο χωρίο V , που συνορεύει με μία ακίνητη επιφάνεια S , ώστε να δώσει την ακριβή έκφραση του πεδίου του

ήχου ως:

$$\begin{aligned} \rho'(x, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \left[\frac{T_{ij}}{r} \right] dV - \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_S n_i \left[\frac{\rho u_i u_j + p_{ij}}{r} \right] dS \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[\frac{\rho v \cdot n}{r} \right] dS. \end{aligned} \quad (3.46)$$

ή

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} dV + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{f_i(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} dS \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\rho \vec{u}(y, t - \frac{|x-y|}{c}) \cdot n}{4\pi |x-y|} dS \end{aligned} \quad (3.47)$$

όπου $f_i = -(\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) n_j$, και n_i η i -οστή συνιστώσα του n .

Ο πρώτος όρος είναι ακριβώς ο ίδιος με το δεξί μέρος της (3.32) και αντιπροσωπεύει την συνιστώσα ελεύθερης τύρβης (*free turbulence component*).

Ο δεύτερος όρος παριστάνει την συνιστώσα σχετικά με τις διακυμάνσεις των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα (*fluctuating body forces*).

Τέλος ο τρίτος όρος σχετίζεται με τις κινήσεις ταλάντωσης του στερεού σώματος ως αποτέλεσμα ασταθούς ροής, όπου \vec{u} είναι η ταχύτητα της επιφάνειας. Μόνο χαμηλών αριθμών *Mach* υποηχητικές ροές θα αναλυθούν στη συνέχεια, ενώ για αναλύσεις σχετικά με υπερηχητικές ροές μπορεί κανείς να αναφερθεί στους *Dowling* και *Ffowcs Williams*, [12], και *Goldstein*, [20].

Κεφάλαιο 4

Μοντέλα ακουστικών πηγών

4.1 Ακουστικό δυναμικό ταχύτητας

Χρησιμοποιώντας την διανυσματική θεωρία, βλέπε και [33], είναι δυνατόν να αποδειχτεί ότι η ακουστική ταχύτητα του σωματιδίου, \vec{u} , είναι αστρόβιλη (*irrotational*). Από την διανυσματική ανάλυση επίσης μπορεί ναδειχτεί ότι η διανυσματική συνάρτηση είναι το ανάδελτα μιας βαθμωτής συνάρτησης, αν η στρέψη της (*curl*) είναι το μηδενικό διάνυσμα, π.χ. για την βαθμωτή συνάρτηση ϕ , $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$.

Η στρέψη της εξίσωσης της ορμής είναι

$$\rho_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{u})}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} p) = 0 \quad (4.1)$$

και άρα

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0 \quad (4.2)$$

εφόσον (i) η p είναι μία βαθμωτή ποσότητα, και (ii) η σταθερά σχετικά με το χρονικό ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Η σταθερά πρέπει να είναι μηδέν εφόσον

οι ακουστικές ποσότητες θα εξαφανίζονται αν δεν υπάρχει κάποια ακουστική διέγερση. Η εξίσωση (4.2) επιβεβαιώνει ότι η ακουστική ταχύτητα του σωματιδίου, \vec{u} , είναι μη περιστροφική. Οπότε μπορεί να εκφραστεί ως το ανάδελτα μιας βαθμωτής συνάρτησης (αν μία διανυσματική συνάρτηση είναι το ανάδελτα μιας βαθμωτής συνάρτησης, η στρέψη της είναι το μηδενικό διάνυσμα-είναι μη περιστροφική). Συνεπώς εισάγουμε το ακουστικό δυναμικό ταχύτητας ϕ , και

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi \quad (4.3)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό. Η φυσική του ερμηνεία είναι ότι η ακουστική διέγερση σε ένα ανιζωδικό (*inviscid*) ρευστό δεν παράγει περιστρεφόμενη ροή (*irrotational flow*) - π.χ. δεν υπάρχουν οριακά στρώματα, διατμητικές τάσεις ή δεν παράγεται τύρβη. Όταν οι επιδράσεις του ιξώδους δεν είναι αμελητέες, η στρέψη της ταχύτητας του σωματιδίου δεν είναι μηδέν παντού και υπάρχει κάποια περιστροφική ροή. Για παράδειγμα, όταν ένας επίπεδος δίσκος διεγείρεται μηχανικά μέσα σε ροή ρευστού, εκτός από ήχο, παράγεται στην επιφάνεια του δίσκου και στροβιλώδης ροή (*Soria και Norton, [44]*). Τα φαινόμενα περιστροφής γενικά περιορίζονται κοντά στο σύνορο όμως διάφορες αλλαγές μπορούν να προκύψουν οι οποίες και ασκούν κάποια επιρροή στην διάδοση του ήχου.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.3) στην εξίσωση της ορμής¹ έχουμε

$$\vec{\nabla} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + p \right\} = 0 \quad (4.4)$$

Οι ακουστικές ποσότητες μέσα στις αγκύλες εξαφανίζονται αν δεν υπάρχει

¹Δηλαδή την εξίσωση $\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}p = 0$.

κάποια ακουστική διαταραχή, οπότε και η σταθερά ολοκλήρωσης πρέπει να είναι μηδέν και

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Αντικαθιστώντας το p στην κυματική εξίσωση² παίρνουμε

$$\nabla^2 \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right\}. \quad (4.6)$$

Αν ολοκληρώσουμε ως προς το χρόνο και αφού η ακουστική ποσότητα ϕ εξαφανίζεται αν δεν έχουμε κάποια ακουστική διέγερση η (4.5) είναι ισοδύναμη με την

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (4.7)$$

και το ϕ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση.

Θα ήταν χρήσιμο να σημειώσουμε ότι όταν συνιστώσες περιστροφικής ροής (π.χ. κοντινά σύνορα) πρέπει να ληφθούν υπόψη, ένα διάνυσμα δυναμικού ταχύτητας, $\vec{\psi}$, εισάγεται έτσι ώστε

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi}. \quad (4.8)$$

Ο πρώτος όρος ουσιαστικά αναπαριστάνει τις διακυμάνσεις της μη περιστροφικής ροής ενώ ο δεύτερος όρος τις διακυμάνσεις της περιστροφικής ροής.

Η υπόθεση του δυναμικού της ταχύτητας χρησιμοποιείται ευρέως στην ρευστοδυναμική όπου επιτυγχάνονται λύσεις για την ταχύτητα του σωματιδίου. Η ταχύτητα του σωματιδίου για την τρισδιάστατη κυματική εξίσωση είναι μία διανυσματική ποσότητα, ενώ η εισαγωγή του βαθμωτού δυναμικού

² Δηλαδή την εξίσωση $\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$.

της ταχύτητας επιτρέπει να λυθεί η κυματική εξίσωση ως προς ένα βαθμωτό μέγεθος. Οι “ακουστικοί”, γενικά χρησιμοποιούν την μεταβλητή της πίεσης η οποία είναι επίσης ένα βαθμωτό μέγεθος. Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι δυνατόν να συσχετιστεί με τις διακυμάνσεις της ακουστικής πίεσης μέσω του τύπου $\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0$ (αρχή διατήρησης της ορμής). Οπότε

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \phi = - \int \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p dt. \quad (4.9)$$

4.2 Διάδοση επίπεδων ηχητικών κυμάτων

Θεωρούμε ένα επίπεδο, μονοδιάστατο ηχητικό κύμα που διαδίδεται στην x -κατεύθυνση. Η μονοδιάστατη ομογενής κυματική εξίσωση είναι

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (4.10)$$

όπου $p = p(x, t)$. Η γενική λύση περιλαμβάνει κύματα που ταξιδεύουν και προς τις δύο κατευθύνσεις, την θετική και την αρνητική. Πιο συγκεκριμένα και σύμφωνα με την αναφορά [1], έχουμε

$$p(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t + kx)}. \quad (4.11)$$

Η ταχύτητα σωματιδίου, $u(x, t)$, και το δυναμικό ταχύτητας, $\phi(x, t)$, είναι δυνατόν να υπολογιστούν αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.11) στην (4.9).

Έτσι έχουμε

$$\vec{u}(x, t) = \left\{ \frac{A_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{A_2}{\rho_0 c} e^{i(\omega t + kx)} \right\} \vec{i}, \quad (4.12)$$

και

$$\phi(x, t) = -\frac{A_1}{i\rho_0 \omega} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{A_2}{i\rho_0 \omega} e^{i(\omega t + kx)}. \quad (4.13)$$

Η ταχύτητα σωματιδίου είναι μια διανυσματική ποσότητα και ο όρος έξω από τα άγκιστρα της εξίσωσης (4.12) είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, \vec{i} , στην κατεύθυνση του άξονα x . Πρέπει να σημειώσουμε ότι αφού μιγαδικοί αριθμοί έχουν παρουσιαστεί, οι ακουστικές μεταβλητές είναι επίσης μιγαδικοί αριθμοί. Θέτοντας

$$p_+ = A_1 e^{i(\omega t - kx)}, \quad p_- = A_2 e^{i(\omega t + kx)}, \quad (4.14)$$

έχουμε

$$\vec{u}(x, t) = \left\{ \frac{p_+}{\rho_0 c} - \frac{p_-}{\rho_0 c} \right\} \vec{i}, \quad (4.15)$$

και

$$\phi(x, t) = -\frac{p_+}{i\rho_0\omega} - \frac{p_-}{i\rho_0\omega}. \quad (4.16)$$

Στην ακουστική συνηθίζεται να θεωρούμε τα οδεύοντα κύματα (*traveling waves*) στην θετική κατεύθυνση, όταν αναφερόμαστε στην διάδοση των ηχητικών κυμάτων που απομακρύνονται από την πηγή σε κάποιο ελεύθερο πεδίο. Και τα δύο οδεύοντα κύματα (τα θετικά και τα αρνητικά) πρέπει να λαβαίνονται υπόψη όταν αναφερόμαστε σε διάδοση ηχητικών κυμάτων σε περιορισμένου-κλειστούς χώρους, όπως για παράδειγμα μέσα σε σωλήνες, αγωγούς, δωμάτια κ.τ.λ. Η εξίσωση (4.15) εκφράζει κάτι πολύ σημαντικό. Για ένα επίπεδο, αρμονικό οδεύον κύμα είτε στην θετική είτε στην αρνητική x -κατεύθυνση, οι διακυμάνσεις της ακουστικής πίεσης είναι σε φάση με τις ταχύτητες σωματιδίων. Η σχέση φάσης μεταξύ των δύο αυτών μεταβλητών είναι πολύ σημαντική για την κατανόηση σε βάθος της διάδοσης διαφορετικού τύπου ηχητικών κυμάτων.

4.3 Ένταση ήχου και ηχητική ισχύς

Δύο επιπλέον παράμετροι που παίζουν σπουδαίο ρόλο στην ακουστική είναι η ένταση ήχου και η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς.

Η ένταση του ήχου ορίζεται ως ο ρυθμός ροής της ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας η οποία είναι κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης. Από την βασική δυναμική, ισχύς = δύναμη \times ταχύτητα. Για μία ακουστική διαδικασία, η στιγμιαία ισχύς είναι

$$\Pi = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad (4.17)$$

όπου \vec{F} είναι το διάνυσμα της δύναμης που ασκείται πάνω σε ένα σωματίδιο και το \vec{u} σχετίζεται με την ταχύτητα του σωματιδίου. Η ισχύς ανά μονάδα κάθετη στην επιφάνεια είναι το διάνυσμα της στιγμιαίας έντασης του ήχου, \vec{I}' , με

$$\vec{I}' = p\vec{u} \quad (4.18)$$

Η μέση τιμή (ως προς το χρόνο)³ της ροής της στιγμιαίας ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας είναι το διάνυσμα της μέσης έντασης, \vec{I} , με

$$\vec{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p\vec{u} dt = \frac{1}{2} \text{Re}[p\vec{u}^*]. \quad (4.19)$$

Η δεύτερη παράσταση της (4.19) χρησιμοποιείται όταν οι διακυμάνσεις της ακουστικής πίεσης και οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι μιγαδικές αρμονικές μεταβλητές.

³Για ένα αυθαίρετο ηχητικό σήμα, $x(t)$, η μέση τετραγωνική τιμή σε χρόνο ίσο με την περίοδο, T , είναι $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$, ενώ η ρίζα μέσης τετραγωνικής τιμής (*root-mean-square value*) είναι $x_{rms} = \langle x^2 \rangle^{1/2}$.

Για ένα επίπεδο κύμα οδεύον προς την θετική x -διεύθυνση

$$p(x, t) = \text{Re}[A_1 e^{i(\omega t - kx)}] = \hat{p} \cos(\omega t - kx), \quad (4.20)$$

όπου \hat{p} είναι το πλάτος της πίεσης, και

$$u(x, t) = \text{Re}\left[\frac{A_1}{\rho_0 c} e^{i(\omega t - kx)}\right] = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c} \cos(\omega t - kx). \quad (4.21)$$

Η μέση ένταση του ήχου, I , προκύπτει με αντικατάσταση στον τύπο (4.19) και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα, οπότε

$$I = \frac{\hat{p}^2}{2\rho_0 c} = \frac{p_{rms}^2}{\rho_0 c}, \quad (4.22)$$

(βλέπε και [33]).

4.4 Μονόπολα - απλές σφαιρικές ηχητικές πηγές

Ο βιομηχανικός θόρυβος πολύ συχνά μοντελοποιείται από απλές πηγές. Το απλούστερο μοντέλο είναι το *μονόπολο* (*monopole*), μια σφαίρα η οποία πάλλεται εκπέμποντας ηχητικά κύματα που είναι συνάρτηση μόνο της ακτίνας (*radial distance*), r , από την πηγή. Οπότε πριν προχωρήσουμε σε οποιαδήποτε ανάλυση η κυματική εξίσωση πρέπει να μετατραπεί σε σφαιρικές συντεταγμένες. Σύμφωνα με την παράγραφο 4.2 η κυματική εξίσωση λύθηκε ως προς την μεταβλητή της πίεσης, και δόθηκε η σχέση με την ταχύτητα του σωματιδίου και το δυναμικό ταχύτητας. Παρακάτω, η κυματική εξίσωση θα λυθεί ως προς το δυναμικό ταχύτητας, και συνεπώς, αφού σχετίζεται (σχέση (4.9)), τις διακυμάνσεις της πίεσης και την ταχύτητα του

σωματιδίου. Μπορούμε δηλαδή να προσδιορίσουμε την πίεση p λύνοντας την κυματική εξίσωση

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\phi(r, t))}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.23)$$

(σφαιρική κυματική εξίσωση στην μία διάσταση) για το ακουστικό δυναμικό της ταχύτητας φ . Αντιπροσωπεύει τα προς κάθε κατεύθυνση κύματα που εκπέμπονται εσωτερικά ή εξωτερικά της πηγής. Ο παράγοντας $r\phi(r, t)$ συμπεριφέρεται σαν μια απλή μεταβλητή και η εξίσωση είναι της ίδιας μορφής με τα επίπεδα κύματα. Η γενική λύση ([1]) είναι

$$r\phi(r, t) = G_1(ct - r) + G_2(ct + r), \quad (4.24)$$

οπότε και

$$\phi(r, t) = \frac{G_1(ct - r)}{r} + \frac{G_2(ct + r)}{r}. \quad (4.25)$$

Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει ένα σφαιρικό ακουστικό κύμα που διαδίδεται ακτινωτά προς τα έξω της ηχητικής πηγής, ενώ ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει ένα σφαιρικό ακουστικό κύμα που διαδίδεται ακτινωτά προς τα μέσα της ηχητικής πηγής.

Στον μηχανολογικό θόρυβο και στην ανάλυση ταλαντώσεων, κάποιος γενικά θα ενδιαφερόταν μόνο για τα ηχητικά κύματα που απομακρύνονται από την πηγή. Οπότε, λαμβάνουμε υπόψη μόνο το πρώτο μέρος της παραπάνω λύσης. Καταρχήν, η συνάρτηση G_1 μπορεί να είναι οποιαδήποτε αυθαίρετη συνάρτηση, οπότε παίρνουμε $G_1(ct - r) = Ae^{i(\omega t - kr)}$, όπου $k = \omega/c$ και ω η κυκλική συχνότητα. Οπότε το φ έχει την μορφή

$$\phi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (4.26)$$

Ο όρος A είναι μία σταθερά η οποία προσδιορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες που καθορίζονται στην επιφάνεια του μονόπολου.

Θεωρούμε μία ταλαντώμενη σφαίρα ακτίνας α , με την κάθετη στην επιφάνεια ταχύτητα $u_a = U_a e^{i\omega t}$, όπου U_a το πλάτος της κάθετης ταχύτητας στην επιφάνεια μιας ταλαντώμενης σφαίρας. Από την εξίσωση (4.3), έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = u_r. \quad (4.27)$$

Αντικαθιστώντας την (4.26) στην (4.27) με $r = \alpha$ και λύνοντας ως προς A βρίσκουμε πως

$$A = -U_a \left\{ \frac{\alpha^2}{1 + ik\alpha} \right\} e^{ika}, \quad (4.28)$$

και συνεπώς

$$\phi(r, t) = -\frac{U_a}{r} \left\{ \frac{\alpha^2}{1 + ik\alpha} \right\} e^{i(\omega t - k(r - \alpha))}. \quad (4.29)$$

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε την ισχύ της πηγής, $Q(t)$. Η ισχύς πηγής ενός μονοπόλου ορίζεται ως εμβαδό επιφάνειας πολλαπλασιασμένη επί την ταχύτητα της επιφάνειας. Οπότε

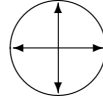
$$Q(t) = 4\pi\alpha^2 U_a e^{i\omega t} = Q_p e^{i\omega t}, \quad (4.30)$$

όπου Q_p είναι το πλάτος της ισχύος της πηγής. Έτσι για το δυναμικό ταχύτητας θα έχουμε

$$\phi(r, t) = -\frac{Q(t)}{4\pi r} \left\{ \frac{1}{1 + ik\alpha} \right\} e^{-ik(r - \alpha)}. \quad (4.31)$$

Επομένως οι διακυμάνσεις της ακουστικής πίεσης, $p(r, t)$ και η ταχύτητα σωματιδίου, $u(r, t)$, μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις (4.5) και (4.9) αντιστοίχως με

$$p = -\rho_0(\partial\phi/\partial t), \quad \text{και} \quad u(r, t) = \partial\phi/\partial r, \quad (4.32)$$



Σχήμα 4.1: Μονόπολο: ηχητική πηγή προς κάθε κατεύθυνση

ενώ η ένταση $I = p^2/(\rho c)$ (πρέπει να σημειώσουμε πως είναι συναρτήσεις του r). Οπότε

$$p(r, t) = -ik\rho_0 c \phi(r, t) = \frac{Q(t)}{4\pi r} \left\{ \frac{ik\rho_0 c}{1 + ik\alpha} \right\} e^{-ik(r-\alpha)}, \quad (4.33)$$

και

$$u(r, t) = - \left\{ \frac{1 + ikr}{r} \right\} \phi(r, t) = \frac{Q(t)}{4\pi r^2} \left\{ \frac{1 + ikr}{1 + ik\alpha} \right\} e^{-ik(r-\alpha)}. \quad (4.34)$$

Η ένταση του ήχου ενός σφαιρικού ηχητικού κύματος είναι δυνατόν τώρα να υπολογιστεί. Η μέση εκπεμπόμενη ένταση είναι μια πραγματική ποσότητα, υπολογίζεται από την εξίσωση (4.19) και είναι

$$I(r) = \frac{Q_p^2 k^2 \rho_0 c}{32\pi^2 r^2 (1 + k^2 a^2)} = \frac{Q_{rms}^2 k^2 \rho_0 c}{16\pi^2 r^2 (1 + k^2 a^2)}. \quad (4.35)$$

Η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς μιας σφαιρικής πηγής μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση⁴:

$$\Pi = \int_S \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

και είναι

$$\Pi = 4\pi r^2 I(r) = \frac{Q_{rms}^2 k^2 \rho_0 c}{4\pi(1 + k^2 a^2)}. \quad (4.36)$$

Το μονόπολο περιγράφεται σχηματικά στο σχήμα (4.1).

