

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

1. Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής

Συχνά αυτό το οποίο παρατηρούμε σε ένα πείραμα τύχης δεν είναι το όποιο αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$ αλλά μια μαθηματική ποσότητα X εξαρτώμενη από το αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$. Ας εξετάσουμε π.χ. το πείραμα τύχης που συνίσταται στη ρίψη δύο ζαριών διαφορετικού χρώματος με δ.χ. $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1, \omega_2 \text{ οι ενδείξεις των δύο ζαριών αντίστοιχα}\}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι αυτό το οποίο ενδιαφέρει δεν είναι οι ενδείξεις (ω_1, ω_2) μιας ρίψης αλλά το άθροισμά τους $\omega_1 + \omega_2$. Σ' αυτή την περίπτωση στο κάθε $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ αντιστοιχίζεται ο αριθμός $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ με $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$. Έτσι π.χ. το ενδεχόμενο: άθροισμα 5 που είναι το υποσύνολο $A = \{(3, 2), (2, 3), (4, 1), (1, 4)\}$ γράφεται και ως $\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : X(\omega_1, \omega_2) = 5\}$ και γενικά μπορούμε να ειπούμε ότι οι ερωτήσεις μας σχετικά με ενδεχόμενα μετασχηματίζονται σε ερωτήσεις σχετικές με τιμές της συνάρτησης X . Τα πλεονεκτήματα ευελιξίας είναι προφανή αφού οι συναρτήσεις επιδέχονται αριθμητικές πράξεις.

Ορισμός. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας. Ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** με τιμές στο $\mathbb{N}$ μια συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ που ικανοποιεί την απαίτηση:

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \text{ για κάθε } B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} \quad (1.1)$$

Παρατήρηση 1.1. Το σύνολο $X^{-1}(B)$ που εμφανίζεται στην (1.1) είναι εξ ορισμού $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται αντίστροφη εικόνα του B μέσω της X και **δεν** αναφέρεται σε αντίστροφη συνάρτηση αφού δεν γνωρίζουμε αν η X αντιστρέφεται. Φαίνεται απαραίτητο να υπενθυμίσουμε μερικές βασικές ιδιότητες του συμβόλου $X^{-1}(B)$.

- i) $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset, X^{-1}(\mathbb{N}) = \Omega$
- ii) $X^{-1}(A \setminus B) = X^{-1}(A) \setminus X^{-1}(B)$
- iii) $X^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(A_i)$
- iv) $X^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} X^{-1}(A_i).$

Παρατήρηση 1.2. Όπως ειπώθηκε ήδη, ερωτήσεις αναφερόμενες στο εξεταζόμενο πείραμα μπορούν να διατυπωθούν ως ερωτήσεις σχετικά με τις τιμές της X π.χ. ποια είναι η πιθανότητα ώστε οι τιμές της X να βρίσκονται σε δοσμένο υποσύνολο $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}$; Πρόκειται προφανώς για την πιθανότητα του υποσυνόλου $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$ του Ω και για να έχει νόημα η ερώτηση πρέπει το $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Έτσι εξηγείται η απαίτηση (1.1) του ορισμού της τυχαίας μεταβλητής.

Αναζητώντας κάποια «οικονομικότερη» απαίτηση από την (1.1) για να ελέγξουμε αν μια συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathcal{A}^n$ είναι τ.μ. έχουμε την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 1.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathcal{A}^n$. Έστω C μια μη κενή κλάση υποσυνόλων του $\mathcal{A}^n$ τέτοια ώστε $B^n = \sigma(C)$ (π.χ. $C = P^n$). Η συνάρτηση X είναι τυχαία μεταβλητή όταν και μόνο όταν ισχύει

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \text{ για κάθε } A \in C. \quad (1.2)$$

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι αν ισχύει η (1.2) τότε η X είναι τ.μ. Προς τούτο θεωρούμε την κλάση υποσυνόλων του $\mathcal{A}^n$

$$A = \{B \subset \mathcal{A}^n : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}.$$

