

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Επιμέλεια: Ι. Σπηλιώτης

Άσκηση 1.32 σελ.45

Εξάγονται δύο σφαίρες από την Α και τοποθετούνται στην Β.

Υπάρχουν τρία δυνατά ενδεχόμενα:

E_1 : εξάγονται δύο λευκές από την Α και τοποθετούνται στην Β

E_2 : εξάγονται δύο μαύρες από την Α και τοποθετούνται στην Β

E_3 : εξάγονται μία λευκή και μία μαύρη και τοποθετούνται στην Β

$$P(E_1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{0}}{\binom{6}{2}}, \quad P(E_2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}, \quad P(E_3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}$$

Έστω Λ : το ενδεχόμενο να εξάγεται λευκή από την Β.

Τότε (τύπος ολικής πιθανότητας)

$$P(\Lambda) = P(\Lambda/E_1)P(E_1) + P(\Lambda/E_2) P(E_2) + P(\Lambda/E_3) P(E_3) \quad (1)$$

Όταν πραγματοποιείται το E_1 το περιεχόμενο της Β κάλπης θα είναι

6 + 2 = 8 λευκές και 8 μαύρες άρα

$$P(\Lambda/E_1) = \frac{8}{16}$$

Όταν πραγματοποιείται το E_2 το περιεχόμενο της Β κάλπης θα είναι

6 λευκές και 8 + 2 = 10 μαύρες άρα

$$P(\Lambda/E_2) = \frac{6}{16}$$

Όμοια $P(\Lambda/E_3) = \frac{7}{16}$

Αντικαθιστούμε στην (1) τις τιμές αυτές και τις $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$ που βρήκαμε παραπάνω και έχουμε το τελικό αποτέλεσμα.

Άσκηση 1.34 σελ. 45

$$\alpha) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Όμως } P(A \cap B) = P(B/A)P(A) \text{ άρα}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B/A)P(A) = 0,4 + 0,55 - 0,8 \times 0,4$$

$$\text{Τελικά } P(A \cup B) = 0,63$$

$$\beta) P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,63 = 0,37$$

Άσκηση 1.35 σελ. 45

Έστω Λ το ενδεχόμενο λειτουργίας της μηχανής

A το ενδεχόμενο η μηχανή να βρίσκεται στην κατάσταση 'Α'

B το ενδεχόμενο η μηχανή να βρίσκεται στην κατάσταση 'Β'

$$\text{Από την εκφώνηση } P(\Lambda/A) = \frac{4}{5}, P(\Lambda/B) = \frac{2}{5}, P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\alpha) P(\Lambda) = P(\Lambda/A)P(A) + P(\Lambda/B)P(B) = 0,7$$

$\beta)$ Έστω Y ο αριθμός ανταλλακτικών στα 4 που καθιστούν δυνατή τη λειτουργία της μηχανής. Y είναι τ.μ. με τιμές 0,1,2,3,4 και κατανομή $b(N=4, p=0,7)$. Ζητείται η :

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} p^0 (1-p)^{4-0}$$

Άσκηση 1.36 σελ 46

$$\alpha) \Lambda_1 : \text{λευκή κατά την πρώτη λήψη, } P(\Lambda_1) = \frac{4}{9}$$

$$M_1 : \text{μαύρη κατά την πρώτη λήψη, } P(M_1) = \frac{5}{9}$$

$$\Lambda_2 : \text{λευκή κατά την δεύτερη λήψη}$$

$$M_2 : \text{μαύρη κατά την δεύτερη λήψη}$$

Ζητείται η $P(\Lambda_2)$. Έχουμε :

$$P(\Lambda_2) = P(\Lambda_2/\Lambda_1)P(\Lambda_1) + P(\Lambda_2/M_1) P(M_1) \quad (1)$$

Όμως $P(\Lambda_2/\Lambda_1) = \frac{7}{12}$ διότι όταν πραγματοποιείται το Λ_1 προστίθενται 3 λευκές στην

κάλη και το περιεχόμενό της είναι 7 λευκές και 5 μαύρες. Όμοια $P(\Lambda_2/M_1) = \frac{4}{11}$.

Αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε $P(\Lambda_2) = 0,462$

β) Έστω Λ_3 : λευκή κατά την τρίτη λήψη.

Κατά τις δύο πρώτες λήψεις πραγματοποιείται ένα από τα ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα :

$$E_1 = \Lambda_1 \cap \Lambda_2, E_2 = \Lambda_1 \cap M_2, E_3 = M_1 \cap \Lambda_2, E_4 = M_1 \cap M_2$$

Σύμφωνα με τον τύπο ολικής πιθανότητας :

$$P(\Lambda_3) = P(\Lambda_3/E_1)P(E_1) + P(\Lambda_3/E_2) P(E_2) + P(\Lambda_3/E_3)P(E_3) + P(\Lambda_3/E_4) P(E_4) \quad (2)$$

$$\text{Όμως } P(E_1) = P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = P(\Lambda_2/\Lambda_1)P(\Lambda_1) = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{9} = \frac{28}{108}$$

$$P(E_2) = P(\Lambda_1 \cap M_2) = P(M_2/\Lambda_1)P(\Lambda_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{108}$$

$$P(E_3) = P(M_1 \cap \Lambda_2) = P(\Lambda_2/M_1)P(M_1) = \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{99}$$

$$P(E_4) = P(M_1 \cap M_2) = P(M_2/M_1)P(M_1) = \frac{7}{11} \cdot \frac{5}{9} = \frac{35}{99}$$

$$\text{Επίσης } P(\Lambda_3/E_1) = \frac{10}{15}, P(\Lambda_3/E_2) = \frac{7}{14}, P(\Lambda_3/E_3) = \frac{7}{14}, P(\Lambda_3/E_4) = \frac{4}{13}$$

Αντικαθιστούμε στην (2) και βρίσκουμε $P(\Lambda_3) = 0,473$

$$\gamma) P(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) = \frac{P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)}{P(\Lambda_3)}$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } P(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) &= P((\Lambda_1 \cap \Lambda_3) \cap \Omega) = P((\Lambda_1 \cap \Lambda_3) \cap (\Lambda_2 \cup M_2)) = \\ &= P((\Lambda_1 \cap \Lambda_3 \cap \Lambda_2) \cup (\Lambda_1 \cap \Lambda_3 \cap M_2)) = P(\Lambda_1 \cap \Lambda_3 \cap \Lambda_2) + P(\Lambda_1 \cap \Lambda_3 \cap M_2) = \\ &= P(\Lambda_3 / \Lambda_1 \cap \Lambda_2)P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) + P(\Lambda_3 / \Lambda_1 \cap M_2)P(\Lambda_1 \cap M_1) = \\ &= P(\Lambda_3 / E_1)P(E_1) + P(\Lambda_3 / E_2)P(E_2) = 0,265 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P(\Lambda_1 / \Lambda_3) = \frac{0,265}{0,473} = 0,560$$

Άσκηση 2.2 σελ. 29

Αν X ο αριθμός λευκών σφαιρών στην A τότε $X = 4, 5, 6$

Η σ.μ.π. είναι οι πιθανότητες $P(X=4)$, $P(X=5)$, $P(X=6)$

$\Lambda_A \Lambda_B$: το ενδεχόμενο λευκή από την A στη B και λευκή από τη B στην A

$\Lambda_A M_B$: το ενδεχόμενο λευκή από την A στη B και μαύρη από τη B στην A

$M_A \Lambda_B$: το ενδεχόμενο μαύρη από την A στη B και λευκή από τη B στην A

$M_A M_B$: το ενδεχόμενο μαύρη από την A στη B και μαύρη από τη B στην A

Τότε :

$$P(\Lambda_A \Lambda_B) = P(\Lambda_B / \Lambda_A) P(\Lambda_A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{20}{90}$$

$$P(\Lambda_A M_B) = P(M_B / \Lambda_A) P(\Lambda_A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90}$$

$$P(M_A \Lambda_B) = P(\Lambda_B / M_A) P(M_A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{90}$$

$$P(M_A M_B) = P(M_B / M_A) P(M_A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{28}{90}$$