⁴Η ηχητική ισχύς, Π είναι το ολοκλήρωμα της έντασης σε κάποιο σημείο στο χώρο πάνω σε επιφάνεια κάθετη στη ροή της ηχητικής ενέργειας, βλέπε Norton, [33].

Οι αρχές που παρουσιάστηκαν σ' αυτή τη παράγραφο αποτελούν μία σημαντική βάση για την μοντελοποίηση των ηχητικών πηγών. Πολλές ηχητικές πηγές στην πράξη, όπως είναι τα ταλαντώμενα σώματα και οι αεροδυναμικές πηγές, είναι δυνατόν να προσεγγιστούν ως μονόπολα. Αν για παράδειγμα, η μονοπολική ηχητική πηγή ήταν αεροδυναμικής φύσης και όχι κάποιο ταλαντώμενο σώμα με μία ταχύτητα επιφάνειας, η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς θα μπορούσε τότε να συσχετιστεί με την μέση ταχύτητα ροής, τη μέση προσθαφαίρεση μάζας από μία περιοχή της πηγής. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να επανεξετάσουμε την εξίσωση (4.36). Η ισχύς της πηγής, Q_{rms} , μεταβάλλεται όπως το L^2U , όπου L είναι οι τυπικές διαστάσεις της περιοχής της ροής του ρευστού, όπως για παράδειγμα το πλάτος ενός τετράγωνου σωλήνα, και U η μέση ταχύτητα ροής. Η χαρακτηριστική συχνότητα στην ροή μεταβάλλεται όπως ο όρος U/L , και αυτό πρέπει να εξισώνεται με τη χαρακτηριστική συχνότητα της παραγωγής αεροδυναμικού ήχου - για διανυσματική ευστάθεια. Επίσης, η διάσταση της πηγής, a , θεωρείται ότι είναι πολύ μικρότερη από την γεωμετρική διάσταση, L , δηλαδή $a \ll L$. Οπότε

$$\Pi \approx \frac{L^4 U^2 \rho_0 c U^2}{4\pi L^2 c^2} \approx \frac{L^2 U^4 \rho_0}{4\pi c}. \quad (4.37)$$

Η εξίσωση (4.37) υποδηλώνει πως η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς από ένα αεροδυναμικώς παραγόμενο μονόπολο είναι ανάλογη της τέταρτης δύναμης της ταχύτητας ροής. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα και έχει σημαντικές πρακτικές συνέπειες οι οποίες θα συζητηθούν αργότερα σ' αυτό το κεφάλαιο εφόσον μελετηθούν και άλλοι τύποι ηχητικών πηγών, ώστε να μπορούν να γίνουν συγκρίσεις. Επίσης θα δειχτεί σε επόμενη παράγραφο

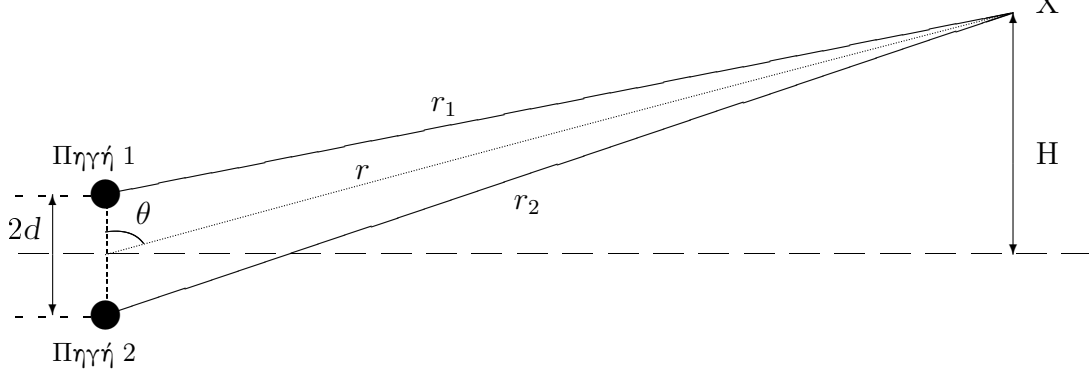
πως ο παραπάνω λόγος μεταβολής ισχύει μόνο για υποηχητικές ροές - όπου η μέση ταχύτητα ροής είναι μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου, c .

Μερικά παραδείγματα μονοπολικών ηχητικών πηγών που σχετίζονται με ταλαντώμενες κατασκευές-δομές είναι μικρές ηλεκτρικές μηχανές, αεραντλίες και συγκεκριμένοι τύποι θορύβου οδικής κυκλοφορίας (σε μέσες αποστάσεις μακριά από ένα απλό όχημα - σε μεγαλύτερες αποστάσεις η πηγή μπορεί μερικές φορές να εμφανίζεται ως δίπολο). Οι αεροδυναμικές μονοπολικές ηχητικές πηγές περιλαμβάνουν ασταθή ανάφλεξη σε ένα κλίβανο, σειρήνες, παλλόμενο ακροφύσιο (βαλβίδα) και σπηλαιώματα.

4.5 Δίπολα

Ένα δίπολο (*dipole*) είναι ένα μοντέλο ηχητικής πηγής το οποίο αποτελείται από δύο μονόπολα, ίδιας ηχητικής ισχύος πολύ κοντά το ένα με το άλλο, που πάλλονται με διαφορά φάσης μεταξύ τους 180° , και τα συμβολίζουμε $-ve$ και $+ve$. Εξαιτίας αυτής της εκτός φάσης ταλάντωσης παράγεται μεταβαλλόμενη δύναμη. Η συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας για ένα δίπολο είναι μία συνάρτηση της πολικής γωνίας θ , και επιπλέον της ακτίνας, r . Μπορεί να αναπαρασταθεί με την χωρική παράγωγο της συνάρτησης δυναμικού ταχύτητας ενός μονοπόλου.

Η ανάλυση των διπόλων με πεπερασμένες διαστάσεις είναι εκτενής και κουραστική. Πολυάριθμοι συνδυασμοί είναι δυνατοί, για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε *Pierce*, [37], ή *Reynolds*, [41]. Πολλές ηχητικές πηγές, συμπεριλαμβανομένου και των αεροδυναμικών διπολικών πηγών, είναι δυ-



Σχήμα 4.2: Σημειακό διπολικό μοντέλο - δύο σημειακά δίπολα στο χώρο σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους

νατόν να μοντελοποιηθούν ως σημειακά δίπολα, όπως για παράδειγμα όταν οι διαστάσεις της διπολικής πηγής είναι πολύ μικρές ($ka \ll 1$, όπου a η ακτίνα της ταλαντώμενης σφαίρας - διάσταση πηγής και k ο κυματαριθμός - *wavenumber*), και με αυτή την υπόθεση η ανάλυση απλοποιείται αρκετά. Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση της εκπομπής ήχου στο μακρινό πεδίο από σημειακές διπολικές ηχητικές πηγές. Οι αναλυτικές τεχνικές που θα αναφερθούν μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε περιπτώσεις και εγγύς πεδίου και μακρινού πεδίου εκπομπής ήχου από πεπερασμένων διαστάσεων διπολικές πηγές.

Θεωρούμε δύο σημειακά μονόπολα στο χώρο, που χωρίζονται από μικρή απόσταση $2d$ όπως παρουσιάζεται και στο σχήμα (4.2). Το ολικό δυναμικό ταχύτητας σε κάποιο σημείο, X , στο χώρο είναι το άθροισμα των δύο ξεχωριστών δυναμικών ταχύτητας

$$\phi(r, t) = \phi_1(r, t) + \phi_2(r, t). \quad (4.38)$$

Οι αποστάσεις της κάθε πηγής από το σημείο X , δίνονται από τις σχέσεις

$$r_1^2 = (r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta), \quad \text{και} \quad r_2^2 = (r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta). \quad (4.39)$$

Στο μακρινό πεδίο, $r \gg d$, οι παραπάνω γεωμετρικές σχέσεις είναι δυνατόν να απλοποιηθούν σε

$$r_1 \approx r - d \cos \theta, \quad \text{και} \quad r_2 \approx r + d \cos \theta. \quad (4.40)$$

Το δυναμικό ταχύτητας για ένα σημειακό μονόπολο προκύπτει από την σχέση (4.31) θέτοντας $ka \rightarrow 0$, και είναι

$$\phi(r, t) = -\frac{Q(t)}{4\pi r} e^{-ikr}. \quad (4.41)$$

Οπότε το συνολικό δυναμικό ταχύτητας εξαιτίας και των δύο σημειακών μονόπολων είναι

$$\phi(r, t) = -\frac{Q_1(t)}{4\pi r_1} e^{-ikr_1} - \frac{Q_2(t)}{4\pi r_2} e^{-ikr_2} \quad (4.42)$$

Στο μακρινό πεδίο, $r \approx r_1 \approx r_2$, και οι παρονομαστές στην παραπάνω εξίσωση μπορούν να αντικατασταθούν από r . Οι αριθμητές όμως δεν πρέπει να αντικατασταθούν λόγω της διαφοράς φάσης μεταξύ των ταλαντώμενων μονόπολων. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.40) στην (4.42) βρίσκουμε πως το συνολικό δυναμικό ταχύτητας είναι προσεγγιστικά ίσο με

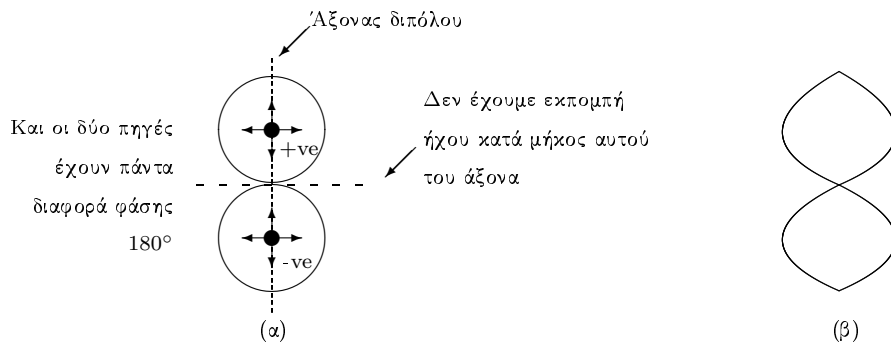
$$\phi(r, \theta, t) \approx -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \{Q_1(t)e^{ikd \cos \theta} + Q_2(t)e^{-ikd \cos \theta}\}. \quad (4.43)$$

Για ένα σημειακό δίπολο, οι δύο μονόπολες πηγές έχουν την ίδια ηχητική ισχύ αλλά έχουν διαφορά φάσης 180° . Οπότε

$$Q_1(t) = Q_p e^{i(\omega t + \pi/2)}, \quad (4.44)$$

και

$$Q_2(t) = Q_p e^{i(\omega t - \pi/2)}. \quad (4.45)$$



Σχήμα 4.3: Διπολική ηχητική πηγή

Επομένως,

$$\phi(r, \theta, t) = -\frac{Q_p e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \left\{ e^{i(kd \cos \theta + \pi/2)} + e^{-i(kd \cos \theta + \pi/2)} \right\}, \quad (4.46)$$

ή

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{Q_p e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} 2 \sin(kd \cos \theta). \quad (4.47)$$

Για $kd \ll 1$ το τελευταίο είναι προσεγγιστικά ίσο με

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{Q_p e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} 2kd \cos \theta. \quad (4.48)$$

δηλαδή

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{\text{σταθερά}}{r} e^{i(\omega t - kr)} (2kd \cos \theta) \quad (4.49)$$

όπου θ είναι η γωνία από τον άξονα που περνάει από τα κέντρα τους. Ονομάζουμε τον παράγοντα $(2kd \cos \theta)$ κατευθυντικότητα (*directivity factor*).

Το σχήμα (4.3)α περιγράφει σχηματικά το δίπολο, και το σχήμα (4.3)β φανερώνει το σχήμα των επίπεδων γραμμών της έντασης I , η οποία έχει την μορφή

$$I = \text{σταθερά} \frac{(\cos \theta)^2}{r^2} \quad (4.50)$$

Πράγματι η ένταση του ήχου ενός διπόλου μπορεί να υπολογιστεί είτε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και στα μονόπολα, είτε αναγνωρίζοντας ότι το δυναμικό ταχύτητας του διπόλου στο μακρινό πεδίο είναι ίσο με το δυναμικό ταχύτητας του μονόπολου με έναν επιπλέον όρο ο οποίος είναι μία συνάρτηση της πολικής γωνίας θ (συντελεστής κατευθυντικότητας, $-2kdcos\theta$). Οπότε έχουμε

$$I(r, \theta) = \frac{Q_p^2 k^4 \rho_0 c}{32\pi^2 r^2} (2kd \cos \theta)^2, \quad (4.51)$$

και επομένως

$$I(r, \theta) = \frac{Q_p^2 k^4 d^4 \rho_0 c}{8\pi^2 r^2} \cos^2 \theta = \frac{Q_{rms}^2 k^4 d^2 \rho_0 c}{4\pi^2 r^2} \cos^2 \theta. \quad (4.52)$$

Είναι σημαντικό να τονίσουμε σ' αυτό το σημείο ότι το δυναμικό ταχύτητας του διπόλου που περιγράφεται από την σχέση (4.48) είναι μία προσέγγιση στο μακρινό πεδίο.

Στην πραγματικότητα όμως, το δυναμικό ταχύτητας του διπόλου αποτελείται από δύο όρους - από του οποίους ο ένας σχετίζεται με τις συνιστώσες του εγγύς πεδίου, και ο άλλος σχετίζεται με τις συνιστώσες του μακρινού πεδίου. Το πλήρες δυναμικό ταχύτητας του διπόλου μπορεί να περιγραφεί σε όρους της ισχύος της διπολικής πηγής, Q_d , (βλέπε [41], και [12]) με μονάδα μέτρησης το $m^4 s^{-1}$, όπου

$$\phi(r, \theta, t) = \frac{\cos \theta}{4\pi} \left\{ \frac{1}{cr} \frac{\partial Q_d(t - r/c)}{\partial t} + \frac{Q_d(t - r/c)}{r^2} \right\}. \quad (4.53)$$

Το εκπεμπόμενο ηχητικό πεδίο εξαρτάται από το $\cos\theta$ - π.χ. στις 90° ως προς τον άξονα του διπόλου τα ηχητικά πεδία εξουδετερώνονται μεταξύ

τους. Επίσης, οι συνιστώσες του εγγύς πεδίου μεταβάλλονται με το αντίστροφο του τετραγώνου της απόστασης, ενώ οι συνιστώσες του μακρινού πεδίου μεταβάλλονται με το αντίστροφο της απόστασης.

Η ισχύς του ήχου στο μακρινό πεδίο που εκπέμπεται από το δίπολο μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας την (4.52) πάνω σε μία αυθαίρετη σφαιρική επιφάνεια στη δοσμένη ακτίνα r . Η ηχητική ισχύς είναι

$$\Pi = \frac{Q_{rms}^2 k^4 d^2 \rho_0 c}{3\pi}. \quad (4.54)$$

Μία σύγκριση μπορεί να γίνει ανάμεσα στους ήχους που εκπέμπονται από τα δίπολα και τα μονόπολα συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4.36) και (4.54). Ο λόγος της ηχητικής ισχύος που εκπέμπεται από ένα δίπολο προς αυτή ενός μονόπολου είναι

$$\frac{\Pi_D}{\Pi_M} = \frac{4k^2 d^2}{3} \sim \left\{ \frac{d}{\lambda} \right\}^2. \quad (4.55)$$

Το Π_D είναι η ηχητική ισχύς που εκπέμπεται από το δίπολο, Π_M είναι η ηχητική ισχύς που εκπέμπεται από το μονόπολο, και $k = 2\pi/\lambda$, όπου λ είναι το μήκος κύματος. Είναι φανερό από την παραπάνω εξίσωση πως σε χαμηλές συχνότητες (μεγάλα μήκη κύματος), το δίπολο είναι πολύ λιγότερο αποτελεσματικό σε εκπομπή θορύβου απ' ότι σε υψηλές συχνότητες (μικρά μήκη κύματος) συγκρινόμενο με ένα μονόπολο της ίδιας ηχητικής ισχύος.