Αφού ισχύει η (1.2) θα έχουμε ότι $C \subset A$. Θα δείξουμε τώρα ότι η κλάση A είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathcal{A}^n$. Πράγματι $\mathcal{A}^n \in A$ διότι $X^{-1}(\mathcal{A}^n) = \Omega \in \mathcal{F}$. Επίσης αν $B \in A$ τότε $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ και αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα (υποσυνόλων του Ω) θα είναι $(X^{-1}(B))^c \in \mathcal{F}$. Όμως $(X^{-1}(B))^c = X^{-1}(B^c)$ (δες Παρατ. 1.1) και άρα $X^{-1}(B^c) \in \mathcal{F}$ δηλαδή $B^c \in A$. Τέλος θεωρούμε ακολουθία υποσυνόλων $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ από την A . Τότε $X^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα θα είναι και $\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$. Όμως ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$ άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in A$. Ωστε η κλάση A είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση C και συνεπώς $A \supset \sigma(C) = B^n$. ⑤

Πρόταση 1.2. Η συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ είναι τ.μ. όταν και μόνο όταν ισχύει:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F} \text{ για κάθε } t \in \mathcal{A}. \quad (1.3)$$

Απόδειξη

Για οποιαδήποτε $a < b$ στο $\mathcal{A}$

$$X^{-1}((a, b]) = X^{-1}((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) =$$

$$X^{-1}((-\infty, b]) \setminus X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega : X(\omega) \leq b\} \setminus \{\omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα. Επίσης $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$.

Ωστε $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ για κάθε $A \in P^1 = \{(a, b] : a < b\} \cup \{\emptyset\}$. Όμως $\sigma(P^1) = B^1$ και κατά την Πρόταση 1.1 η X είναι τ.μ. ⑤

Άσκηση 1.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει: $\{\omega : X(\omega) \leq r\} \in \mathcal{F}$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών. Δείξτε ότι η X είναι τ.μ.

Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής στη θεωρία πιθανοτήτων ταυτίζεται με την έννοια της **μετρήσιμης συνάρτησης** στη θεωρία μέτρου. Για την θεωρία μέτρου τυχαία μεταβλητή είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στον $(\Omega, \mathcal{F})$. Μάλιστα όταν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης λέγεται $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη ή και $\mathcal{F}$ - B^n μετρήσιμη προσδιορίζοντας έτσι τις σ -άλγεβρες για τις οποίες ισχύει η (1.1). Παρατηρείστε ότι στον ορισμό μιας τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ δεν εμπλέκεται το μέτρο πιθανότητας P .

Ορισμός. Μια συνάρτηση $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **συνάρτηση Borel** όταν και μόνο όταν για κάθε $B \in B^n$ ισχύει $g^{-1}(B) \in B^m$.

Κάθε συνάρτηση Borel $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια τ.μ. στο χώρο $(\Omega = \mathbb{R}^m, \mathcal{F} = B^m)$ και συνεπώς ισχύουν όλα τα ισχύοντα για τυχαίες μεταβλητές.

Πρόταση 1.3. Κάθε συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση Borel.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι τ.μ. στον $(\Omega = \mathbb{R}^m, \mathcal{F} = B^m)$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$ και για τούτο θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.1. Πράγματι αν C είναι η κλάση των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ τότε λόγω της συνέχειας της g ισχύει: για κάθε $A \in C$ το σύνολο $g^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και συνεπώς $g^{-1}(A) \in B^m$. Όμως $B^n = \sigma(C)$ και άρα κατά την Πρόταση (1.1) η συνάρτηση g είναι συνάρτηση Borel. ⑤

Πρόταση 1.4. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Έστω επίσης συνάρτηση Borel $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. τότε η συνάρτηση $Y = g(X) \equiv g \circ X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τ.μ.

Απόδειξη

Για κάθε $B \in B^n$ έχουμε διαδοχικά $Y^{-1}(B) = \{\omega: Y(\omega) \in B\} = \{\omega: g(X(\omega)) \in B\} = \{\omega: X(\omega) \in g^{-1}(B)\} = X^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$ αφού $g^{-1}(B) \in B^m$ και η X είναι τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}^m$. ⑤

Για μια συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))^T$, $\omega \in \Omega$ όπου $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Όταν χρειάζεται θα γράφουμε απλά $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$.

Πρόταση 1.5. Έστω συνάρτηση $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$. Η $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τ.μ. όταν και μόνο όταν οι συναρτήσεις $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τυχαίες μεταβλητές.