Τώρα

$$P(X=4) = P(\Lambda_A M_B) = \frac{30}{90}$$

$$P(X=5) = P(\Lambda_A \Lambda_B \cup M_A M_B) = P(\Lambda_A \Lambda_B) + P(M_A M_B) = \frac{20}{90} + \frac{28}{90} = \frac{48}{90}$$

$$P(X=6) = P(M_A \Lambda_B) = \frac{12}{90}$$

Άσκηση 2.7 σελ. 90

Η υπόθεση $P(t < T < t + dt \mid T > t) = \beta(t)dt$ νοείται με την έννοια ότι

$P(t < T < t + h \mid T > t) = \beta(t)h$ για μικρά $h > 0$. Άρα

$$\frac{P(\{t < T < t+h\} \cap \{T > t\})}{P(T > t)} = \beta(t)h \quad \text{και συνεπώς}$$

$$P(t < T < t+h) = (1 - P(T \leq t))\beta(t)h$$

$$\text{άρα } \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = (1 - F(t))\beta(t) \quad \text{όπου } F \text{ η σ.κ. της } T.$$

$$\text{Για } h \rightarrow 0 \text{ έχω } F'(t) = (1 - F(t))\beta(t) \quad (*)$$

α) Αν $\beta(t) = \alpha t$ με $\alpha > 0$ τότε $F'(t) = (1 - F(t)) \alpha t \Leftrightarrow$

$$\frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \alpha t \Leftrightarrow \frac{-(1 - F(t))'}{1 - F(t)} = \alpha t \Leftrightarrow$$

$$[\ln(1 - F(t))]' = \alpha t \Leftrightarrow \ln(1 - F(t)) = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + c$$

Επειδή είναι λογικό να υποθέσουμε ότι $F(0) = 0$ βρίσκουμε $c = 0$ και άρα

$$f(t) = F'(t) = \alpha t e^{-\frac{1}{2}\alpha t^2}, \quad t > 0 \quad (\text{Rayleigh})$$

β) Αν $\beta(t) = \alpha$ με $\alpha > 0$ τότε όμοια όπως στο α) βρίσκουμε

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0 \text{ και συνεπώς}$$

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \quad t > 0 \quad (\text{Εκθετική})$$

γ) Από την (*) έχω $F_1'(t) = (1 - F_1(t))\beta_1(t)$, $F_2'(t) = (1 - F_2(t))\beta_2(t)$

$$\text{άρα } \frac{F_1'(t)}{F_2'(t)} = \frac{(1 - F_1(t))^2\beta_1(t)}{(1 - F_2(t))^2\beta_2(t)} = \frac{(1 - F_1(t))^2\beta_1(t)}{(1 - F_2(t))^2\kappa\beta_1(t)} \quad \text{άρα}$$

$$\kappa \frac{F_1'(t)}{1 - F_1(t)} = \frac{F_2'(t)}{1 - F_2(t)} \Rightarrow \kappa [\ln(1 - F_1(t))]' = [\ln(1 - F_2(t))]' \quad \text{άρα}$$

$$[\ln(1 - F_1(t))^\kappa]' = [\ln(1 - F_2(t))]' \quad \text{και αφού } F_1(0) = F_2(0) = 0$$

$$\text{έχω } 1 - F_2(t) = [1 - F_1(t)]^\kappa \quad \text{δηλαδή } P(T_2 > t) = [P(T_1 > t)]^\kappa.$$

Άσκηση 2.8 σελ. 90

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

Αν T ο χρόνος ζωής του ανταλλακτικού τότε από εκφώνηση

$$P(T \leq t|A) = 1 - e^{-\alpha t}, \quad P(T \leq t|B) = 1 - e^{-\beta t} \quad \text{για } t > 0 \text{ και μηδέν για } t \leq 0.$$