Ένα δίπολο παράγεται εξαιτίας των διακυμάνσεων των δυνάμεων πίεσης που εξασκούνται κατά μήκος του άξονα μεταξύ των δύο πηγών. Αυτές οι δυνάμεις πίεσης δημιουργούνται από τις εκτός φάσης ταλαντώσεις των δύο μονοπόλων που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Είναι οπότε χρήσιμο να περιγράψουμε την ηχητική ισχύ που εκπέμπεται από ένα δίπολο σε όρους

των διακυμάνσεων δύναμης (κατά μήκος του άξονα του διπόλου) που είναι μία συνάρτηση της ισχύος της πηγής και του διαχωρισμού των πηγών. Η παραγωγή του τύπου της εκπεμπόμενης ισχύος σε όρους των διακυμάνσεων της δύναμης αναφέρεται στην [41]. Εκτιμάται υπολογίζοντας την r.m.s διακύμανση της δύναμης, F_{rms} , σε μία σφαιρική επιφάνεια που περιέχει το δίπολο, ότι

$$\Pi = \frac{3F_{rms}^2 k^2}{4\pi\rho_0 c}. \quad (4.56)$$

Η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς από αεροδυναμικές διπολικές πηγές είναι δυνατό να υπολογιστεί είτε από την εξίσωση (4.54) είτε από την (4.56) χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο για τα αεροδυναμικά μονόπολα. Η ισχύς της πηγής, Q_{rms} , μεταβάλλεται όπως το $(2d)^2 U$, όπου $2d$ είναι η απόσταση μεταξύ των δύο μονοπολικών πηγών στην περιοχή της ροής του ρευστού, και U είναι η μέση ταχύτητα ροής. Η διακυμαινόμενη δύναμη, F_{rms} , μεταβάλλεται όπως ο όρος $\rho_0 U^2 d^2$. Η χαρακτηριστική συχνότητα μέσα στην ροή είναι ανάλογη με τον όρο $U/2d$, και όπως είναι λογικό είναι ίση με τη συχνότητα του αεροδυναμικώς παραγόμενου ήχου. Οπότε

$$\Pi = \frac{Q_{rms}^2 \omega^4 d^2 \rho_0 c}{3\pi c^4} \approx \frac{(2d)^4 U^2 U^4 d^2 \rho_0 c}{(2d)^4 3\pi c^4} \approx \frac{\rho_0 d^2 U^6}{3\pi c^3}. \quad (4.57)$$

Η εξίσωση (4.57) υποδηλώνει πως η ηχητική ισχύς που εκπέμπεται από ένα αεροδυναμικώς παραγόμενο δίπολο είναι ανάλογη με την έκκτη δύναμη της ταχύτητας ροής (ένα μονόπολο είναι ανάλογο με την τέταρτη δύναμη της ταχύτητας ροής).

Πρέπει να σημειώσουμε πως ενώ τα μονόπολα στρέφονται προς κάθε

κατεύθυνση, τα δίπολα δεν παράγουν καθόλου ήχο κάθετα στον άξονα του διπόλου όπως είναι φανερό και στα αντίστοιχα σχήματα.

Επιστρέφοντας στην παράγραφο 3.3 πρέπει τώρα να επισημάνουμε την διαφορά μεταξύ των σχέσεων (3.38) και (3.39):

$$p(x, t) = - \int_V \frac{\operatorname{div} f_i(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} dy \quad (4.58)$$

ή

$$p(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \frac{f_i(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} dy \quad (4.59)$$

Στη πρώτη εξίσωση, η πηγή αντιπροσωπεύεται από μία σειρά μονοπόλων ισχύος $\partial f_i / \partial y_i$. Στην δεύτερη, αναπαρίσταται ως ένα δίπολο ισχύος f_i - η δύναμη που ασκείται στον όγκο του ρευστού είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής, εφόσον η ροή μάζας μέσα και έξω από τον όγκο του ρευστού είναι η ίδια. Διατηρώντας την λύση στην μορφή της εξίσωσης (4.58), όλες οι καθυστερήσεις χρόνου ανάμεσα στα στοιχεία της πηγής και στη θέση του παρατηρητή θα πρέπει να είναι γνωστές. Αν οι καθυστερήσεις χρόνου ήταν αμελητέες, το χωρικό ολοκλήρωμα θα κατέληγε σε μηδέν και δεν θα παραγόταν ήχος! Αυτό μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά (βλέπε [12]) αλλά είναι αναμενόμενο διαισθητικά διότι υπάρχει, εξ ορισμού, μηδενικός ρυθμός ροής μάζας. Τα διάφορα μονοπολικά στοιχεία μέσα στην περιοχή της πηγής εξουδετερώνονται μεταξύ τους, και χωρίς τις καθυστερήσεις χρόνου ανάμεσα στα διάφορα ηχητικά στοιχεία, η εκπομπή ήχου θα ήταν μηδενική. Οπότε μετασχηματίζοντας την εξίσωση (4.58) στην διπολική κατανομή πηγών της εξίσωσης (4.59), η εκπεμπόμενη ηχητική πίεση μπορεί να εκτιμηθεί

από τη γνώση της κατανομής της δύναμης. Μ' αυτό το τρόπο η απαίτηση για λεπτομερή γνώση των καθυστερήσεων χρόνου ανάμεσα στην πηγή και τη θέση του παρατηρητή, αποφεύγεται.

Η εξίσωση (4.59) μπορεί να απλοποιηθεί για μηχανολογικές προσεγγίσεις. Θεωρώντας την σχέση $r = |x - y|$, μπορεί να γραφεί ως

$$p(x, t) = - \int_V \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} \frac{f_i(y, t - \frac{|x-y|}{c})}{4\pi |x-y|} dy. \quad (4.60)$$

Οπότε και

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial r}{\partial x_i} \left\{ \frac{f_i}{r^2} + \frac{1}{cr} \frac{\partial f_i}{\partial t} \right\} dy, \quad (4.61)$$

αφού

$$\frac{\partial f_i}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f_i}{\partial t}. \quad (4.62)$$

Τώρα, το $\partial r / \partial x_i$, μπορεί να μεταφραστεί σαν την κατευθυντικότητα του διπόλου - είναι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ του άξονα του διπόλου (η γραμμή κατά μήκος της οποίας ενεργούν οι διακυμάνσεις δύναμης) και της απόστασης μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή. Πράγματι αφού είναι

$$r = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$$

έχουμε

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2(x_i - y_i)}{2\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}} = \frac{x_i - y_i}{r} = \cos \theta_i. \quad (4.63)$$

Οπότε,

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ \frac{f_i}{r^2} + \frac{1}{cr} \frac{\partial f_i}{\partial t} \right\} \cos \theta_i dy, \quad (4.64)$$

Η εκπεμπόμενη πίεση έχει μία συνιστώσα εγγύς πεδίου και μία συνιστώσα απόμακρου πεδίου με επιπλέον εξάρτηση από το $\cos \theta$.

4.6 Τετράπολα - παράλληλα και διαμήκη

Όταν δύο δίπολα ίδιας ισχύος είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και πάλλονται με διαφορά φάσης 180° έχουμε ένα τετράπολο (*quadrupole*). Όπως είναι φανερό και στο σχήμα (4.4) υπάρχουν δύο ειδών τετράπολα: τα παράλληλα-παράπλευρα (*lateral*) και τα διαμήκη (*longitudinal*). Δηλαδή ενώ ένα δίπολο έχει έναν άξονα (οι διακυμάνσεις των δυνάμεων της πίεσης επιδρούν κατά μήκος του άξονα μεταξύ των δύο πηγών), ένα τετράπολο έχει δύο. Τα δύο δίπολα ταλαντώνονται εκτός φάσης μεταξύ τους και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην αφαιρείται μάζα απομακρυνόμενη από την πηγή, και να μην εμφανίζονται δυνάμεις (δεν υπάρχει φυσικός μηχανισμός ώστε να έχουμε μεταβολή μάζας ή ορμής). Το τετράπολο παρόλ' αυτά, ασκεί μία τάση στο μέσο, και είναι αυτή η διακυμαινόμενη τάση η οποία παράγει τον ήχο (τα μονόπολα παράγουν ήχο εξαιτίας των διακυμάνσεων της ταχύτητας επιφάνειας ή την προσθαφαίρεση μάζας από μία περιοχή της πηγής, και τα δίπολα λόγω των διακυμαινόμενων δυνάμεων). Σε ροές αερίων, τα τετράπολα παράγονται από τις τάσεις λόγω τριβής που εμφανίζονται μέσα στο αέριο.

Οι σχέσεις για την ένταση και την ισχύ του εκπεμπόμενου ήχου από ένα δίπολο προέκυψαν παρατηρώντας την παρεμβολή των δύο σημειακών μονόπολων που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Οι σχέσεις για την ένταση και την ισχύ του εκπεμπόμενου ήχου από ένα τετράπολο μπορούν να

προκύψουν είτε με τρόπο παρόμοιο θεωρώντας την παρεμβολή μεταξύ των δύο σημειακών διπόλων που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους είτε εκφράζοντας το δυναμικό ταχύτητας του τετραπόλου ως την χωρική παράγωγο του δυναμικού ταχύτητας του μονοπόλου. Οι υπολογισμοί αυτοί είναι εκτενείς και παραπέμπουμε στους *Pierce*, [37], και *Reynolds*, [41], για περισσότερες λεπτομέρειες.

Δύο δυνατοί συνδυασμοί τετραπόλων υπάρχουν. Ο πρώτος είναι όταν οι άξονες των δύο διπόλων δεν βρίσκονται στην ίδια γραμμή, και ο δεύτερος όταν βρίσκονται στην ίδια γραμμή. Το πρώτο ονομάζεται παράλληλο τετράπολο και το τελευταίο διαμήκες.

Η ηχητική ισχύς εκπεμπόμενη από ένα παράλληλο τετράπολο είναι ([37], [41])

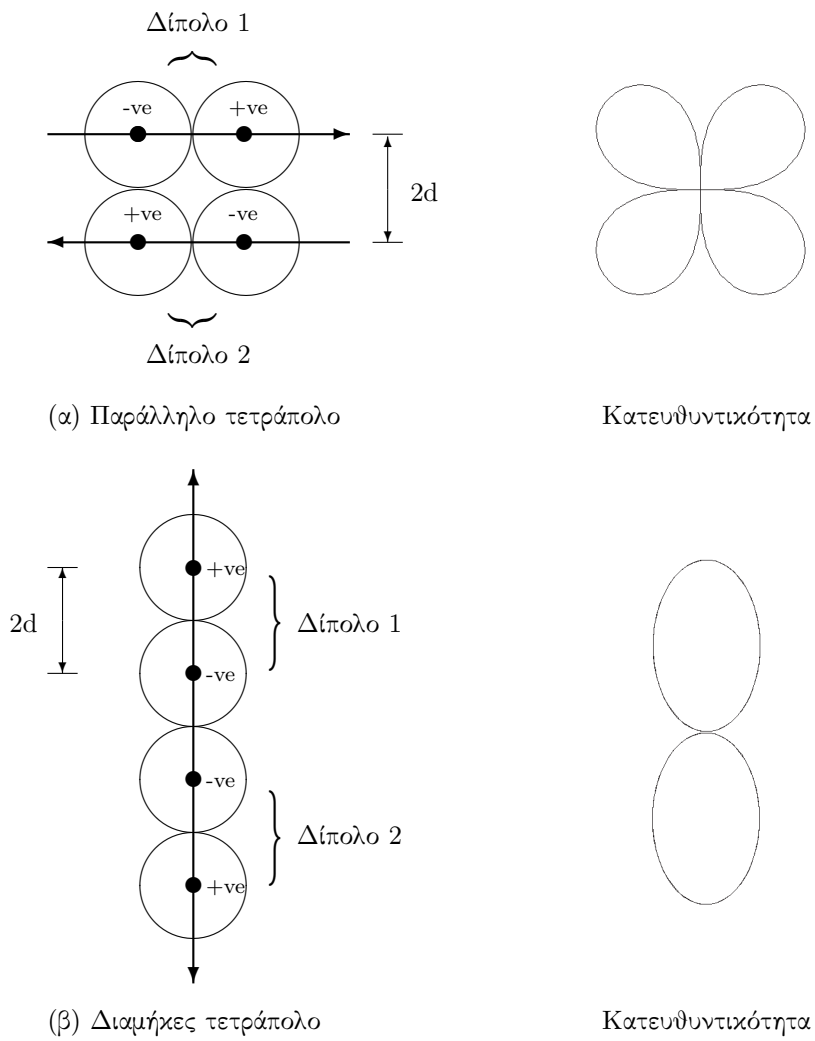
$$\Pi = \frac{4Q_{rms}^2 \rho_0 c d^4 k^6}{15\pi}, \quad (4.65)$$

ενώ από ένα διαμήκες τετράπολο η ηχητική ισχύς είναι

$$\Pi = \frac{4Q_{rms}^2 \rho_0 c d^4 k^6}{5\pi}. \quad (4.66)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, Q_{rms} είναι η ισχύς του ήχου του ενός από τα τέσσερα μονόπολα, από τα οποία αποτελείται το τετράπολο, και $2d$ είναι η απόσταση που χωρίζει δύο οποιαδήποτε διπλανά μονόπολα.

Η ισχύς του ήχου που εκπέμπεται από ένα αεροδυναμικό τετράπολο μπορεί να υπολογιστεί ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε για τα μονόπολα και τα δίπολα. Η ισχύς της πηγής, Q_{rms} , μεταβάλλεται όπως ο όρος $(2d)^2 U$, όπου U είναι η μέση ταχύτητα ροής, ενώ η χαρακτη-



Σχήμα 4.4: Παράλληλα και διαμήκη τετράπολα και οι κατευθυντικότητές τους

ριστική συχνότητα στη ροή μεταβάλλεται όπως ο όρος $U/(2d)$. Οπότε, για ένα παράλληλο τετράπολο,

$$\Pi = \frac{4Q_{rms}^2 \rho_0 c d^4 \omega^6}{15\pi c^6} \approx \frac{\rho_0 d^2 U^8}{15\pi c^5}, \quad (4.67)$$

ενώ για ένα διαμήκες τετράπολο

$$\Pi = \frac{4Q_{rms}^2 \rho_0 c d^4 \omega^6}{5\pi c^6} \approx \frac{\rho_0 d^2 U^8}{5\pi c^5}. \quad (4.68)$$

Οι εξισώσεις μας υποδείχνουν ότι η ηχητική ισχύς που παράγεται τόσο από παράλληλα όσο και από διαμήκη τετράπολα είναι ανάλογη με την όγδοη δύναμη της ταχύτητας ροής (ένα μονόπολο είναι ανάλογο με την τέταρτη δύναμη ένα δίπολο είναι ανάλογο με την έκτη δύναμη της ταχύτητας ροής).

Μπορούμε τώρα να κάνουμε μία σύγκριση της αποδοτικότητας μεταξύ των μονοπόλων και των τετραπόλων συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4.36) και (4.65). Ο λόγος της ηχητικής ισχύος που εκπέμπεται από ένα τετράπολο προς αυτή που εκπέμπεται από ένα μονόπολο είναι

$$\frac{\Pi_Q}{\Pi_M} \sim d^4 k^4 \sim \left\{ \frac{d}{\lambda} \right\}^4. \quad (4.69)$$

Συγκρίσεις μεταξύ αυτής της εξίσωσης και της (4.55) μας δείχνουν πως τα μονόπολα είναι οι πιο αποτελεσματικοί εκπομπείς ήχου ενώ τα τετράπολα οι λιγότερο αποτελεσματικοί. Αυτό το σημαντικό αποτέλεσμα συμπεραίνεται επίσης και από τις σχέσεις αναλογίας με την ταχύτητα ροής για αεροδυναμικού τύπου πηγές. Ο συντελεστής κατευθυντικότητας (ή κατευθυντικότητα)

- i. για το παράλληλο τετράπολο είναι ανάλογος με $\sin \theta \cos \theta$,
- ii. ενώ για το διαμήκες τετράπολο είναι ανάλογος με $\cos \theta^2$,

πράγμα που προκύπτει αν εργαστούμε με τρόπο παρόμοιο με την διαδικασία που ακολουθήσαμε για το δίπολο, βλέπε [33].

4.7 Η ανάλυση της λύσης της εξίσωσης του Lighthill σε μονόπολα, δίπολα και τετράπολα

Στην παράγραφο 3.3 μετασχηματίσαμε την εξίσωση (3.32) στην (3.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}(y, t - r/c)}{r} d^3y &= \\ &= \int_V \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial t^2} + \frac{2}{cr^2} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} - \frac{2}{r^3} T_{ij} \right\} d^3y \end{aligned} \quad (4.70)$$

πράγμα που θα μας βοηθήσει να αναγνωρίσουμε την τετραπολική φύση της ηχητικής πηγής (βλέπε και *Goldstein*, [20], καθώς και *Richards* και *Mead*, [43]). Όπως και στο δίπολο, κάποιος διαισθητικά θα περίμενε έναν όρο εκπομπής στο απόμακρο πεδίο και έναν στο εγγύς πεδίο. Ο όρος μέσα στα άγκιστρα της (4.70) παριστάνει τους όρους εκπομπής στο εγγύς και το μακρινό πεδίο - υπάρχουν δύο όροι εγγύς πεδίου (r^{-2} και r^{-3}) και ένας μακρινού πεδίου. Όπως και στο δίπολο, ο όρος $\partial^2 r / \partial x_i \partial x_j$ είναι ο συντελεστής κατευθυντικότητας και:

- i. για $i = j$ αυτός είναι $\approx \cos^2 \theta$ (ένα διαμήκες τετράπολο) ενώ
- ii. για $i \neq j$ είναι $\approx \cos \theta \sin \theta$ (ένα παράλληλο τετράπολο).

Οπότε στην σχέση (3.47) η συνιστώσα ελεύθερης τύρβης (*free turbulence component*) -πρώτος όρος - αποτελείται από τετράπολα. Όμοια ο δεύτερος όρος πού αντιπροσωπεύει την συνιστώσα σχετικά με τις διακυμάνσεις των

δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο σώμα αποτελείται από δίπολα (*fluctuating body forces*) ενώ ο τρίτος όρος που παριστάνει τις κινήσεις ταλάντωσης του στερεού σώματος αποτελείται από μονόπολα.

4.8 Τα αποτελέσματα της παρουσίας στερεών σωμάτων στη ροή

Αν η συνιστώσα της ελεύθερης τύρβης είναι ο κυρίαρχος όρος (για παράδειγμα η εκτοξευόμενη ροή από μια βαλβίδα), τότε, οι τυρβώδεις δίνες (στρόβιλοι) εξαρτώνται από τη μέση ροή, U , και το πάχος ενός οριακού στρώματος ή μιας βαλβίδας διαμέτρου, D . Η χρονική κλίμακα του ηχητικού πεδίου είναι οπότε D/U . Οπότε, η κλίμακα μήκους κύματος του ήχου είναι $\lambda = cD/U = D/M$, όπου c είναι η ταχύτητα του ήχου και M ο αριθμός *Mach* της ροής. Οπότε,

$$M = \frac{D}{\lambda} = \frac{\text{τυπικές διαστάσεις πηγής}}{\text{ακουστικό μήκος κύματος}}. \quad (4.71)$$

Για ροές χαμηλών αριθμών *Mach*, $\lambda \gg D$. Αυτό σημαίνει ότι οι καθυστερήσεις χρόνου μεταξύ των διαφορετικών σημείων μέσα στην περιοχή της πηγής μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Από την άλλη πλευρά, για υψηλές υποηχητικές και υπερηχητικές ροές, $D \sim \lambda$ ή $D \gg \lambda$, οι καθυστερήσεις χρόνου πρέπει να λαβαίνονται υπόψη στην ανάλυση.