Απόδειξη

Έστω ότι η X είναι τ.μ. Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ θεωρούμε τη συνάρτηση-προβολή $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$. Κάθε g_i είναι συνάρτηση Borel ως συνεχής και επειδή $X_i = g_i(X)$ συμπεραίνουμε ότι οι X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι τ.μ. Αντίστροφα έστω

ότι οι συναρτήσεις $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τ.μ. Για οποιοδήποτε ορθογώνιο

$$A = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \in \mathcal{P}^n \text{ ισχύει}$$

$$\begin{aligned} X^{-1}(A) &= \left\{ \omega : X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \right\} = \\ &= \left\{ \omega : X_i(\omega) \in (a_i, b_i] \forall i = 1, 2, \dots, n \right\} = \bigcap_{i=1}^n \left\{ \omega : X_i(\omega) \in (a_i, b_i] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{δηλαδή } X^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}((a_i, b_i]).$$

Επειδή οι συναρτήσεις X_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι τ.μ. θα είναι $X_i^{-1}((a_i, b_i]) \in \mathcal{F}$ και αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα θα είναι $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ και τούτο για κάθε $A \in \mathcal{P}^n$. Όμως $\sigma(\mathcal{P}^n) = \mathcal{B}^n$ και συνεπώς κατά την Πρόταση 1.1 η X είναι τ.μ. ⑤

Πρόταση 1.6. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τυχαίες μεταβλητές $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Αν $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ οι συναρτήσεις $\sum_{i=1}^n a_i X_i$, $\prod_{i=1}^n X_i$, $\max\{X_1, \dots, X_n\}$, $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ είναι τ.μ.

Απόδειξη

Αφού οι συναρτήσεις $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι τ.μ. η συνάρτηση $(X_1, \dots, X_n)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ θα είναι τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}^n$.

Επειδή η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ είναι συνεχής θα είναι συνάρτηση Borel και συνεπώς η συνάρτηση $g(X_1, \dots, X_n) = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ είναι τ.μ. Όμοια για τις υπόλοιπες. ⑤

Άσκηση 1.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και $A \in \mathcal{F}$. Δείξτε ότι η **δείκτρια του A** (ή χαρακτηριστική του A) που ορίζεται από την $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega \in A \\ 0 & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Άσκηση 1.3. Έστω τ.μ. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $a > 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{αν } |X(\omega)| \leq a \\ 0 & \text{αν } |X(\omega)| > a \end{cases}$ είναι τ.μ.

Άσκηση 1.4. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα ανήκουν στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

$$A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}, B = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > Y(\omega)\}, \Gamma = \{\omega \in \Omega : e^{X(\omega)} = Y(\omega)\}.$$

Άσκηση 1.5. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $B^{m+n} = B^m \otimes B^n$ όπου $B^m \otimes B^n = \sigma(\{A \times B : A \in B^m, B \in B^n\})$ η σ-άλγεβρα γινόμενο των B^m, B^n .

Άσκηση 1.6. Έστω $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχής και «1-1». Δείξτε ότι αν $B \in \mathcal{B}^m$ τότε $g(B) \in \mathcal{B}^n$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την κλάση $A = \{B \subset \mathbb{R}^m : g(B) \in \mathcal{B}^n\}$. Επειδή κάθε ανοικτό του $\mathbb{R}^m$ γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$ και επειδή g συνεχής, συμπεράνετε ότι κλάση A περιέχει τα ανοικτά του $\mathbb{R}^m$. Εν συνεχεία δείξτε ότι η A είναι σ-άλγεβρα).

Σημείωση. Αν παραλειφθεί η υπόθεση «1-1» τότε το συμπέρασμα παύει να ισχύει. Έτσι η προβολή ενός υποσυνόλου Borel του $\mathbb{R}^2$ δεν είναι κατ' ανάγκη σύνολο Borel του $\mathbb{R}$ όπως λανθασμένα διαβεβαίωνε ο Lebesgue στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Η σωστή απάντηση βρίσκεται στη θεωρία των αναλυτικών συνόλων των Souslin, Lusin και άλλων. Αν διατηρηθεί η υπόθεση «1-1» και αντί της συνέχειας υποτεθεί ότι η g είναι μόνο συνάρτηση Borel τότε το συμπέρασμα $g(B) \in \mathcal{B}^n$ ισχύει αλλά η απόδειξη είναι κατά πολύ δυσκολότερη. Για τα ζητήματα αυτά ο ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει στα [5], [6].