Οι διάφοροι όροι σχετικά με τη συνιστώσα της ελεύθερης τύρβης μπορούν τώρα να υπολογιστούν. Το $\partial/\partial x_i$ μεταβάλλεται όπως το $1/\lambda$ ή M/D , ενώ το χωρικό ολοκλήρωμα μεταβάλλεται όπως το D^3 , και ο τανυστής τά-

σης του *Lighthill* T_{ij} μεταβάλλεται όπως ο ρU^2 εφόσον οι τάσεις *Reynolds* λόγω τριβής (διατμητικές) είναι αυτές που κυριαρχούν. Οπότε από τη συνιστώσα της ελεύθερης τύρβης στην εξίσωση (3.47) έχουμε -βλέπε [29] (*Leehey - Hanson*, 1971) και [33] (*Norton* , 1989)-

$$p(x, t) \sim \left\{ \frac{M}{D} \right\}^2 \frac{D^3 \rho U^2}{4\pi r} = \frac{\rho D}{4\pi r c^2} U^4 = M^2 \frac{\rho D}{4\pi r} U^2 \quad (4.72)$$

αφού και $M = U/c$, ενώ η ένταση

$$I(r) = \frac{p^2(x, t)}{(\rho c)_0} = \frac{\rho^2 D^2}{16\pi^2 r^2 c^4 (\rho c)_0} U^8. \quad (4.73)$$

Η εξίσωση (4.73) υποδηλώνει ότι η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς είναι ανάλογη με την όγδοη δύναμη της ταχύτητας ροής - αυτός είναι ο διάσημος U^8 νόμος του *Lighthill* για την παραγωγή ήχου από τύρβη. Είναι παρόμοιος με τη σχέση U^8 που παράχθηκε στην παράγραφο 4.6 για τα τετράπολα. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος $(\rho c)_0$ είναι η πυκνότητα και η ταχύτητα του ήχου στη θέση του παρατηρητή. Κατά κανόνα, θα μπορούσε να είναι διαφορετικά από την πυκνότητα, ρ , και την ταχύτητα του ήχου, c στην περιοχή της πηγής ειδικότερα αν θερμά αέρια (κ.τ.λ.) περιλαμβάνονταν.

Η συνολική διακυμαινόμενη δύναμη μεταβάλλεται όπως ο όρος $\rho U^2 D^2$, οπότε από τη συνιστώσα σχετικά με τις διακυμάνσεις των δυνάμεων στην εξίσωση (3.47) είναι

$$p(x, t) \sim \left\{ \frac{M}{D} \right\} \frac{D^2 \rho U^2}{4\pi r} = \frac{\rho D}{4\pi c r} U^3 = M \frac{\rho D}{4\pi r} U^2 \quad (4.74)$$

και

$$I(r) = \frac{p^2(x, t)}{(\rho c)_0} = \frac{\rho^2 D^2}{16\pi^2 r^2 c^2 (\rho c)_0} U^6. \quad (4.75)$$

Η εξίσωση (4.74) μας δείχνει ότι η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς είναι ανάλογη της έκτης δύναμης της ταχύτητας ροής. Είναι παρόμοια με τη σχέση U^6 που παράχθηκε στην παράγραφο 4.5 για τα δίπολα.

Τέλος, η εκπομπή ηχητικής ισχύος που σχετίζεται με τον τρίτο όρο (οι κινήσεις των στερεών σωμάτων οι οποίες παράγουν διαστολή του όγκου) στην εξίσωση (3.47) είναι δυνατόν να υπολογιστεί. Εδώ, $\partial/\partial t$ μεταβάλλεται όπως η ακουστική συχνότητα, U/D και το επιφανειακό ολοκλήρωμα όπως το D^2 . Οπότε βρίσκουμε ότι για την πίεση που σχετίζεται με τις κινήσεις ταλάντωσης της επιφάνειας των σωμάτων στην (3.47) είναι

$$p(x, t) \sim \frac{U \rho D^2 U}{D 4\pi r} = \frac{\rho D}{4\pi r} U^2 \quad (4.76)$$

και

$$I(r) = \frac{p^2(x, t)}{(\rho c)_0} = \frac{\rho^2 D^2}{16\pi^2 r^2 (\rho c)_0} U^4. \quad (4.77)$$

Οι συντελεστές κατευθυντικότητας έχουν παραληφθεί για την σχέση (4.74) και την (4.72), σύμφωνα με τον *Friedman*, [18].

Η εξίσωση (4.77) υποδηλώνει ότι η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς είναι ανάλογη με την τέταρτη δύναμη της ταχύτητας ροής. Είναι παρόμοια με τη U^4 σχέση που παράχθηκε στην παράγραφο 4.4 για τα μονόπολα.

Πολλές σημαντικές παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν σε σχέση με τις εξισώσεις (4.72)- (4.77). Κατ' αρχήν, η ένταση του εκπεμπόμενου ήχου (ή η μέση τετραγωνική ηχητική πίεση) είναι ανάλογη με το αντίστροφο τετράγωνο της απόστασης. Κατά δεύτερον, η ένταση είναι ανάλογη με το τετράγωνο της τυπικής διάστασης της πηγής, για παράδειγμα του πάχους

του οριακού στρώματος ή της διαμέτρου της βαλβίδας. Τρίτον, η εξάρτηση από την ταχύτητα ποικίλει από U^8 για τα τετράπολα έως U^4 για τα μονόπολα.

Για τα αυτοκίνητα, κάτω από κανονικές συνθήκες οδήγησης, ισχύει ότι $M \approx \frac{1}{10}$, έτσι ώστε η (4.74) είναι περίπου μία τάξη μεγέθους μικρότερη από την (4.76), ενώ η (4.72) είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερη από την (4.76).

Διάφοροι αεροδυναμικοί ήχοι δημιουργούνται όταν οδηγούμε ένα αυτοκίνητο. Προέρχονται από την μηχανή, τους υαλοκαθαριστήρες, τους πλαϊνούς καθρέπτες, τις ταλαντώσεις του σώματος του αυτοκινήτου, το σύστημα καυσαερίων, την αλληλεπίδραση των ελαστικών των τροχών με τον δρόμο, την ραδιοφωνική κεραία κ.τ.λ. Στην συνέχεια (στο επόμενο κεφάλαιο) αφού πρώτα αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία της θεωρίας των *Powell - Howe* θα ασχοληθούμε με την κεραία. Από την ανάλυση (4.72)-(4.76) βλέπουμε πως ο πιο σημαντικός όρος στον αεροακουστικό ήχο που παράγεται από την κεραία είναι αυτός που προέρχεται από την κίνηση της επιφάνειάς της.

4.9 Η θεωρία των *Powell - Howe* για τον ήχο που παράγεται από στροβιλισμό

Η θεωρία του *Lighthill* έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα και σε υποηχητικά και σε υπερηχητικά συστήματα ροών, για την πρόβλεψη θορύβου από αεριοθούμενο, θορύβου από οριακό στρώμα, ασταθείς ροές πάνω σε στάσιμα ή κινούμενα στερεά σώματα, κ.τ.λ. Ακόμα και όταν όλες οι πληροφορίες

για την ροή δεν είναι διαθέσιμες, ενώ οι μόνες παράμετροι που είναι διαθέσιμες είναι οι εντάσεις και οι διαφορές μεταβολές των μηκών, ο τανυστής τάσης του *Lighthill*, T_{ij} είναι ένα εργαλείο με πολλές δυνατότητες. Αν παρόλ' αυτά, ζητείται λεπτομερής γνώση της ροής-των ακουστικών αλληλεπιδράσεων, τότε οι όροι της πηγής στην εξίσωση του *Lighthill* πρέπει να οριστούν ξανά.

Το 1964, ο *Powel* [39] έθεσε το αίτημα ότι η προέλευση του αεροδυναμικού ήχου πρέπει να αποδοθεί στη διαδικασία σχηματισμού στροβίλων - η έντονη κίνηση που προκαλεί τον σχηματισμό στροβίλων, ταυτοχρόνως αυξάνει και την εκπομπή ήχου. Ο *Howe*, [23], αναπροσάρμοσε την θεωρία του *Lighthill* για ροές χαμηλών αριθμών *Mach* σύμφωνα με τον *Powell* για τον ήχο που προέρχεται από στροβιλισμό, και συνέδεσε τις αεροδυναμικές ηχητικές πηγές με τις συγκεκριμένες περιοχές στη ροή όπου το ολικό διάνυσμα (μέσο και ασταθές) στροβιλώδους κίνησης, $\vec{\omega}$, δεν μηδενίζεται. Πρέπει να αναφερθεί πως, ενώ η στροβιλώδης κίνηση είναι μία απαραίτητη συνθήκη για μία αεροδυναμική ηχητική πηγή, δεν είναι μία επαρκής συνθήκη.

Από την μηχανική των ρευστών, όταν μία ροή περιέχει και περιστροφική και μη περιστροφική κίνηση, η ολική ταχύτητα, \vec{U} , δίνεται από την εξίσωση (4.8) και είναι

$$\vec{U} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi}, \quad (4.78)$$

όπου ϕ είναι το δυναμικό της μη περιστροφικής ταχύτητας, και $\vec{\psi}$ το δυναμικό της περιστροφικής ταχύτητας. Σε συστήματα τυρβωδών ροών, $\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$ είναι η ολική (μέση και ασταθής-*mean plus unsteady*) περιστροφική

συνιστώσα του πεδίου ταχύτητας, και $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$ είναι η μη περιστροφική ασταθής συνιστώσα (*irrotational unsteady component*). Η μη περιστροφική ασταθής συνιστώσα είναι μη μηδενική μόνο όταν το ρευστό είναι συμπιεστικό και επομένως σχετίζεται με την ακουστική ταχύτητα του σωματιδίου. Ο στροβιλισμός τότε μόνο σχετίζεται με το διάνυσμα του δυναμικού της ταχύτητας και είναι

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}). \quad (4.79)$$

Για στροβιλώδεις περιοχές εντοπισμένες στο χώρο, ο *Howe* (αναφορά [23]) αναπροσάρμοσε την κυματική εξίσωση του *Lighthill* και παράγαγε την

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (4.80)$$

Ο όρος $\rho_0(\vec{\omega} \times \vec{v})$ αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως διάνυσμα *Lamb* και είναι η ασταθής, στροβιλώδης δύναμη άντωσης (*unsteady vortical lifting force*). Ο *Howe* προσπάθησε να γενικεύσει την εξίσωση, με την στάσιμη (“λιμνάζουσα”) ενθαλπία (*stagnation enthalpy*) ως ακουστική μεταβλητή στη θέση της πυκνότητας, για την μέτρηση των αλληλεπιδράσεων των στερεών σωμάτων κ.τ.λ. Η κλασική του ανάλυση είχε ως αποτέλεσμα την ακόλουθη αναλογία με ταυιστή τάσης του *Lighthill* τον

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \left\{ (\vec{\omega} \times \vec{v}) - T \vec{\nabla} S \right\}, \quad (4.81)$$

όπου T είναι η θερμοκρασία και S η εντροπία. Η παραπάνω εξίσωση διευκρινίζει πως οι πηγές του αεροδυναμικού ήχου περιέχονται στις περιοχές της ροής όπου το διάνυσμα στροβιλισμού και το διάνυσμα του ανάδελτα

της εντροπίας είναι μη μηδενικά. Η ανάλυση του *Howe* έχει εφαρμοστεί επιτυχώς σε ένα ευρύ φάσμα περίπλοκων προβλημάτων παραγωγής ήχου σε μη ομογενείς ροές (αναφορές [23], [24], [25]). Θα ήταν χρήσιμο να σημειώσουμε πως η παραπάνω ανάλυση δεν είναι απαραίτητα περιορισμένη σε ισχυρές ροές (όπου δημιουργείται κατανεμημένος στροβιλισμός) όπως είναι φανερό και από την εξίσωση (4.82). Επίσης θα πρέπει να πούμε πως, η ύπαρξη τριβών δεν επηρεάζει την παραπάνω θεωρία. Ο *Crighton*, [9], μας διευκρινίζει ωστόσο, πως η θεωρία στροβιλισμού των *Powell-Howe* ενώ συνδέει τις πηγές ήχου με περιοχές στροβιλισμού, δεν τις συνδέει τοπικά και γραμμικά με το στροβιλισμό. Γενικά δεν έχουν εφευρεθεί τρόποι γραμμικής συσχέτισης των ηχητικών πηγών με το στροβιλισμό. Ενώ η θεωρία του *Lighthill* επιτρέπει να έχουμε ακριβή γενικά αποτελέσματα όταν ο ταυστής τάσης, T_{ij} , μπορεί εύκολα να υπολογιστεί, η θεωρία στροβιλισμού των *Powell-Howe* επιτρέπει σε συγκεκριμένα προβλήματα, σχετικά με τις ακουστικές αλληλεπιδράσεις της ροής, να λυθούν.

Ο *Howe* στη συνέχεια ([25], [24]) δημιούργησε μια γενική σχέση ισοροπίας της ορμής (*momentum balance relationship*) περιγράφοντας τον ρυθμό “απώλειας” ηχητικής ενέργειας εξαιτίας της παραγωγής στροβίλων παρουσία μη έντονων, μέσων υποηχητικών ροών (*low sub-sonic mean flows*). Ο όρος “απώλεια” χρησιμοποιείται καταχρηστικά καθώς μπορεί να αναφερθεί και σε αρνητική απώλεια (παραγωγή του ήχου) και θετική απώλεια (απορρόφηση του ήχου), για παράδειγμα η παραγωγή του ήχου λόγω στροβιλισμού προκαλεί αρνητική απώλεια, ενώ η παραγωγή στροβιλισμού

λόγω ήχου θετική απώλεια. Ο τύπος απώλειας του *Howe* είναι

$$\Pi_D = \rho_0 \int_V \{(\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}\} dV, \quad (4.82)$$

όπου $\vec{\omega}$ είναι το ολικό (μέσο και ασταθές-*mean plus unsteady*) διάνυσμα στροβιλισμού και \vec{v} είναι η ολική (μέση και ασταθής) περιστροφική, μη συμπιεστή συνιστώσα (*incompressible component*) του πεδίου ταχύτητας. Αυτή η σχέση είναι εξαιρετικά χρήσιμη διότι επιτρέπει και ποιοτική και ποσοτική περιγραφή διαφορετικού τύπου ρών-ακουστικών αλληλεπιδράσεων, πιο συγκεκριμένα, περιοχές μεταφοράς ενέργειας ανάμεσα στον ήχο και στο πεδίο ροής μπορούν να αναγνωριστούν. Ο *Howe*, [25], παρουσιάζει την θετική απώλεια (απορρόφηση ήχου) με σκοπό τη σχέση της επίδρασης των μέσων ρών στη περίθλαση (*diffraction*) του ήχου σε ημι-άπειρο έλασμα (*semi-infinite plate*), και την εξασθένιση του ήχου με τη ροή να αγγίζει ελαφρά, διάτρητα χωρίσματα (ελάσματα). Επίσης ο *Howe* πραγματεύεται πώς η αρνητική απώλεια (δημιουργία ήχου) μπορεί να εκδηλωθεί σε συγκεκριμένες ταχύτητες ροής και κατευθύνσεις της διάδοσης. Η ενέργεια της μέσης ροής μπορεί επίσης να μετατραπεί σε ήχο αν μία αεροδυναμική ακουστική αντήχηση προκληθεί, όπως ηχητικά κύματα σε ένα σωλήνα συγχρονισμένα με κάποια εσωτερικά, προκαλούμενα από ροή, φαινόμενα εκπομπής στροβίλων. Ο *Welsh*, [49], [50], έχει πρόσφατα μελετήσει διάφορους τέτοιους τύπους ρών-ακουστικών αλληλεπιδράσεων και έχει εφαρμόσει επιτυχημένα σ' αυτούς τον τύπο “απώλειασ” του *Howe*.

Πολλές σημαντικές θεωρήσεις, [49], μπορούν να γίνουν σε σχέση με την εξίσωση (4.82). Αρχικά τα $\vec{\omega}$, \vec{v} και \vec{u} πρέπει να έχουν μεγάλες γωνί-

ες μεταξύ τους, για παράδειγμα αν η ακουστική ταχύτητα σωματιδίου είναι παράλληλη με το δρόμο στροβίλου (*vortex path*), δεν θα υπάρχουν αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στον ήχο και στα πεδία ροής. Δεύτερον, τα $\vec{\omega}$, \vec{v} και \vec{u} πρέπει όλα να έχουν μεγάλα μεγέθη - σε περιοχές όπου η ακουστική ταχύτητα σωματιδίου είναι μικρή θα παρατηρείται πολύ μικρή απορρόφηση ή παραγωγή ήχου. Τρίτον, επειδή το \vec{u} είναι ταλαντωτικό (*oscillatory*), η μέση ηχητική ενέργεια θα προσεγγίζει το μηδέν (εξαιτίας των εξουδετερώσεων) εκτός εάν τα μεγέθη ή η διεύθυνση των διανυσμάτων μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια ενός κύκλου ταλάντωσης (*oscillatory cycle*). Ο *Welsh*, [49], [50], αναφέρεται σε αυτή τη συνθήκη ως “ανισορροπία” (*imbalance*). Σε ένα πρόσφατο άρθρο [45], πραγματεύονται πώς η ενέργεια μεταφέρεται από τη μέση ροή στην ενδυνάμωση μίας αεροδυναμικής ακουστικής κατάστασης αντήχησης, για τέσσερα συγκεκριμένα παραδείγματα. Ένα από αυτά τα παραδείγματα είναι και το αντηχείο σε κοιλότητα του *Helmholtz*.

Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται η εφαρμογή της θεωρίας του ήχου για στροβιλισμό στην αναγνώριση και των περιοχών αλλά και των μηχανισμών της παραγωγής ήχου από ροή.

Κεφάλαιο 5

Το μοντέλο της ραδιοφωνικής κεραίας

5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξηγήθηκε ο ήχος ως επιστημονική έννοια, σχετίστηκε με τις διακυμάνσεις της πίεσης και της πυκνότητας του ρευστού μέσα στο οποίο διαδίδεται και αναπτύχθηκαν οι πιο γνωστές και οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες θεωρίες μοντελοποίησης του ήχου. Έγινε μια πλήρης ανάλυση του μοντέλου του *Lighthill* και της σχετικής θεωρίας του, καθώς και μια συνοπτική αναφορά στη θεωρία των *Powell-Howe* με σκοπό η τελευταία να αποτελέσει βάση για τον αναγνώστη που επιθυμεί να ασχοληθεί εκτενέστερα και να προσεγγίσει με άλλο τρόπο διάφορα προβλήματα παραγωγής ήχου.

Επίσης εισάχθηκαν βασικές έννοιες περιγραφής του ήχου όπως το ακουστικό δυναμικό ταχύτητας, η ένταση και η ηχητική ισχύς. Δόθηκαν διάφορα μοντέλα ακουστικών πηγών και συνδέθηκαν με τη θεωρία του *Lighthill* και

τον αεροδυναμικό ήχο.