Για να συμπεριλάβουμε στη μελέτη μας και τυχαίες μεταβλητές που προκύπτουν από οριακές διαδικασίες επί ακολουθιών τ.μ. είναι σκόπιμο να θεωρήσουμε τ.μ. με τιμές στο $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Η επέκταση είναι άμεση και έχει ως ακολούθως: Αν $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι χ.π. μια συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ λέγεται τ.μ. όταν και μόνο όταν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις:

- i) $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}^1$.
- ii) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = -\infty\} \in \mathcal{F}$ και $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \infty\} \in \mathcal{F}$.

Εύκολα τώρα αποδεικνύεται ότι:

Άσκηση 1.7. Η συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ είναι τυχαία μεταβλητή όταν και μόνο όταν ισχύει η (1.3).

Πρόταση 1.7. Έστω $X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ακολουθία τ.μ.. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $X, Y: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ αντίστοιχα ως εξής: $X(\omega) = \sup_n X_n(\omega)$, $Y(\omega) = \inf_n X_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Τότε οι συναρτήσεις X, Y είναι τ.μ. με τιμές στο $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Απόδειξη

Κατά την Άσκηση 1.4 ανωτέρω αρκεί να επαληθευτεί η (1.3). Πράγματι για τυχόν

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{ισχύει:} \quad \{\omega : X(\omega) \leq t\} = \left\{ \omega : \sup_n X_n(\omega) \leq t \right\} = \left\{ \omega : X_n(\omega) \leq t \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \right\} =$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \leq t\}. \quad \text{Όμως } X_n, n \in \mathbb{N} \text{ είναι τ.μ. και η κλάση } \mathcal{F} \text{ είναι σ-άλγεβρα άρα}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}. \quad \text{Όμοια} \quad \{\omega : Y(\omega) > t\} = \{\omega : X_n(\omega) > t \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\} =$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) > t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \leq t\}^c \in \mathcal{F} \quad \text{και άρα} \quad \{\omega : Y(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F} \quad \text{για τυχόν } t \in \mathbb{R}.$$

⑤

Παρατήρηση. Η Πρόταση ισχύει και για τ.μ. $X_n : \Omega \rightarrow \bar{\square}$ όπως εύκολα διαπιστώνεται.

Πρόταση 1.8. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και ακολουθία τ.μ. $X_n : \Omega \rightarrow \square$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει:

- i) $\liminf_n X_n, \limsup_n X_n$ είναι τυχαίες μεταβλητές.
- ii) Αν για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει το $\lim_n X_n(\omega)$ στο $\bar{\square}$ τότε η $X(\omega) = \lim_n X_n(\omega), \omega \in \Omega$ ορίζει τυχαία μεταβλητή.

Απόδειξη

- i) $\liminf_n X_n = \sup_m \left(\inf_{n \geq m} X_n \right)$ και $\limsup_n X_n = \inf_m \left(\sup_{n \geq m} X_n \right)$. Επικαλούμενοι τώρα την Πρόταση 1.7 συμπεραίνουμε εύκολα το ζητούμενο.
- ii) $X(\omega) = \liminf_n X_n(\omega) = \limsup_n X_n(\omega)$. ⑤

Άσκηση 1.8. Έστω τ.μ. $X_n : \Omega \rightarrow \square$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το σύνολο $\left\{ \omega \in \Omega : \text{υπάρχει το } \lim_n X_n(\omega) \text{ στο } \bar{\square} \right\} \in \mathcal{F}$.

2. Κατανομή τυχαίων μεταβλητών

Πρόταση 2.1. Έστω χ.π. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και τ.μ. $X : \Omega \rightarrow \square^n$. Ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $P_X : B^n \rightarrow [0, 1]$ ως ακολούθως

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)), B \in B^n \quad (2.1)$$

Τότε η συνολοσυνάρτηση είναι μέτρο πιθανότητας και η τριάδα $(\square^n, B^n, P_X)$ είναι χώρος πιθανότητας.

Απόδειξη

$$P_X(\square^n) = P(X^{-1}(\square^n)) = P(\Omega) = 1.$$

Επίσης αν $\{B_\kappa, \kappa \in \mathbb{N}\} \subset B^n$ και είναι ξένα μεταξύ τους τότε τα υποσύνολα $\{X^{-1}(B_\kappa), \kappa \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ είναι ξένα μεταξύ τους και έχουμε διαδοχικά

$$P_X\left(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} B_\kappa\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} B_\kappa\right)\right) = P\left(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} X^{-1}(B_\kappa)\right) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_\kappa)) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} P_X(B_\kappa). \quad ⑤$$

Ορισμός. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \square^n$. Το μέτρο πιθανότητας P_X το οριζόμενο από την (2.1) ονομάζεται **κατανομή της τ.μ. X**.