Σ' αυτό το κεφάλαιο έχοντας ως βάση όσα αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα θα συζητηθεί ο αεροδυναμικός ήχος που παράγεται λόγω της κίνησης ενός οχήματος και ειδικότερα ο ήχος που παράγεται από τη ραδιοφωνική κεραία κάτω από ορισμένες συνθήκες που θα τεθούν στην επόμενη παράγραφο.

Πιο συγκεκριμένα θα συζητηθούν οι Αιολικοί τόνοι που παράγονται λόγω της παραγωγής στροβίλων από ένα κύλινδρο. Οι λύσεις που παρουσιάζονται σ' αυτό το κεφάλαιο δεν περιορίζονται μόνο σε μία κυλινδρική διατομή, και παρέχουν αξιοσημείωτη γνώση για την φύση του ήχου που εκπέμπεται από λεπτές κατασκευές μέσα σε ένα ρευστό. Στις επόμενες παραγράφους ο κύλινδρος θεωρείται ότι είναι μέσα σ' ένα απεριόριστο, ομογενές ρευστό το οποίο ρέει πάνω σε ένα κύλινδρο με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του ήχου. Αυτή η ανάλυση επικεντρώνεται στις συνιστώσες του ήχου στο απόμακρο πεδίο, οι οποίες δεσπόζουν όταν ο παρατηρητής είναι αρκετά μήκη κύματος μακριά από τον κύλινδρο. Στην παράγραφο 5.3, αναλύεται ο ήχος εκπεμπόμενος από ένα κύλινδρο με πλήρως συντονισμένη παραγωγή στροβίλων (*fully correlated vortex shedding*) σε όλη την έκτασή του, ενώ στην παράγραφο 5.4, μελετάται ο εκπεμπόμενος ήχος από μερικώς συντονισμένη παραγωγή στροβίλων (*partial correlated*), περίπτωση που ανταποκρίνεται και στην πραγματικότητα.

5.2 Εξισώσεις του εκπεμπόμενου ήχου σε ένα μη περιορισμένο ρευστό

Ακολουθώντας τον *Blevins*, [7] θα θεωρήσουμε την περίπτωση όπου S είναι το σύνορο ενός κυλίνδρου με διάμετρο D και μήκος L μέσα σε σταθερή ροή (*steady flow*) με ταχύτητα U και κατεύθυνση κάθετη προς τον άξονα του κύλινδρου, βλέπε σχήμα (5.1). Σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (R, θ, ϕ) εκτείνεται μία γραμμή μήκους R από το κέντρο του κυλίνδρου προς έναν παρατηρητή ο οποίος καταγράφει τον εκπεμπόμενο ήχο. Δυνάμεις του ρευστού ενεργούν πάνω στον κύλινδρο, κάθετα στην ελεύθερη ροή (y κατεύθυνση) και παράλληλα στην ελεύθερη ροή (x κατεύθυνση). Ο κύλινδρος αντιδρά σε αυτές τις δυνάμεις με ταλάντωση. Ο ήχος που εκπέμπεται από τον κύλινδρο στη συνέχεια θα υπολογιστεί ακολουθώντας τις εξής υποθέσεις:

$$R/\lambda \gg 1, \quad (5.1)$$

$$R/L \gg 1, \quad (5.2)$$

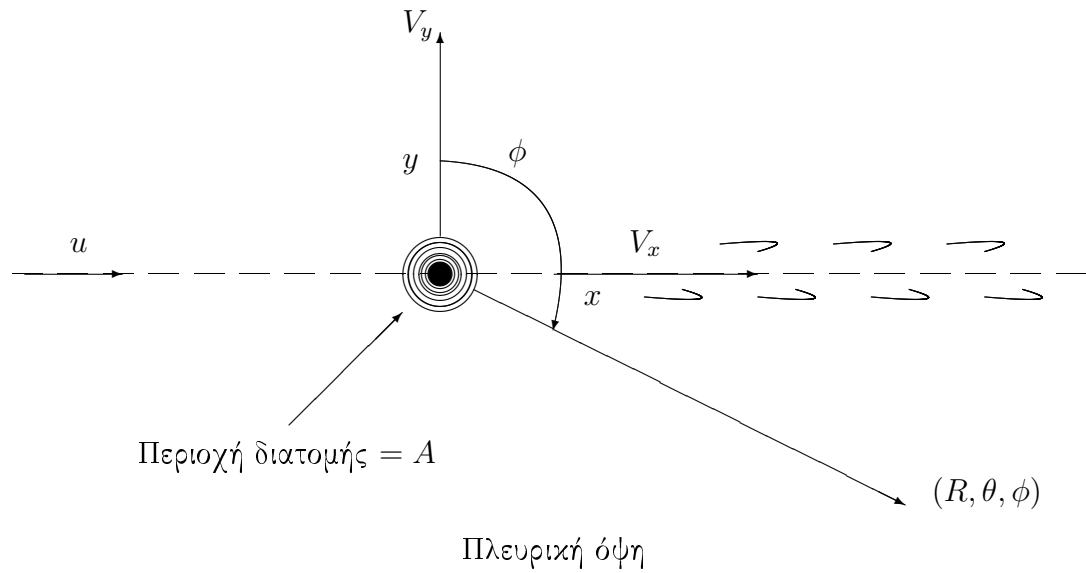
$$D/\lambda \ll 1, \quad (5.3)$$

$$A_y/\lambda \ll 1, \quad (5.4)$$

$$D/L \ll 1, \quad (5.5)$$

$$U/c \ll 1, \quad (5.6)$$

όπου λ είναι το τυπικό μήκος κύματος του εκπεμπόμενου ήχου, και A_y είναι το πλάτος της ταλάντωσης του κυλίνδρου.



Σχήμα 5.1: Ο κύλινδρος και το σύστημα συντεταγμένων

Οι συνθήκες (5.1) και (5.2) είναι υποθέσεις μακρινού πεδίου. Η συνθήκη (5.2) υποδηλώνει οι γωνίες θ και ϕ στο σχήμα (5.1) δεν θα αλλάζουν σημαντικά αν το κέντρο του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων μετακινηθεί κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου. Οι συνθήκες (5.3) και (5.4) επιτρέπουν στο κύλινδρο να θεωρηθεί ως μία απείρως λεπτή ηχητική πηγή με μορφή γραμμής, χωρίς να λαβαίνεται υπόψη η κίνησή του. Η συνθήκη (5.5) χρησιμοποιείται για να στηριχτεί η υπόθεση ότι ο ήχος που παράγεται στα άκρα του κυλίνδρου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος. Η συνθήκη (5.6) είναι μία υπόθεση χαμηλού αριθμού *Mach*. Αυτό επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση μία ομοιόμορφη ταχύτητα του ήχου c στο σύστημα αναφοράς του κυλίνδρου. Επιπλέον, οι διαταραχές που παράγονται στο ηχητικό πεδίο θεωρούνται μικρές, έτσι ώστε τα μη γραμμικά στοιχεία του ρευστού να θεωρηθούν αμελητέα, ενώ επίσης θεωρείται πως η διατομή του κυλίνδρου είναι ομοιόμορφη κατά το μήκος του, και ο κύλινδρος δεν συστέλλεται ή διαστέλλεται.

Μπορούμε να γράψουμε την (3.47)¹ σύμφωνα με τον *Curle*, [11] στην μορφή

$$\begin{aligned}
 c^2(\rho - \rho_0) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \left[\frac{T_{ij}}{4\pi r} \right] dV_y \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{l_i}{r} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} (\rho u_i u_j + p_{ij}) \right] dS_y \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{l_j}{r} [\rho u_i u_j + p_{ij}] dS_y \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

¹Χρησιμοποιώντας και την σχέση: (αρχή διατήρησης της ορμής) $l_i \frac{\partial}{\partial y_i} (\rho u_i u_j + p_{ij}) = -l_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i)$.

όπου $\rho - \rho_0 =$ διακυμάνσεις του πεδίου της πυκνότητας, $x_i =$ συντεταγμένες σημείων σύμφωνα με τον παρατηρητή ($i = 1, 2, 3$), $r = |x_i - y_i|$, και $l_i =$ τα συνημίτονα κατεύθυνσης κατά την εξωτερική κάθετη διεύθυνση ως προς τον όγκο του ρευστού ($(l_1, l_2, l_3) = n$)². Οι αγκύλες συμβολίζουν καθυστέρηση χρόνου $t - r/c$.

Τα τυρβώδη φαινόμενα στο ρευστό θεωρούμε πως εμφανίζονται μέσα στον όγκο V , στον οποίο ένα αντικείμενο κλειστής επιφάνειας S είναι εντοπισμένο. Το ηχητικό πεδίο μπορεί να θεωρηθεί σαν αυτό που θα παραγόταν σε ένα ομοιόμορφο ακουστικό μέσο σε ηρεμία πάνω στο οποίο ενεργούν:

- i. Μία κατανομή τετραπόλων δύναμης T_{ij} κατανεμημένων παντού στη ροή.
- ii. Πηγές κατανεμημένες γύρω από το εσωτερικό σύνορο S με ισχύ ίση με το ρυθμό μεταβολής της τοπικής μάζας με ροή προς τα έξω από το S και
- iii. Δίπολα κατανεμημένα γύρω από το S με ισχύ ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής προς τα έξω από το S .

Από την ανάλυση στο προηγούμενο κεφάλαιο (κεφάλαιο 4) ξέρουμε ότι για μικρούς αριθμούς *Mach* οι τετραπολικές πηγές είναι δυνατόν να αγνοηθούν, αφού η συμβολή στην παραγωγή ήχου των τετραπολικών πηγών είναι πολύ

²Υπενθυμίζουμε πως $u_i =$ οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού, $i = 1, 2, 3$, $\rho u_i =$ η πυκνότητα ορμής (*momentum density*), $y_i =$ οι συντεταγμένες της σημειακής πηγής, $x_i =$ οι συντεταγμένες του σημείου που βρίσκεται ο παρατηρητής, και $p_{ij} =$ ο ταυιστής τάσης συμπίεσης (*compressive stress tensor*).

μικρότερη από αυτή των διπολικών και πολύ περισσότερο των μονοπολικών. Οπότε, οι τετραπολικές πηγές καθίστανται αμελητέες θέτοντας $T_{ij} = 0$. Θεωρούμε στη συνέχεια ότι είμαστε σε αυτήν την περίπτωση.

Ένας περιορισμός της εξίσωσης (5.7) είναι το ότι η επιφάνεια S , είναι ακίνητη στο χώρο. Αυτό συνεπάγεται πως οι λύσεις της (5.7) εφαρμόζονται μόνο σε κατασκευές που είναι σε ηρεμία ή εκτελούν μόνο από μικρές ταλαντώσεις. Ωστόσο, οι *Frost* και *Harper*, [19], έχουν αποδείξει ότι για μία ταλαντώμενη σφαίρα, οι κινήσεις της επιφάνειάς της εισάγουν όρους οι οποίοι είναι μικρότεροι από τη λύση της (5.7) της τάξης $(D/\lambda)^2$, όπου D είναι οι διαστάσεις της διατομής και λ είναι το μήκος κύματος του ήχου. Οπότε είναι λογικό στο απόμακρο πεδίο ($D/\lambda \ll 1$) να εφαρμόζουμε κατευθείαν την (5.7), ακόμα και σε περιπτώσεις όπου το πλάτος ταλάντωσης είναι της ίδιας διάστασης με την διατομή.

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (5.7) είναι δυνατόν να απλοποιηθεί αν αντικαταστήσουμε σ' αυτήν την αρχή διατήρησης της ορμής³. Αν τα αποτελέσματα λόγω της συμπίεστικότητας του ρευστού θεωρηθούν αμελητέα δηλαδή $\rho = \text{σταθερά}$, που είναι λογικό για μία ροή χαμηλού αριθμού *Mach*, η εξίσωση (5.7) γίνεται

$$\rho - \rho_0 = -\frac{\rho_0}{4\pi c^2} \int_S \frac{l_i}{r} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right] dS_y + \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{l_j}{r} [\rho_0 u_i u_j + p_{ij}] dS_y \quad (5.8)$$

υπενθυμίζουμε πως οι αγκύλες συμβολίζουν την “καθυστέρηση χρόνου” $t - r/c$ και $r = r(x, y) = |x - y|$, εδώ έχουμε πάρει $\rho = \text{σταθερά}$ στο S . Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι μέσα στο χωρίο V που περικλείεται μέσα

³ $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial y_i}(p_{ij} + \rho u_i u_j) = 0$

στο S ικανοποιούνται οι αρχές διατήρησης της μάζας και της ορμής και ότι $\rho = \text{σταθερά}$. Οπότε από το θεώρημα απόκλισης το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (5.8), γίνεται

$$\begin{aligned} \int_S \frac{l_i}{r} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right] dS_y &= - \int_V \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right] \frac{1}{r} dV_y = \\ &= - \int_V \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial y_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{(x_i - y_i)}{r} \right] + \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} \right] \frac{(x_i - y_i)}{r^3} \right\} dV_y \end{aligned} \quad (5.9)$$

Η μορφή της (5.8) προέκυψε χρησιμοποιώντας και το γεγονός ο,τι η $\partial u_i / \partial t$ είναι υπολογισμένη με καθυστέρηση χρόνου, οπότε

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{1}{r} f(y_i, t - \frac{r}{c}) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial y_i} - \left(\frac{1}{r^2} f + \frac{1}{cr} \frac{\partial f}{\partial (t - \frac{r}{c})} \right) \frac{\partial r}{\partial y_i}. \quad (5.10)$$

Το πρόσημο της εξίσωσης (5.9) προκύπτει από τον ορισμό της κατεύθυνσης των εξωτερικών διανυσμάτων l_i . Ο πρώτος όρος του ολοκληρώματος της σχέσης (5.9) εξαφανίζεται λόγω της ασυμπίεστότητας που υποθέσαμε (πράγμα που υποδηλώνει ότι $\partial u_i / \partial y_i = 0$ στο V και $u_i l_i = 0$ στο S , βλέπε και [7]).

Παίρνοντας το δεύτερο ολοκλήρωμα της (5.8) και εφαρμόζοντας την $\partial / \partial x_i$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{l_j}{r} [\rho_0 u_i u_j + p_{ij}] dS_y &= \\ - \int_S l_j \left\{ \frac{(x_i - y_i)}{cr^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 u_i u_j + p_{ij}) \right] + \frac{(x_i - y_i)}{r^3} [\rho_0 u_i u_j + p_{ij}] \right\} dS_y. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Θεωρούμε τώρα τη περίπτωση του μακρινού πεδίου δηλαδή $x_i \gg y_i$.

Όταν η τυπική διάσταση της διατομής του σώματος D , που περιέχεται από την επιφάνεια S , είναι τέτοια ώστε $D \ll c/\omega$, όπου ω η τυπική συχνότητα του ήχου, ο όρος καθυστέρησης του χρόνου $r(x, y)/c$ μπορεί να γραφεί $r(x)/c$ για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Θέτουμε

$$t' = t - \frac{r(x)}{c},$$

$$p_i = -l_j p_{ij}$$

και θεωρούμε ότι $x_i \gg y_i$ (η απόσταση σε σημείο του πεδίου θεωρείται να είναι μεγάλο συγκριτικά με το μέγεθος του σώματος). Αφού αντικαθιστήσουμε τις (5.11) και (5.9) στην (5.8), και ανακαλέσουμε την υπόθεση ασυμπίεστότητας (σύμφωνα με την οποία $u_i l_i = 0$ στο S και $\partial u_i / \partial y_i = 0$ στο V), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \rho - \rho_0 &= \frac{\rho_0 x_i}{4\pi c^3 r^2} \int_V \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(y, t') dV_y + \frac{\rho_0 x_i}{4\pi c^2 r^3} \int_V \frac{\partial u_i}{\partial t}(y, t') dV_y \\ &- \frac{x_i}{4\pi c^3 r^2} \int_S \frac{\partial p_i}{\partial t}(y, t') dS_y - \frac{x_i}{4\pi c^2 r^3} \int_S p_i(y, t') dS_y \\ &- \frac{\rho_0 x_i}{4\pi c^3 r^2} \int_S l_j \frac{\partial u_i u_j}{\partial t}(y, t') dS_y \\ &- \frac{\rho_0 x_i}{4\pi c^2 r^3} \int_S l_j u_i u_j(y, t') dS_y. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Εφόσον το σώμα που περιέχεται μέσα στο S θεωρείται ασυμπίεστο, οι τελευταίοι δύο όροι της σχέσης (5.12) μηδενίζονται και επομένως έχουμε την σχέση:

$$\begin{aligned} \rho - \rho_0 &= \frac{\rho_0 x_i}{4\pi c^3 r^2} \int_V \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(y, t') dV_y + \frac{\rho_0 x_i}{4\pi c^2 r^3} \int_V \frac{\partial u_i}{\partial t}(y, t') dV_y \\ &- \frac{x_i}{4\pi c^3 r^2} \int_S \frac{\partial p_i}{\partial t}(y, t') dS_y - \frac{x_i}{4\pi c^2 r^3} \int_S p_i(y, t') dS_y. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Αν η διάμετρος του σώματος είναι μικρή σε σύγκριση με το μήκος κύματος του ήχου στην συχνότητα που μας ενδιαφέρει, τα ολοκληρώματα της σχέσης (5.13) μπορούν να υπολογιστούν χωρίς να δώσουμε σημασία στο σχήμα της διατομής. Αν το σώμα έχει ένα κεντρικό άξονα που εκτείνεται από $z = 0$ έως $z = L$, τότε η u_i παίρνει τις τιμές πάνω στον άξονα.

Η δύναμη ανά μονάδα μήκους που ασκείται από το σώμα στο ρευστό είναι

$$F_i = - \int_{\sigma} p_i(y, t') ds$$

όπου το σ συμβολίζει μία γραμμή ολοκλήρωσης πάνω στο σύνορο της διατομής (*cross-section*). Πρέπει να σημειώσουμε πως για μικρές ακουστικές διαταραχές, οι διακυμάνσεις της πυκνότητας είναι ανάλογες με τις διακυμάνσεις της πίεσης:

$$\rho - \rho_0 = (p - p_0)/c^2, \quad (5.14)$$

Αν προσεγγίσουμε την u_i με V_i , την ταχύτητα του άξονα του σώματος υπολογισμένη σε μία “καθυστέρηση χρόνου”, τελικώς καταλήγουμε στον τύπο

$$p - p_0 = \frac{x_i}{4\pi r^2} \int_0^L \left[\frac{\rho_0 A}{c} \frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial F_i}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\rho_0 A \frac{\partial V_i}{\partial t} + F_i \right) \right] dz. \quad (5.15)$$

Σ’ αυτό τον τύπο V_i είναι η ταχύτητα του άξονα του σώματος, και τα V_i και F_i είναι υπολογισμένα με καθυστέρηση χρόνου. Αυτή είναι η θεμελιώδης εξίσωση για την αεροδυναμική ηχητική πίεση (p) που παράγεται από ένα κινούμενο σώμα, το οποίο ασκεί μία δύναμη σε ένα ρευστό άπειρου όγκου.

Μια άλλη μορφή της τελευταίας εξίσωσης, (στην οποία υπολογίζεται η ηχητική πίεση που εκπέμπεται από τον κύλινδρο - βλέπε *Lighthill*, [30] και

Koopman, [28]) χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι και η:

$$p = \frac{\sin \theta \cos \phi}{4\pi Rc} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\rho A \frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2} - \frac{\partial F_y}{\partial t} + \frac{c}{R} \left(\rho A \frac{\partial V_y}{\partial t} - F_y \right) \right) dz + \frac{\sin \theta \sin \phi}{4\pi Rc} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\rho A \frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} - \frac{\partial F_x}{\partial t} + \frac{c}{R} \left(\rho A \frac{\partial V_x}{\partial t} - F_x \right) \right) dz. \quad (5.16)$$

Συμβολίζουμε με:

$V_1 = V_x$ η ταχύτητα του άξονα (του κυλίνδρου) παράλληλη στην ροή,

$V_2 = V_y$ η κάθετη στην ελεύθερη ροή συνιστώσα της ταχύτητας του άξονα,

$F_1 = F_x$ η δύναμη που ασκείται στο ρευστό παράλληλη στην ελεύθερη ροή

$F_2 = F_y$ η δύναμη που ασκείται στο ρευστό κάθετη στην ελεύθερη ροή.

Το εμβαδόν της διατομής του κυλίνδρου είναι A . Οι ποσότητες που είναι μέσα στις αγκύλες [] είναι υπολογισμένες με καθυστέρηση χρόνου, και πιο συγκεκριμένα για το χρόνο που απαιτείται για τον ήχο να ταξιδέψει την απόσταση $R - z \cos \theta$, με μία ταχύτητα c , από το σημείο z του κύλινδρου έως τον παρατηρητή, βλέπε και σχήμα (5.1). Η καθυστέρηση χρόνου είναι:

$$t' = t - \frac{R}{c} + \frac{z \cos \theta}{c} \quad (5.17)$$

Ποσότητες σε κυλινδρικές και Καρτεσιανές συντεταγμένες έχουν χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση (5.18) για ευκολία στην ανάλυση,

$y = R \sin \theta \cos \theta$ η y (κάθετη) συντεταγμένη του παρατηρητή

$x = R \sin \theta \cos \phi$ η x (κατά μήκος) συντεταγμένη

$z = R \cos \theta$ η απόσταση κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου.

Η ολική ηχητική πίεση της εξίσωσης (5.16) είναι το άθροισμα του ήχου λόγω των δυνάμεων του ρευστού και της ταλάντωσης του κυλίνδρου κάθετα στην ελεύθερη ροή (πρώτος όρος), συν τον ήχο εξαιτίας των δυνάμεων του ρευστού και της ταλάντωσης του κυλίνδρου παράλληλα στην ελεύθερη ροή (δεύτερος όρος). Ο εκπεμπόμενος ήχος περιέχει απόμακρου πεδίου συνιστώσες της πίεσης, οι οποίες εξασθενούν σε αναλογία με τον όρο $1/R$, και εγγύς πεδίου συνιστώσες της πίεσης οι οποίες εξασθενούν σε αναλογία με τον όρο $1/R^2$. Ο λόγος του εγγύς και του απόμακρου πεδίου του ήχου είναι

$$\frac{p_{NF}}{p_{FF}} = \frac{c}{\omega R} = \frac{\lambda}{2\pi R} \quad (5.18)$$

αν η κίνηση του κυλίνδρου και οι δυνάμεις του ρευστού είναι αρμονικές στο χρόνο με συχνότητα ω . Εφόσον προηγουμένως θεωρήθηκε ότι $\lambda/R \ll 1$ (εξίσωση 5.1), οι συνιστώσες του εγγύς πεδίου του ήχου είναι πολύ μικρότερες από τις συνιστώσες του απόμακρου πεδίου, και επομένως μπορούμε να τις αγνοήσουμε στην ανάλυση του απόμακρου πεδίου.

Ωστόσο οι δυνάμεις του ρευστού εξαιτίας της παραγωγής στροβίλων σε ένα κύλινδρο, που ενεργούν παράλληλα στη ελεύθερη ροή, είναι γενικά μικρότερες από το 10% των δυνάμεων που ενεργούν κάθετα. Το πλάτος της ταλάντωσης του κυλίνδρου παράλληλα στην ελεύθερη ροή είναι γενικά πολύ μικρότερο από το πλάτος της ταλάντωσης του κυλίνδρου κάθετα στην ροή. Αν $R \gg \lambda$, $|F_y| \gg |F_x|$ και $|V_y| \gg |V_x|$ τότε οι εξισώσεις (5.16) και (5.17)

γίνονται (βλέπε και *Fitzpatrick-Strasberg*, [16], και *Leehey-Hanson*, [29])

$$p = \frac{\sin \theta \cos \phi}{4\pi R c} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\rho A \frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2}(z, t') - \frac{\partial F_y}{\partial t}(z, t') \right) dz +$$

$$+ \frac{\sin \theta \sin \phi}{4\pi R c} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\rho A \frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2}(z, t') - \frac{\partial F_x}{\partial t}(z, t') \right) dz. \quad (5.19)$$

ή

$$p = \frac{\sin \theta \cos \phi}{4\pi R c} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\rho A \frac{\partial^2 V_y}{\partial t^2}(z, t') - \frac{\partial F_y}{\partial t}(z, t') \right) dz \quad (5.20)$$

όπου

$$t' = t - \frac{R}{c} + \frac{z \cos \theta}{c}. \quad (5.21)$$

Αυτές οι εξισώσεις μας δίνουν τον ήχο του απόμακρου ηχητικού πεδίου που παράγεται εξαιτίας των δυνάμεων του ρευστού και της αντίδρασης του κυλίνδρου κάθετα στην ελεύθερη ροή. Στην ανάλυση που ακολουθεί στις επόμενες παραγράφους λύνονται αυτές οι εξισώσεις για διάφορα μοντέλα των V_y και F_y (βλέπε παραγράφους 5.3 και 5.4).

Οι τρεις συνιστώσες της ακουστικής έντασης ορίζονται ως

$$I_i = \overline{p u_i}, \quad i = R, \theta, \phi, \quad (5.22)$$

όπου u_i είναι οι διακυμάνσεις-διαταράξεις της ταχύτητας στο ρευστό λόγω του εκπεμπόμενου ήχου, και η παύλα πάνω από τον όρο $\overline{p u_i}$ συμβολίζει τον μέσο όρο σε πολλούς κύκλους ταλάντωσης. Για την εκπομπή ήχου στο μακρινό πεδίο το οποίο είναι αρμονικό με το χρόνο, μπορεί να δειχτεί (βλέπε [7]) ότι

$$u_R = p/(\rho c) \quad (5.23)$$

$$u_\theta = u_\phi = 0. \quad (5.24)$$

Οπότε,

$$I_R = \overline{p^2}/(\rho c) \quad (5.25)$$

$$I_\theta = I_\phi = 0. \quad (5.26)$$

Η ολική ισχύς που εκπέμπεται από τον κύλινδρο στο ρευστό είναι

$$\Pi = \int_S I_R \hat{r} \cdot d\vec{s} + \int_S I_\theta \hat{\theta} \cdot d\vec{s} + \int_S I_\phi \hat{\phi} \cdot d\vec{s} \quad (5.27)$$

όπου το S ορίζει μία επιφάνεια που περιέχει τον κύλινδρο, $d\vec{s}$ είναι ένα στοιχείο του S , με κατεύθυνση διανύσματος δοσμένη από το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα, και \hat{r} , $\hat{\theta}$, και $\hat{\phi}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις r , θ , και ϕ διευθύνσεις αντίστοιχα. Η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς στο απόμακρο πεδίο είναι δυνατόν να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας το I_R σε σφαίρα ακτίνας R :

$$\Pi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_R R^2 \sin \theta d\phi d\theta. \quad (5.28)$$

Στην επόμενη παράγραφο, η ακουστική ένταση και η ηχητική ισχύς υπολογίζονται για έναν ακίνητο κύλινδρο που παράγει στροβίλους.

5.3 Ακίνητος κύλινδρος με συντονισμένη παραγωγή στροβίλων

Αν συμβολίσουμε με f την συχνότητα εκπομπής στροβίλων (*vortex shedding frequency*) σε *Hz* τότε

$$f = \frac{SU}{D}$$

όπου U είναι η ταχύτητα ροής, D η ταχύτητα του κυλίνδρου, και S ο αριθμός *Strouhal*⁴. Το D εδώ αν πούμε ότι μετράται σε μέτρα, η ταχύτητα U έχει ως μονάδα μέτρησης τα μέτρα/δευτερόλεπτα. Αν οι στρόβιλοι που δημιουργούνται είναι σε φάση κατά μήκος της έκτασης του κυλίνδρου και οι δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό είναι αρμονικές με κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi f$, τότε οι δυνάμεις άντωσης και οπισθέλκουσες-αντίστασης (*in lift and drag*) που ασκούνται στο ρευστό είναι, (βλέπε [7])

$$F_y = \frac{1}{2}\rho U^2 D C_L \sin \omega t, \quad (5.29)$$

$$F_x = \frac{1}{2}\rho U^2 D C_D + \frac{1}{2}\rho U^2 C_d \sin(2\omega t + \beta) \quad (5.30)$$

όπου C_L είναι ο συντελεστής της ταλαντωτικής άντωσης (*oscillating lift*), C_D είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας (*steady drag*) και η C_d είναι ο συντελεστής της ταλαντωτικής οπισθέλκουσας (*oscillating drag*), ω είναι η κυκλική συχνότητα παραγωγής στρόβιλων, και β η γωνία φάσης.

Πειράματα και θεωρία έχουν δείξει πως η ταλαντωτική συνιστώσα της οπισθέλκουσας έχει μία συχνότητα διπλάσια από αυτή της άντωσης. Πειραματικές μετρήσεις μας δείχνουν πως $C_D \sim 0.07C_L$ για κυλίνδρους και $C_d \sim 0.05C_L$ για ένα ισόπλευρο τρίγωνο τοποθετημένο να δείχνει προς τη ροή.

Αν ο κύλινδρος είναι ακίνητος, τότε $V_x = V_y = 0$, και ο εκπεμπόμενος ήχος παράγεται μόνο από τις ταλαντωτικές δυνάμεις του ρευστού πάνω

⁴Ο αριθμός *Strouhal*, S , είναι η σταθερά αναλογίας μεταξύ της συχνότητας εκπομπής στρόβιλων, f , και της ταχύτητας ελεύθερης ροής, U , διαιρεμένη από το μήκος του κυλίνδρου D

στον κύλινδρο. Αν αντικαθιστήσουμε τις (5.29) και (5.30) στην (5.16) και θεωρήσουμε τους όρους του εγγύς πεδίου αμελητέους ($R/\lambda \gg 1$), τότε οι όροι απόμακρου πεδίου της ηχητικής πίεσης παρατηρώντας και πως

$$t' = t - \frac{R}{c} + \frac{z \cos \theta}{c}$$

είναι

$$p(R, \theta, \phi) = -\frac{\sin \theta \cos \phi}{4Rc} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right) \rho U^3 L C_L S \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \\ - \frac{\sin \theta \sin \phi}{4Rc} \left(\frac{\sin 2\eta}{2\eta} \right) \rho U^3 L C_d S \cos \left[2\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) + \beta \right] \quad (5.31)$$

όπου

$$\eta = \frac{kL}{2} \cos \theta = \frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta,$$

ο αριθμός κύματος k είναι

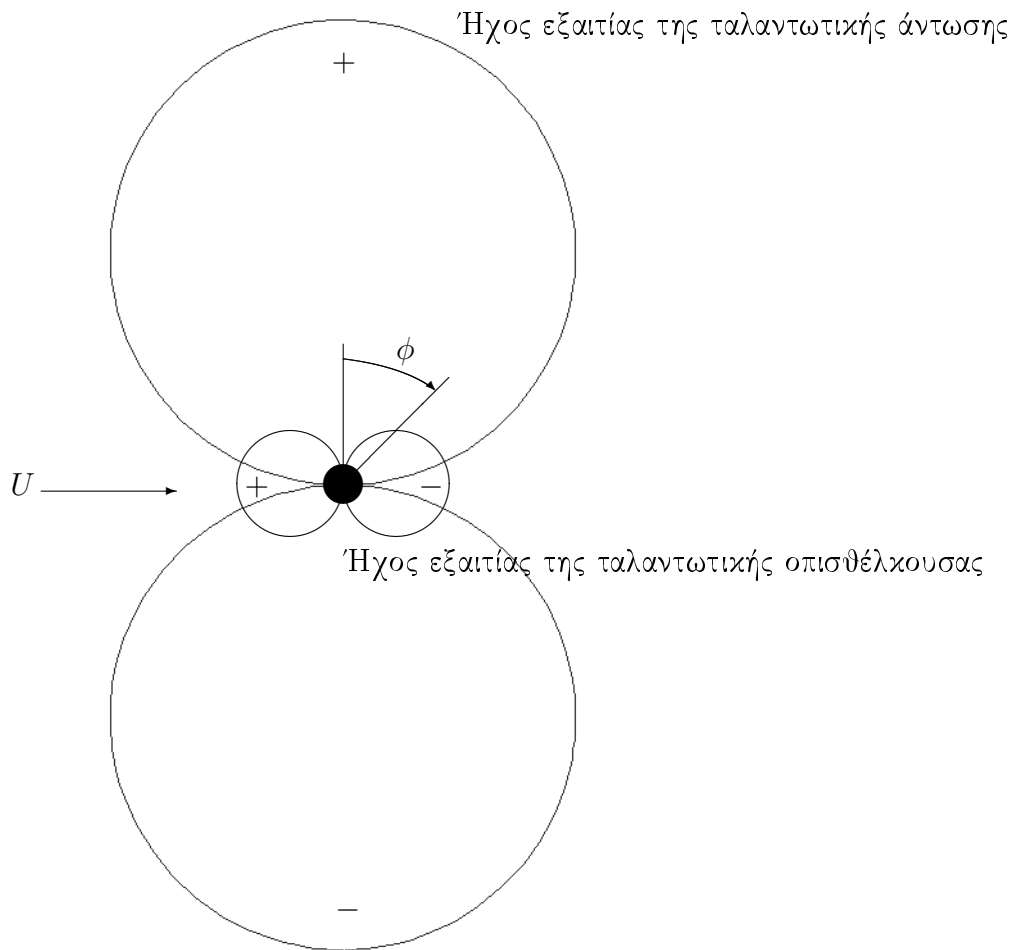
$$k = \omega/c = 2\pi/\lambda,$$

όπου $\omega = 2\pi SU/D$. Στην παραγωγή της (5.31) χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι έχουμε μακρινό πεδίο και πιο συγκεκριμένα ότι

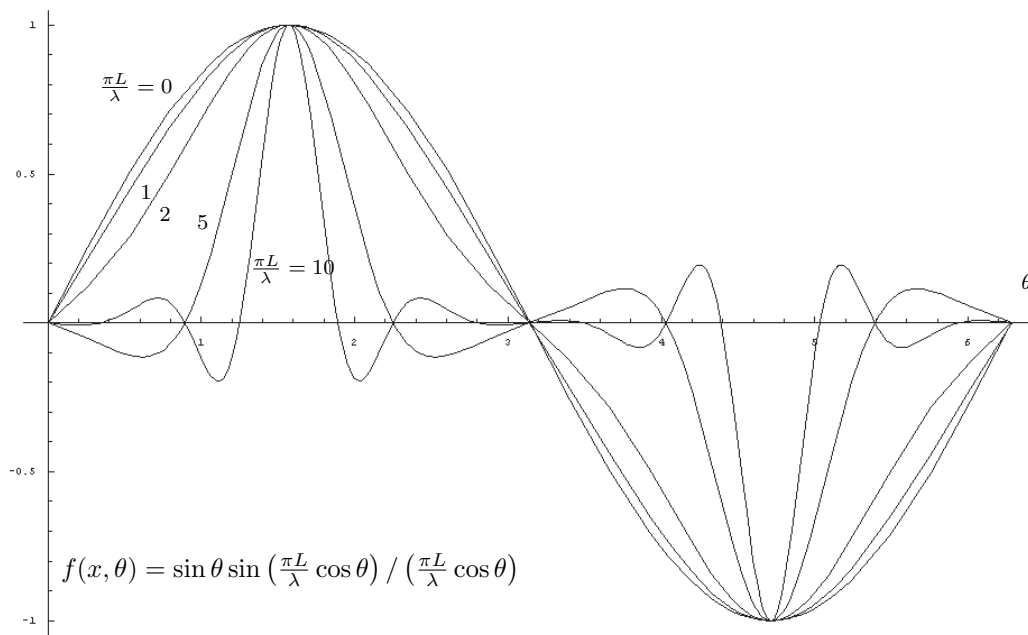
$$R \gg \lambda \gg D \gg B$$

όπου B το πλάτος της ταλάντωσης του κυλίνδρου.

Οι ισοσταθμικές καμπύλες της έντασης του ήχου όπως προβλέπονται από την σχέση (5.31) έχουν την μορφή του σχήματος 5.2. Ο ήχος εκπέμπεται προς κάθε κατεύθυνση. Αν το μήκος του κυλίνδρου είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος του ήχου, τότε ο κύλινδρος εκπέμπει ήχο όπως μία



Σχήμα 5.2: Οι ισοδυναμικές γραμμές της ηχητικής έντασης για ήχο παραγόμενο από ένα κύλινδρο



Σχήμα 5.3: Αύξηση της κατευθυντικότητας του εκπεμπόμενου ήχου με αυξανόμενο το λόγο του μήκους κυλίνδρου (L) προς το μήκος κύματος του ήχου (λ)

σημειακή διπολική ηχητική πηγή. Αν το μήκος του κυλίνδρου είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος κύματος του ήχου, τότε ο κύλινδρος εκπέμπει ήχο προς κάθε κατεύθυνση όπως μία γραμμή από δίπολα (*a line of dipoles*).