Μια τ.μ. $X : \Omega \rightarrow \square^n$ γράφεται ως $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ όπου οι συντεταγμένες $X_i : \Omega \rightarrow \square$ είναι τ.μ. Έστω P_{X_i} η κατανομή της τ.μ. X_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα έχουμε

$$P_{X_i}(A) = P(X_i^{-1}(A)), A \in B^1.$$

Όμως $X^{-1}(\square \times \cdots \times \square \times A \times \square \times \cdots \times \square) = X_i^{-1}(A)$ με το A στην i -θέση του Καρτεσιανού γινομένου (επαληθεύστε) και συνεπώς

$$P_{X_i}(A) = P_X(\square \times \cdots \times \square \times A \times \square \times \cdots \times \square), A \in B^1. \quad (2.2)$$

Γενικά αν $X' = (X_1, \dots, X_\kappa)$, $\kappa \leq n$ θα ισχύει

$$P_{X'}(A) = P_X(A \times \square^{n-\kappa}), A \in B^\kappa. \quad (2.3)$$

Πρόταση 2.2. Έστω (Ω, F, P) πλήρης χώρος πιθανότητας και τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \square^n$. Έστω ακόμα συνάρτηση $Y: \Omega \rightarrow \square^n$ και υποθέτουμε ότι ισχύει:

$$X(\omega) = Y(\omega) \text{ για κάθε } \omega \in \Omega \setminus N \text{ όπου } N \in F \text{ με } P(N) = 0. \quad (2.4)$$

Τότε η συνάρτηση Y είναι τ.μ. και έχει την ίδια κατανομή με την τ.μ. X .

Απόδειξη

Για τυχόν $B \in B^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} Y^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega \setminus N : X(\omega) \in B\} \cup \{\omega \in N : Y(\omega) \in B\} = \\ &= [(\Omega \setminus N) \cap X^{-1}(B)] \cup [N \cap Y^{-1}(B)]. \end{aligned}$$

Επειδή η X είναι τ.μ. θα είναι $X^{-1}(B) \in F$ και αφού $N \in F$ θα ισχύει $(\Omega \setminus N) \cap X^{-1}(B) \in F$. Εξάλλου $N \cap Y^{-1}(B) \subset N$ με $N \in F$ και $P(N) = 0$ κατά την υπόθεση και αφού ο χ.π. (Ω, F, P) είναι πλήρης θα ισχύει $N \cap Y^{-1}(B) \in F$. Τελικά $Y^{-1}(B) \in F$ άρα η Y είναι τ.μ.

Όπως είδαμε παραπάνω

$$Y^{-1}(B) = [(\Omega \setminus N) \cap X^{-1}(B)] \cup [N \cap Y^{-1}(B)].$$

Τα ενδεχόμενα της ένωσης αυτής είναι ξένα μεταξύ τους και επειδή $P(N \cap Y^{-1}(B)) = 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(Y^{-1}(B)) &= P((\Omega \setminus N) \cap X^{-1}(B)) = P(X^{-1}(B) - N \cap X^{-1}(B)) = \\ &= P(X^{-1}(B)) - P(N \cap X^{-1}(B)). \end{aligned}$$

Όμως $P(N \cap X^{-1}(B)) = 0$ και τελικά $P(Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(B))$. ⑤

Παρατήρηση 2.1. α) Η υπόθεση της πληρότητας χρειάζεται μόνο για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η Y είναι τ.μ. Αν δοθεί εξ αρχής ότι η Y είναι τ.μ. τότε αρκεί μόνο η (2.4) για να αποδειχθεί ότι $P_X = P_Y$ και η υπόθεση της πληρότητας περιττεύει.

β) Αν δύο τ.μ. X, Y ικανοποιούν την (2.4) τότε όπως αποδείχθηκε έχουν την ίδια κατανομή. Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως φαίνεται από το ακόλουθο Παράδειγμα.

Έστω ο χ.π. $(\Omega = (0, 1], B_0, P)$ όπου $B_0 = \{B \subset (0, 1] : B \in B^1\}$ και $P = \lambda$ το μέτρο Lebesgue δηλαδή $P(a, b] = b - a$ για όλα τα $(a, b] \subset (0, 1]$. Θεωρείστε την τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \square$ με $X(\omega) = \omega$. Εύκολα τώρα επαληθεύεται ότι οι τ.μ. X και $Y = 1 - X$ έχουν την ίδια κατανομή που μάλιστα συμπίπτει με P .