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της κατευθυντικότητας ενός κυματικού πεδίου. Υποθέτουμε πως κάποιος πετάει ένα βότσαλο μέσα σε μία ήσυχη λίμνη. Τώρα, υποθέτουμε πως, ένα μακρύ λείο κλαδί δέντρου πέφτει επίσης μέσα στη λίμνη. Το κλαδί είναι μία γραμμή πηγών (*line source*). Πρέπει να πούμε πως η γραμμή πηγών παράγει ένα υψηλής κατευθυντικότητας κυματικό πεδίο (*highly directional wave field*). Φυσικά, τα τρισδιάστατα ηχητικά πεδία είναι πιο περίπλοκα από τα δισδιάστατα κύματα στο νερό, αλλά και στις τρεις διαστάσεις ισχύει ο

		$\lambda(m)$		
Ρευστό	$c (m/sec)$	$f = 20Hz$	$f = 100Hz$	$f = 500Hz$
Αέρας	340	17	3.14	0.68
Νερό	1500	75	15	3.0
Ήλιο ($1000^\circ F$)	1800	90	18	3.6

Πίνακας 5.1: Μήκος κύματος του ήχου για τρία ρευστά ($\lambda = c/f$).

κανόνας: καθώς αυξάνεται το μήκος του κυλίνδρου έχουμε και αύξηση της κατευθυντικότητας. Το σχήμα 5.3 μας υποδεικνύει πώς η ηχητική ένταση που παράγεται από δυνάμεις ταλαντωτικής άντωσης (πρώτος όρος της (5.31)) γίνονται αυξανόμενης κατευθυντικότητας καθώς ο λόγος του μήκους κυλίνδρου προς το μήκος κύματος του ήχου αυξάνεται.

Καθώς ο λόγος του μήκους του κυλίνδρου προς το μήκος κύματος του ήχου μειώνεται,

$$\lim_{L/\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin \eta}{\eta} = \lim_{L/\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin 2\eta}{2\eta} = 1 \quad (5.32)$$

και το πρότυπο εκπομπής είναι αυτό του σημειακού διπόλου. Γραμμές σταθερής ηχητικής πίεσης είναι φανερές στο σχήμα 5.2 για μία κάθετη τομή στον άξονα του κυλίνδρου. Οι λοβοί είναι χαρακτηριστικοί των διπολικών ηχητικών πηγών. Εφόσον η συνιστώσα της ταλαντωτικής οπισθέλκουσας είναι κατά πολύ μικρότερη από την συνιστώσα της ταλαντωτικής άντωσης, ο ήχος που παράγεται εξαιτίας της ταλαντωτικής οπισθέλκουσας συνήθως θεωρείται αμελητέος οπότε αναλύουμε τον ήχο εξαιτίας της ταλαντωτικής άντωσης. Το μήκος κύματος του ήχου για τρεις συχνότητες είναι φανερές στον πίνακα 5.1.

Στο μακρινό πεδίο, μόνο η ακτινική συνιστώσα διάδοσης του ήχου είναι σημαντική. Η ηχητική ένταση του μακρινού πεδίου εξαιτίας της ταλαντωτικής άντωσης (η ένταση I_R) ορίζεται από την σχέση (5.25) ως

$$I_R = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho c}, \quad (5.33)$$

όπου $\langle p^2 \rangle$ είναι η μέση τιμή του p^2 , οπότε βρίσκουμε από τη σχέση (5.31) ότι

$$\begin{aligned} I_R &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T p^2 dt / \rho c = \\ &= -\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{32c^3 R^2} \rho U^6 L^2 C_L^2 S^2 \left(\frac{\sin \eta}{\eta} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Η κατανομή του ήχου εξαιτίας των δυνάμεων ταλαντωτικής οπισθέλκουσας έχει αγνοηθεί. Η ένταση του ήχου είναι ανάλογη με την ταχύτητα της ελεύθερης ροής υψωμένη στην έκτη δύναμη. Πειράματα έχουν επαληθεύσει την U^6 εξάρτηση της ηχητικής έντασης (αναφορά [36]).

Η ολική ισχύς που εκπέμπεται στο μακρινό πεδίο (εξίσωση (5.28)) είναι

$$\Pi_S = \frac{\pi \rho U^6 L^2 C_L^2 S^2}{24c^3} \quad (5.35)$$

για $\lambda \gg L$. Η ισχύς που εξέρχεται από το ρευστό λόγω της συνιστώσας της οπισθέλκουσας είναι

$$\Pi_D = F_D U L = \frac{1}{2} \rho U^3 D C_D L. \quad (5.36)$$

Ο λόγος της εκπεμπόμενης ηχητικής ισχύος προς αυτής που χάνεται λόγω της οπισθέλκουσας είναι

$$\frac{\Pi_S}{\Pi_D} = \frac{\pi S^2}{12} \left(\frac{U}{c} \right)^3 \frac{C_L^2 L}{C_D D}. \quad (5.37)$$

Για ροές με μικρούς αριθμούς *Mach*, $U/c \ll 1$, η εκπεμπόμενη ηχητική ισχύς είναι ένα μικρό κλάσμα της ισχύος που χάνεται σε οπισθέλκουσα. Ο μηχανισμός παραγωγής Αιολικών τόνων είναι οπότε ένας ασήμαντος εκπομπέας αεροδυναμικού ήχου.

Τέλος το επίπεδο ηχητικής πίεσης (*SPL*), ορίζεται ως εξής

$$10 \log_{10} \frac{\langle p^2 \rangle}{p_{ref}},$$

και δίνεται τότε σύμφωνα με τον τύπο της I_R από την σχέση

$$SPL = 10 \log_{10} I_R + 120.2(dB). \quad (5.38)$$

5.4 Ακίνητος κύλινδρος με μερικώς συντονισμένη παραγωγή στροβίλων

5.4.1 Οι εξισώσεις για τον εκπεμπόμενο ήχο

Γενικά, από ένα ακίνητο κύλινδρο δεν παράγονται πλήρως συντονισμένοι στρόβιλοι (*fully correlated vortex shedding*). Αν και οι στρόβιλοι κυρίως αποβάλλονται στην συχνότητα *Strouhal*, $\omega = 2\pi SU/D$, υπάρχουν και τυχαία στοιχεία στην διαδικασία παραγωγής. Η φάση και η συχνότητα (παραγωγής) είναι δυνατόν να μεταβάλλεται κατά μήκος ενός μεγάλου μήκους στάσιμου κυλίνδρου. Τυπικά, το μήκος συντονισμού είναι μεταξύ δύο και πέντε διαμέτρων ενός στάσιμου κυλίνδρου κάθετου στη ροή. Σ' αυτή τη παράγραφο, η μέση τετραγωνική εκπεμπόμενη ηχητική πίεση εξαιτίας της μερικώς συντονισμένης παραγωγής στροβίλων από ένα ακίνητο κύλινδρο υ-

πολογίζεται χρησιμοποιώντας μία στάσιμη, σε περιορισμένη ζώνη, τυχαία διαδικασία, ως ένα μοντέλο παραγωγής στροβίλων.

Το μέσο τετράγωνο της πίεσης του ηχητικού πεδίου που παράγεται από δυνάμεις ταλαντωτικής άντωσης σε έναν ακίνητο κύλινδρο παράγεται από την σχέση (5.20), με $V_y = 0$:

$$\overline{p^2} = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{16\pi^2 c^2 R^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t'_1) \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t'_2) dz_1 dz_2 dt \quad (5.39)$$

όπου

$$t'_1 = t - \frac{R}{c} + \frac{z_1 \cos \theta}{c}, \quad (5.40)$$

$$t'_2 = t - \frac{R}{c} + \frac{z_2 \cos \theta}{c}.$$

Πριν υπολογιστεί η μέση τετραγωνική πίεση, πρέπει να βρεθεί ένα μοντέλο για τις δυνάμεις άντωσης των μερικώς συντονισμένων στροβίλων. Χρησιμοποιώντας μία, σε περιορισμένη ζώνη, τυχαία διαδικασία ως ένα μοντέλο για την παραγωγή στροβίλων, είναι δυνατό να διαχωρίσουμε την επίδραση της καθυστέρησης χρόνου (σχέσεις (5.40)), από το χρονικό μέσο όρο της εξίσωσης (5.39) όπως θα δούμε παρακάτω.

Η δύναμη άντωσης μερικώς συντονισμένης παραγωγής στροβίλων στον κύλινδρο μοντελοποιείται ως σχεδόν αρμονική στο χρόνο, με μία συνιστώσα τυχαίας μεταβολής της συχνότητας $\Delta\omega$, η οποία είναι πολύ μικρότερη από την συχνότητα παραγωγής ω . Το $\Delta\omega$ μεταβάλλεται με το χρόνο και με την

απόσταση, αλλά η μέση τιμή του είναι μηδέν σε οποιοδήποτε σημείο. Οπότε, η ω είναι το κέντρο των συχνοτήτων παραγωγής οι οποίες παίρνουν τιμές σε διάστημα πλάτους $2\Delta\omega$. Η στροβιλώδης δύναμη άντωσης ανά μονάδα μήκους είναι

$$F_y(z, t') = F_0(z) \sin[(\omega + \Delta\omega)t']. \quad (5.41)$$

Θεωρείται ότι ο μέσος όρος της διαφοράς φάσης της παραγωγής στροβίλων, ανάμεσα σε δύο σημεία του κυλίνδρου είναι μηδέν. Αυτό είναι λογικό, αν ο άξονας του κυλίνδρου είναι κάθετος στη ροή. Αν ο κύλινδρος έχει κλίση ως προς τη ροή, η συνιστώσα της ελεύθερης ροής, παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου, προκαλεί μία προοδευτική διάτμηση (*shearing*) των στροβίλων κατά μήκος της έκτασής του. Αυτό αντιστοιχεί σε μία γωνία φάσης, της οποίας η μέση τιμή εξαρτάται από τη θέση (*spanwise location*) και δεν θα συμπεριληφθεί σ' αυτή την ανάλυση. Ωστόσο, ο εκπεμπόμενος ήχος είναι ανεξάρτητος από το μέσο όρο της φάσης παραγωγής στροβίλων, αν το μήκος συντονισμού είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος του εκπεμπόμενου ήχου.

Παίρνοντας την παράγωγο της εξίσωσης (5.41),

$$\frac{\partial F_y}{\partial t}(z_i, t'_i) = F_0(z_i)[\omega + \Delta\omega(z_i, t)](\cos \phi_i \cos \psi_i - \sin \phi_i \sin \psi_i), \quad (5.42)$$

όπου

$$\begin{aligned} \phi_i &= [\omega + \Delta\omega(z_i, t)](t - R/c), \\ \psi_i &= [\omega + \Delta\omega(z_i, t)]z_i \cos \theta/c. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t'_1) \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t'_2) &= F_0(z_1) F_0(z_2) [\omega + \Delta\omega(z_1, t)] [\omega + \Delta\omega(z_2, t)] \\ &\quad (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 \\ &\quad - \sin \phi_1 \cos \phi_2 \sin \psi_1 \cos \psi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \psi_1 \sin \psi_2). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Παίρνοντας το μέσο όρο αυτής της εξίσωσης σε ένα κύκλο παραγωγής στροβίλων έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t'_1) \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t'_2) dt &= \\ \frac{\cos[\omega(z_1 - z_2) \cos \theta / c]}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t) \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t) dt &+ 0 \left(\frac{\Delta\omega T}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η μέση τιμή του $\Delta\omega$ είναι μηδέν σε κάθε σημείο. Αν στην εξίσωση (5.45) πάρουμε το μέσο όρο σε πολλούς κύκλους παραγωγής στροβίλου, τότε το λάθος που γίνεται όταν διαχωρίζουμε την επίδραση της καθυστέρησης χρόνου από το μέσο όρο του χρόνου,

$$\overline{\frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t'_1) \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t'_2)} = \overline{\frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t) \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t) \cos[\omega(z_1 - z_2) \cos \theta / c]}, \quad (5.46)$$

είναι της τάξης $\Delta\omega/\omega$. Αυτό το λάθος μπορεί να αγνοηθεί για περιορισμένη ζώνη παραγωγής στροβίλων. Αν ο συντελεστής συντονισμού (*spanwise correlation coefficient*) ορίζεται ως

$$r(z_1, z_2) = \frac{\overline{\frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t) \frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t)}}{\left[\overline{\left(\frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t) \right)^2} \right]^{1/2} \left[\overline{\left(\frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t) \right)^2} \right]^{1/2}} \quad (5.47)$$

τότε η μέση τετραγωνική ηχητική πίεση μπορεί να βρεθεί από την σχέση (5.39):

$$\overline{p^2} = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{16\pi^2 c^2 R^2} \left[\left(\frac{\partial F_y}{\partial t}(z_1, t) \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{\partial F_y}{\partial t}(z_2, t) \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \iint_{-L/2}^{L/2} r(z_1, z_2) \cos[\omega(z_1 - z_2) \cos \theta / c] dz_1 dz_2. \quad (5.48)$$

Αν η συνάρτηση συντονισμού r και η ρίζα του μέσου τετραγώνου των δυνάμεων άντωσης μπορούν να υπολογιστούν, τότε αυτή η εξίσωση δίνει το μέσο τετράγωνο της εκπεμπόμενης ηχητικής πίεσης του απόμακρου πεδίου εξαιτίας της ταλαντωτικής άντωσης. Η εξίσωση (5.48) είναι έγκυρη, αν το εύρος της παραγωγής στροβίλων (*bandwidth of vortex shedding*) είναι πολύ μικρότερο από την συχνότητα παραγωγής (*shedding frequency*), $\Delta\omega/\omega \ll 1$, και ο χρονικός μέσος όρος της φάσης εκπομπής στροβίλων δεν μεταβάλλεται κατά μήκος της έκτασης (*span*).

5.4.2 Εκπεμπόμενος ήχος με $\lambda \gg L$

Αν το μήκος κύματος του ήχου είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος του κυλίνδρου (το οποίο πειραματικά επαληθεύεται στην περίπτωση της κεραίας που μελετάμε),

$$\left[\frac{\omega(z_1 - z_2)}{c} \right]_{\max \text{ over } z} = 2\pi \frac{L}{\lambda} \ll 1, \quad (5.49)$$

τότε

$$\cos[\omega(z_1 - z) \cos \theta / c] \sim 1. \quad (5.50)$$

Αυτή η προσέγγιση απλοποιεί σημαντικά τους υπολογισμούς που απαιτούνται για να βρεθεί το μέσο τετράγωνο της ηχητικής πίεσης από την εξίσωση (5.48).

Η συνάρτηση συντονισμού για έναν μακρύ ακίνητο κύλινδρο είναι μόνο μια συνάρτηση της σχετικής απόστασης (*relative separation*) δύο σημείων του κυλίνδρου δηλαδή:

$$r(z_1, z_2) = r(z_1 - z_2) = r(z_2 - z_1). \quad (5.51)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.50) και (5.51), το χωρικό διπλό ολοκλήρωμα της εξίσωσης (5.48) για $\lambda \gg L$ γίνεται

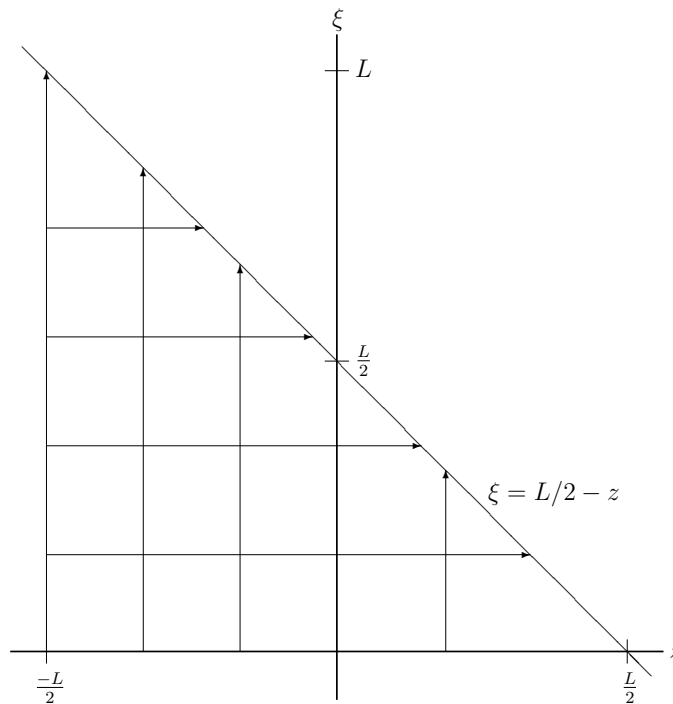
$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} r(z_1, z_2) \cos[\omega(z_1 - z_2) \cos \theta / c] dz_1 dz_2 = \\ & = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} r(z_1 - z_2) dz_1 dz_2 = \\ & = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{(-L/2)-z}^{(L/2)-z} r(\xi) d\xi dz = \\ & = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{(L/2)-z} r(\xi) d\xi dz + \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{(L/2)+z} r(\xi) d\xi dz, \end{aligned} \quad (5.52)$$

όπου

$$\xi = z_1 - z_2, \quad (5.53)$$

$$z = z_2. \quad (5.54)$$

Τα δύο διπλά ολοκληρώματα στην τελευταία γραμμή της εξίσωσης (5.52) είναι δυνατόν να υπολογιστούν αλλάζοντας την σειρά της ολοκλήρωσης. Η



Σχήμα 5.4: Περιοχή ολοκλήρωσης

περιοχή με τις διασταυρούμενες γραμμές του σχήματος 5.4 υποδεικνύει την περιοχή ολοκλήρωσης του πρώτου διπλού ολοκληρώματος της τελευταίας γραμμής της εξίσωσης (5.52). Η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει είτε ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς ξ από 0 έως $L/2 - z_1$ (κατακόρυφα βέλη) και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας το z από $-L/2$ έως $L/2$ (οριζόντια βέλη), ή αντιστρέφοντας την σειρά ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{(L/2)-z} r(\xi) d\xi dz &= \int_0^L \int_{-L/2}^{(L/2)-\xi} r(\xi) dz d\xi \\ &= \int_0^L (L - \xi) r(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Το δεύτερο διπλό ολοκλήρωμα στην τελευταία γραμμή της εξίσωσης (5.52)

δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Οπότε,

$$\int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} r(z_1 - z_2) dz_1 dz_2 = L_c(L - \gamma), \quad (5.56)$$

όπου το μήκος συντονισμού L_c και το κεντροειδές του συντονισμού γ είναι

$$L_c = 2 \int_0^L r(\xi) d\xi, \quad (5.57)$$

$$\gamma = \frac{\int_0^L \xi r(\xi) d\xi}{\int_0^L r(\xi) d\xi}. \quad (5.58)$$

Τα L_c και γ είναι φανερά και στο σχήμα (5.5). Το μήκος συντονισμού ορίζεται για ολοκλήρωση πάνω στο διάστημα $(0, L)$, και όχι στο $(0, \infty)$, το οποίο συχνά χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του μήκους συντονισμού. Αυτή η διάκριση δεν είναι σημαντική αν το μήκος συντονισμού είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του κυλίνδρου, διότι το γ είναι πάντα μικρότερο από το L_c .