Να σημειωθεί ακόμα ότι δύο τ.μ. μπορούν να είναι ορισμένες σε διαφορετικές χ.π. αλλά να έχουν την ίδια κατανομή (βλ. Άσκηση 2.1).

Ορισμός. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X** η συνάρτηση $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ που ορίζεται από την

$$F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Είναι φανερό ότι $F_X(t) = P(X^{-1}((-\infty, t]) = P_X((-\infty, t])$ όπου P_X η κατανομή της τ.μ. X και συνεπώς κατά την Πρόταση 5.1 του ΚΕΦ. I είναι πράγματι συνάρτηση κατανομής. Ακόμα περισσότερο

$$P_X(a, b] = P_X(-\infty, b] - P_X(-\infty, a] = F_X(b) - F_X(a)$$

και συνεπώς κατά τις Προτάσεις (5.1), (5.2) του ΚΕΦ. I το ζεύγος (P_X, F_X) είναι ζεύγος αντιστοιχών στην αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μέτρων πιθανότητας και συναρτήσεων κατανομής στο $\mathbb{R}$. Μια τυχαία μεταβλητή X κατατάσσεται ως **απολύτως συνεχής** ή **διακριτή** ή **μικτή** ή **μη-ομαλή** σε ευθεία αντιστοιχία με την κατάταξη της συνάρτησης κατανομής της F_X όπως ορίζεται στην Πρόταση 5.3 του ΚΕΦ. I και τις περιπτώσεις α, β, γ, δ που την ακολουθούν.

Άσκηση 2.1. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}, Q)$ και η τ.μ. $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $X(\omega) = \omega_1$. Όπως φαίνεται αμέσως $P_X = Q$. Θεωρούμε τώρα ένα μέτρο πιθανότητας P στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$ με την ιδιότητα

$$P(A \times B) = Q(A)Q(B) \text{ για } A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B}$$

(δηλαδή το μέτρο γινόμενο $P = Q \otimes Q$) και την τ.μ. $Y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2$. Δείξτε ότι $P_Y = P_X = Q$.

Άσκηση 2.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Λέγεται ότι η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ όταν για κάθε $A \in \mathcal{B}^n$ ισχύει

$$P_X(A) = \int_A \cdots \int f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n.$$

Έστω $k < n$ και $Y = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ όταν $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Δείξτε ότι η τ.μ. Y έχει πυκνότητα f_Y που προκύπτει από την:

$$f_Y(u_1, u_2, \dots, u_k) = \int \cdots \int f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_{k+1} \dots du_n.$$

Άσκηση 2.3. Έστω τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ και συνάρτηση Borel $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Έστω η τ.μ. $Y = g(X)$. Δείξτε ότι $P_Y(B) = P_X(g^{-1}(B))$ για κάθε $B \in \mathcal{B}^m$ και συμπεράνετε ότι αν η τ.μ. X έχει πυκνότητα f τότε θα ισχύει $P_Y(B) = \int \cdots \int_{g^{-1}(B)} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$.

Είναι τώρα η στιγμή εξοικείωσης με δύο περιπτώσεις τρόπου γραφής που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη θεωρία πιθανοτήτων.

α) Έχουμε ήδη βρεθεί αντιμέτωποι με συμβολικές εκφράσεις όπως οι παρακάτω όπου X, Y, X_n είναι τ.μ. ορισμένες σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$P(X \in A), P(X = Y), \{X < Y\}, P(\lim X_n = X) \text{ κλπ.}$$

Το ακριβές νόημα των εκφράσεων αυτών είναι αντίστοιχα:

$$P(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = P(X^{-1}(A)), \quad P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}), \quad \{\omega : X(\omega) < Y(\omega)\}, \\ P(\{\omega : \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}).$$

β) Η δεύτερη περίπτωση είναι η έκφραση «σχεδόν βεβαίως για το μέτρο P» και συμβολικά P-σ.β.

Θα γράφουμε $X = Y$ P-σ.β. όταν και μόνο όταν $X(\omega) = Y(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N$ όπου $N \in F$ με $P(N) = 0$. Ανάλογο νόημα έχουν οι διατυπώσεις $X < Y$ P-σ.β. ή $\lim X_n = X$ P-σ.β.

Άσκηση 2.4. Δείξτε ότι $X = Y$ P-σ.β. $\Leftrightarrow P(X = Y) = 1$.

Άσκηση 2.5. Έστω ακολουθία τ.μ. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ και τ.μ. Y με τιμές στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $X_n \leq Y$ P-σ.β. $\Leftrightarrow \sup_n X_n \leq Y$ P-σ.β.

3. Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός. Έστω (Ω, F, P) χ.π. και οικογένεια τ.μ. $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, i \in I$. Οι τ.μ. $X_i, i \in I$ λέγονται ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν για οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset I$ και οποιαδήποτε $B_1, B_2, \dots, B_k \in B^n$ ισχύει

$$P\left(\bigcap_{m=1}^k X_{i_m}^{-1}(B_m)\right) = \prod_{m=1}^k P(X_{i_m}^{-1}(B_m)) \quad (3.1)$$

ή ισοδύναμα

όταν και μόνο όταν οι κλάσεις $\{X_i^{-1}(B) : B \in B^n\}, i \in I$ είναι ανεξάρτητες.

Παρατήρηση. Για την ανεξαρτησία των τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_v$ είναι αρκετό να απαιτήσουμε: Για οποιαδήποτε $B_i \in B^n, i = 1, 2, \dots, v$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^v X_i^{-1}(B_i)\right) = \prod_{i=1}^v P(X_i^{-1}(B_i)). \quad (3.2)$$

Τότε επαληθεύεται η (3.1) (πώς;).

Αν τώρα θέσουμε $X = (X_1, X_2, \dots, X_v)$ και λόγω της σχέσης $\bigcap_{i=1}^v X_i^{-1}(B_i) =$

$X^{-1}(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_v)$ συμπεραίνουμε ότι η (3.2) ισοδυναμεί με

$$P_X(B_1 \times \dots \times B_v) = P_{X_1}(B_1) \cdot P_{X_2}(B_2) \cdots P_{X_v}(B_v) \quad (3.3)$$

για οποιαδήποτε $B_i \in B^n$ ή ακόμα

$$P_X = P_{X_1} \otimes P_{X_2} \otimes \dots \otimes P_{X_v}.$$

Να σημειωθεί επίσης ότι στον ορισμό της ανεξαρτησίας οι κλάσεις $\{X_i^{-1}(B) : B \in B^n\}$ είναι σ-άλγεβρες (δες Άσκ. 3.2).

Άσκηση 3.1. Δείξτε ότι οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_v$ είναι ανεξάρτητες όταν η (3.2) ή η (3.3) επαληθεύονται για $B_i \in \mathcal{P}^n$, $i = 1, 2, \dots, v$.

Άσκηση 3.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι η κλάση $\{X^{-1}(B): B \in \mathcal{B}^n\}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω . Αυτή η σ-άλγεβρα λέγεται **πα-
ραγόμενη από την τ.μ. X** και συμβολικά γράφουμε

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B): B \in \mathcal{B}^n\}.$$

(Η $\sigma(X)$ είναι η ελάχιστη για την οποία η X είναι μετρήσιμη).

Δείξτε ακόμα ότι $\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(B): B \in \mathcal{P}^n\})$.

Άσκηση 3.3. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χ.π. και τ.μ. $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i \in I$. Δείξτε ότι οι τ.μ. X_i , $i \in I$ είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν οι κλάσεις $\{X^{-1}(B): B \in \mathcal{P}^n\}$ είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 3.4. Έστω ότι οι τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι ανεξάρτητες. Έστω ακόμα συναρτήσεις Borel $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ και $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$. Δείξτε ότι οι τ.μ. $f(X)$ και $g(Y)$ είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 3.5. Έστω ότι οι τ.μ. $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, v$ είναι ανεξάρτητες και $\kappa < v$. Δείξτε ότι

- α) Οι τ.μ. $X' = (X_1, \dots, X_\kappa)$ και $Y = (X_{\kappa+1}, \dots, X_v)$ είναι ανεξάρτητες.
- β) Αν $f: \mathbb{R}^\kappa \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R}^{v-\kappa} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις Borel τότε οι τ.μ. $f(X_1, \dots, X_\kappa)$, $g(X_{\kappa+1}, \dots, X_v)$ είναι ανεξάρτητες.