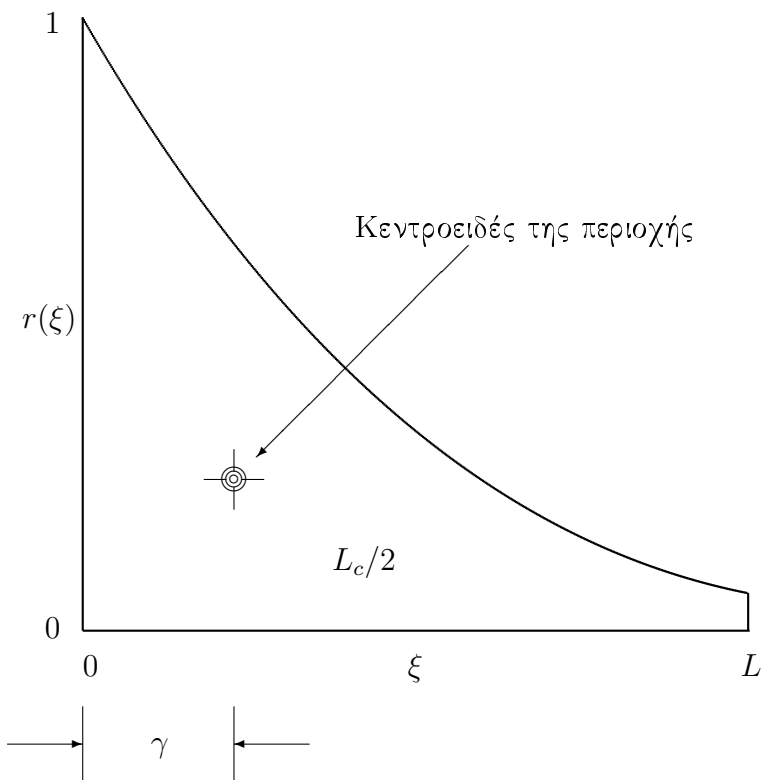
Ένας συντελεστής της ρίζας του μέσου τετραγώνου της άντωσης (*root mean square lift coefficient*) ορίζεται ως

$$\left[\left(\frac{\partial F_y}{\partial t} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \rho U^2 D \left(\overline{C_L^2} \right)^{1/2} \omega^2. \quad (5.59)$$

Εάν η κίνηση είναι προσδιορισμένη και αρμονική, η εξίσωση (5.29) μπορεί να χρησιμοποιηθεί με την (5.59) για να αποδείξουμε πως

$$\overline{C_L^2} = \frac{1}{2} C_L^2, \quad (5.60)$$

όπου το C_L είναι η σταθερά που περιγράφει το πλάτος των ταλαντωτικών συντονισμένων δυνάμεων άντωσης (εξίσωση (5.29)).



Σχήμα 5.5: Μήκος συντονισμού L_c και κεντροειδές γ ορισμένα σε όρους της συνάρτησης συντονισμού.

Αν οι εξισώσεις (5.56) και (5.59) αντικατασταθούν στην εξίσωση (5.48) τότε η ηχητική ένταση ($\overline{p^2}/\rho c$) του απόμακρου ηχητικού πεδίου, το οποίο εκπέμπεται από ένα ακίνητο κύλινδρο με μερικώς συντονισμένη παραγωγή στροβίλων με $\lambda \gg L$ είναι

$$I_R = \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi}{16c^3 R^2} \rho U^6 \overline{C_L^2} S^2 L_c (L - \gamma). \quad (5.61)$$

Αν η παραγωγή (αποβολή) στροβίλων είναι πλήρως συντονισμένη ($r(\xi) = 1$), και $\lambda \gg L$, οπότε $L_c = 2L$, $\gamma = L/2$, $\overline{C_L^2} = C_L^2/2$ και η εξίσωση (5.60) ανάγεται στην περίπτωση πλήρους συντονισμού της εξίσωσης (5.34). Αν το μήκος συντονισμού είναι πολύ μικρότερο από το μήκος του κυλίνδρου, τότε η ένταση του ήχου μειώνεται από την περίπτωση του πλήρους συντονισμού με το λόγο L_c/L .

Η ολική ηχητική ισχύς που εκπέμπεται στο απόμακρο πεδίο προκύπτει ολοκληρώνοντας την ένταση του ήχου, I_R , πάνω σε μία σφαίρα ακτίνας R (εξίσωση (5.28)). Το αποτέλεσμα είναι

$$\Pi = \frac{\pi U^6 \overline{C_L^2} S^2 L_c (L - \gamma)}{12c^3} \quad (5.62)$$

Είναι χαρακτηριστικό πως και στην περίπτωση παραγωγής πλήρως συντονισμένων στροβίλων (σχέση (5.34)) όπως και στην περίπτωση των μερικώς συντονισμένων στροβίλων (σχέση (5.62)) η ηχητική ένταση (και συνεπώς και η ισχύς) στο απόμακρο πεδίο είναι ανάλογη με την έκκτη δύναμη της ταχύτητας ροής, U^6 . Αν το μήκος συντονισμού είναι κατά πολύ λιγότερο από το μήκος του κυλίνδρου, τότε η ηχητική ισχύς στο απόμακρο πεδίο μειώνεται από την περίπτωση πλήρους συντονισμού με το λόγο L_c/L .

Αριθμός <i>Reynolds</i> (Ud/ν)	<i>r.m.s.</i> Συντελεστής άντωσης	Μήκος συντονισμού (διάμετροι)	Κεντροειδές συντονισμού (διάμετροι)	Προβλεπόμενη ένταση στο $r = 36 \text{ in. (dB)}$	Μετρήσεις για την ένταση στο $r = 36 \text{ in. (dB)}$
4000	0.04	15.0	5.2	47	46
4090	0.03	13.0	4.0	46	46
4140	0.08	12.5	4.0	55	54
6050	0.42	9.7	4.7	76	78
6260	0.43	9.2	3.5	79	77
6450	0.51	8.5	3.2	80	77

Πίνακας 5.2: Πειραματικές μετρήσεις των *Leehey* και *Hanson*.

Πρέπει να τονιστεί πως οι παραπάνω συνθήκες έχουν επαληθευτεί και πειραματικά. Χαρακτηριστικές είναι οι μετρήσεις των *Leehey-Hanson*, [29], για την ένταση του ήχου, (σχέση (5.61)), που πραγματοποιήθηκαν στο *Acoustics and Vibration Laboratory* του *M.I.T.* Οι μετρήσεις αυτές έγιναν πάνω στον x άξονα και με γωνία 90° σε σχέση με τον άξονα του κυλίνδρου και στην κατεύθυνση της ομοιόμορφης ροής U (είναι φανερές στον πίνακα 5.2).

Παρατηρούμε ότι οι μετρήσεις είναι σε συμφωνία με τα αποτελέσματα που δίνει η συνθήκη (5.61) πράγμα που υποδηλώνει και την εγκυρότητα αυτής. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι ο συντελεστής άντωσης είναι ο κυρίαρχος παράγοντας στην εκπεμπόμενη ηχητική ένταση. Στην κλίμακα των αριθμών *Reynolds* της παραπάνω έρευνας η αύξηση του επιπέδου της έντασης με την ταχύτητα συνοδεύεται από μία αύξηση του συντελεστή άντωσης ενώ το μήκος συντονισμού μειώνεται σταθερά.

Θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε πως κάποια άλλα πειραματικά αποτελέσματα δίνουν στοιχεία για την *SPL (Sound Pressure Level)* ως μία

συνάρτηση του I_R για διαφορετικούς αριθμούς *Reynolds*, Re . Ο Gary Strumolo, (βλέπε [18]), εισήγαγε ένα συντελεστή α στο δεξί μέλος της εξίσωσης (5.34) και στην συνέχεια προσδιόρισε τα α και γ , τα L_c και C_L ως συναρτήσεις του Re έτσι ώστε να προσαρμόσει την εξίσωση (5.38) στα πειραματικά δεδομένα.

Κεφάλαιο 6

Παρατηρήσεις - ανοιχτά προβλήματα

Μετά την ολοκλήρωση, στο προηγούμενο κεφάλαιο, της μελέτης του μοντέλου για τον ήχο που παράγεται από τη κίνηση της ραδιοφωνικής κεραίας με τις συνθήκες που αναφέρθηκαν, δηλαδή την υπόθεση μακρινού πεδίου κ.τ.λ., πρέπει να διευκρινιστεί πως αναφερθήκαμε μόνο σε μια πολύ ειδική περίπτωση. Στην πραγματικότητα υπάρχουν και άλλες πολλές περιπτώσεις, και αν δοκιμάζαμε να επεκταθούμε περισσότερο η ανάλυση θα ήταν εκτενής και κουραστική.

Στην περίπτωση της κεραίας ενός αυτοκινήτου, με την οποία ασχοληθήκαμε, κάποιος θα ενδιαφερόταν π.χ. για τον προσδιορισμό της ηχητικής έντασης για αποστάσεις R οι οποίες είναι και μεγάλες και μικρές. Επίσης, σε άλλη περίπτωση, θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο μελέτης η κλίση της ραδιοφωνικής κεραίας ως προς τη ροή (πράγμα που συναντάται στα σύγχρονα οχήματα για λόγους αεροδυναμικής). Δεν θα έπρεπε να παρα-

λείψουμε και την περίπτωση διαφορετικών τύπων κεραίας όπως είναι αυτή με βηματική μείωση της διαμέτρου ή η κεραία με γραμμική μείωση της διαμέτρου. Στο βιβλίο [18] προτείνονται τα ακόλουθα προβλήματα τα οποία ουσιαστικά είναι κάποιες άλλες τέτοιες περιπτώσεις:

Πρόβλημα 1. Ανάλογα με την παραγωγή της εξίσωσης (5.19), να παραχθεί από την (3.47) ένας τύπος για το p χωρίς να γίνουν οι υποθέσεις μακρινού πεδίου.

Πρόβλημα 2. Να αναλυθεί η περίπτωση ενός κωνικού (μυτερού) κυλίνδρου όταν

- i. η ακτίνα μειώνεται γραμμικά κατά μήκος του άξονα, ή
- ii. έχουμε βηματική μείωση σταθερής διαμέτρου.

Πρόβλημα 3. Να αναλυθεί η περίπτωση ενός κυλίνδρου με κλίση προς το ρεύμα αέρα.

Τέλος θα αναφερθούν και τα προβλήματα τα οποία έχει προτείνει ο *Blevins* στο βιβλίο του [7]:

1. Στην παραγωγή στροβίλων.
 - (α') Ποιά είναι η αντίδραση μη κυκλικών κυλίνδρων στην ταλάντωση εξαιτίας της παραγωγής στροβίλων; και
 - (β') ποιά είναι το αποτέλεσμα της τύρβης στην ταλάντωση προκαλούμενη από παραγωγή στροβίλων;
2. Σε ταλαντώμενη ροή. Πειραματικά, να προσδιοριστεί πώς ένας κύλινδρος πλαισιωμένος από ένα ελαστικό αντιδρά στις δυνάμεις άνωσης σε

μία ημιτονοειδώς ταλαντώμενη ροή.

3. Σχετικά με τον ήχο που προκύπτει απ' την παραγωγή στροβίλων. Να μετρηθεί ο ήχος που εκπέμπεται από ένα κινούμενο κύλινδρο, ο οποίος είναι συντονισμένος με παραγωγή στροβίλων μεγαλύτερου μεγέθους από $0.5D$.

Βιβλιογραφία

- [1] Τσουμπελής Δημήτριος. *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I, II*. Πανεπιστήμιο Πατρών, 1992.
- [2] Καφούσιας Νικόλαος. *Ρευστοδυναμική I, II*. Πανεπιστήμιο Πατρών, 1995.
- [3] Συρόπουλος Απόστολος. "*ΛΤΕΧ:ΕΝΑΣ ΠΛΗΡΗΣ ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΜΑΘΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑΣ ΛΤΕΧ*". Παρατηρητής, 1998.
- [4] Beranek L. L. *Noise Reduction*. McGraw-Hill, New York, 1960.
- [5] Bies D. A. *Noise control for engineers*. University of Adelaide, 1982. Mechanical Engineering Department Lecture Note Series.
- [6] Blake W. K. *Mechanics of flow-induced sound and vibration*. Academic Press, 1986.
- [7] Blevins R. D. "*Flow-Induced Vibration*". ROBERT E. KREIGER PUBLISHING COMPANY, Van Nostrand Reinhold, New York, 1990. (Second Edition).

- [8] Burton T. E. and Blevins R. D. "Vortex Shedding Noise From Oscillating Cylinders". *Journal of Acoustic Society of America*, 60:599–606, 1976.
- [9] Crighton D. G. "Acoustics as a branch of fluid mechanics". *Journal of Fluid Mechanics*, 106:261–98, 1981.
- [10] Cumpsty N. A. and Whitehead D. S. "The Excitation of Acoustic Resonances by Vortex Shedding". *Journal of Sound and Vibration*, 18:353–367, 1971.
- [11] Curle N. "The Influence of Solid Boundaries Upon Aerodynamic Sound". *Proceedings of the Royal Society of London*, A 231:505–514, 1955.
- [12] Dowling A. P. and Ffowcs Williams J. E. "*Sound and Sources of Sound*". Ellis Horwood Publishers, Chichester, West Sussex, England, 1983.
- [13] Fay R. D. *Journal of Acoustic Society of America*, 3(322), 1931.
- [14] Ffowcs Williams J. E. "Aeroacoustics". *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9:447–68, 1977.
- [15] Ffowcs Williams J. E. and Hall L. H. "Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane". *Journal of Fluid Mechanics*, 40(4):657–70, 1970.

- [16] Fitzpatrick H. M. and M. Strasberg. *Hydrodynamic Sources of Sound*. Naval Hydrodynamics Publication 515, 1957.
- [17] Ford F. D. *Introduction to acoustics*. Elsevier, 1970.
- [18] Friedman Anver. *Mathematics in Industrial Problems*. Springer, 1997. Part 8.
- [19] Frost P. A. and Harper E. Y. "Acoustic Radiation from Surfaces Oscillating at Large Amplitude and Small Mach Number". *Journal of Acoustic Society of America*, 58:318–325, 1975.
- [20] Goldstein M. E. *Aeroacoustics*. McGraw–Hill, 1976.
- [21] Graham J. M. R. and Maull D. J. "The Effect of an Oscillating Flap and an Acoustic Resonance on Vortex Shedding". *Journal of Sound and Vibration*, 18:371–380, 1971.
- [22] Gutin L. *On the Sound Field of a Rotating Propeller*. NASA TM 1195, 1948.
- [23] Howe M. S. "Contributions to the theory of aerodynamic sound, with applications to excess jet noise and the theory of the flute". *Journal of Fluid Mechanics*, 71(4):625–73, 1975.
- [24] Howe M. S. "The dissipation of sound at an edge". *Journal of Sound and Vibration*, 70(4):407–11, 1980.

- [25] Howe M. S. "On the absorption of sound by turbulence and other hydrodynamic flows". *Journal of Applied Mathematics*, 32:187–209, 1984. I.M.A.
- [26] King R. "The 'Added Mass' of Cylinders". *British Hydromechanics Research Association Report TN1100*, April 1971.
- [27] Kinsler L. E., Frey A. R., Coppens A. B. and Sanders V. J. *Foundamentals of acoustics*. John Wiley and Sons, 1982. Third Edition.
- [28] Koopman G. H. "Wind Induced Vibrations and Their Associated Sound Fields". Dissertation, Catholic University of America, 1969.
- [29] Leehey P. and Hanson C. E. "Aeolian tones associated with resonance vibration". *Journal of Sound and Vibration*, 13(4):465–483, 1971.
- [30] Lighthill M. J. "On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory". *Proceedings of the Royal Society of London*, A 211:564–587, 1952.
- [31] Lighthill M. J. "On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound". *Proceedings of the Royal Society of London*, A 222(1148):1–32, 1954.
- [32] Morse P. M. and Ingard K. U. *Theoretical Acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1968.

- [33] Norton M. P. "*Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers*". Camprige University Press, Cambridge, England, 1989.
- [34] Norton M. P. and Bull M. K. "Mechanisms of the generation of external acoustic radiation from pipes due to internal flow disturbances". *Journal of Sound and Vibration*, 94(1):105–46, 1984.
- [35] Parker R. "Resonance Effects in Wake Shedding From Parallel Plates, Some Experimental Observations". *Journal of Sound and Vibration*, 4:62–72, 1966.
- [36] Phillips O. M. "The Intensity of Aeolian Tones". *Journal of Fluid Mechanics*, 1:607–624, 1956.
- [37] Pierce A. D. *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*. McGraw–Hill, 1981.
- [38] Powell A. "Aerodynamic noise and the plane boundary". *Journal of the Acoustic Society of America*, 32(8):982–90, 1960.
- [39] Powell A. "Theory of Vortex sound". *Journal of the Acoustic Society of America*, 36(1):177–95, 1964.
- [40] Rayleigh (Lord). *The Theory of Sound*. v.II, Dover Publications, New York, 1896.
- [41] Reynolds D. D. *Engineering principles of acoustics–noise and vibration*. Allyn and Bacon, 1981.

- [42] Ribner H. S. *Aerodynamic sound from fluid dilatations*. UTIA Rep. no. 86, 1962. AFOSR TN 3430.
- [43] Richard E. J. and Mead D. J. *Noise and acoustic fatigue in aeronautics*. John Wiley, 1968.
- [44] Soria J. and Norton M. P. "The response of a laminar shear layer on a flat plate to transverse surface vibrations". Proceedings 9th Australasian Fluid Mechanics Conference, Auckland, New Zealand, pp. 610–13, 1986.
- [45] Stokes A. N., Welsh M. C. and Hourigan K. "Sound generated by separated flows around bluff bodies". Proceedings 9th Australasian Fluid Mechanics Conference, Auckland, New Zealand, pp. 164–7, 1986.
- [46] Stokes G. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 1868. 158:447-63.
- [47] Strouhal V. "Über eine besonder Art der Tonerregung", 1878. *Ann. Physik (Leipzig)*.
- [48] Walker E. M. and Reising G. F. S. "Flow Induced Vibrations in Cross Flow Heat Exchangers". *Chem, Processes Eng.*, 49:95–103, 1968.
- [49] Welsh M. C. and Stokes A. N. "Transient vortex modelling of flow-induced acoustic resonances near cavities or obstructions in ducts".

Aero and hydro-acoustics, IUTAM Symposium, Lyon, Springer-Verlag, pp. 499–506, 1985.

- [50] Welsh M. C., Stokes A. N. and Parker R. "Flow-resonant sound interaction in a duct containing a plate, part I: semi-circular leading edge". *Journal of Sound and Vibration*, 95(3):305–23, 1984.
- [51] Zdravokvich M. M. and Nuttall J. A. "On the Elimination of Aerodynamic Noise in a Staggered Tube Bank". *Journal of Sound and Vibration*, 34:173–177, 1974.