Η σ.κ. της T είναι:

$$\alpha) F(t) = P(T \leq t) = P(T \leq t|A)P(A) + P(T \leq t|B)P(B)$$

$$= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{2 - e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{2}, & t > 0 \end{cases}$$

$$\beta) P(B|t_1 < T < t_2) = \frac{P(t_1 < T \leq t_2 | B)P(B)}{P(t_1 < T < t_2)} \quad (\text{Bayes})$$

$$\begin{aligned}\text{Όμως } P(t_1 < T < t_2) &= F(t_2) - F(t_1) = \frac{2 - e^{-\alpha t_2} - e^{-\beta t_2}}{2} - \frac{2 - e^{-\alpha t_1} - e^{-\beta t_1}}{2} \\ &= \frac{e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_2} + e^{-\beta t_1} - e^{-\beta t_2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Εξάλλου } P(t_1 < T \leq t_2 | B) &= P(\{(T \leq t_2) - (T \leq t_1)\} | B) = P(T \leq t_2 | B) - P(T \leq t_1 | B) = \\ &= 1 - e^{-\beta t_2} - (1 - e^{-\beta t_1}) = e^{-\beta t_1} - e^{-\beta t_2}\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στον τύπο του Bayes παραπάνω έχουμε :

$$P(B | t_1 < T < t_2) = \frac{(e^{-\beta t_1} - e^{-\beta t_2}) \cdot 0,5}{(e^{-\beta t_1} - e^{-\beta t_2} + e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_2}) \cdot 0,5}$$

Άσκηση 2.11 σελ. 90

Έστω T η διάρκεια ζωής του ανταλλακτικού

Τότε $P(T > 200 | A) = 1$ ενώ

$$P(T > 200 | B) = P(X > 200) = \int_{200}^{\infty} f(x) dx = [-e^{-\frac{1}{300}x}]_{200}^{\infty} = e^{-\frac{2}{3}}$$

Τώρα $P(T > 200) = P(T > 200 | A)P(A) + P(T > 200 | B)P(B)$

Όμως $P(T > 200) = 0.9$, $P(B) = 1 - P(A)$ και συνεπώς

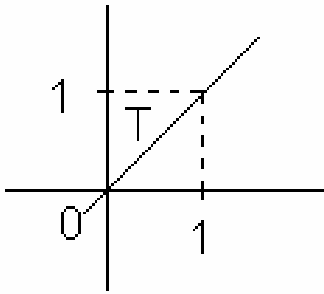
$$0.9 = 1 \cdot P(A) + e^{-\frac{2}{3}}(1 - P(A)) \quad \text{άρα}$$

$$0.9 = P(A) - e^{-\frac{2}{3}}P(A) + e^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$P(A) = \frac{0.9 - e^{-\frac{2}{3}}}{1 - e^{-\frac{2}{3}}}$$

Άσκηση 2.13 σελ. 91

$$f(x, y) = \frac{1}{y} \quad \text{για } 0 < x < y < 1, \text{ και } 0 \text{ παντού αλλού}$$



$$\alpha) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

για $x \notin (0, 1) \Rightarrow (x, y) \notin T$ άρα $f_X(x) = 0$

για $x \in (0, 1)$ έχω

$$f(x) = \int_0^1 f(x, y) dy + \int_{(0,1)^c} 0 dy = \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^x 0 dy + \int_x^1 \frac{1}{y} dy = [\ln y]_x^1 = -\ln x.$$

Συνολικά:

$$f_X(x) = \begin{cases} -\ln x & , x \in (0, 1) \\ 0 & , x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$\beta) f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln y} = -\frac{1}{y \ln y} \text{ όταν } 0 < x < y < 1 \text{ και } 0 \text{ παντού αλλού.}$$

$$\gamma) P(X+Y > \frac{1}{2}) = \iint_A f(x, y) dy \text{ όπου } A = \{(x, y): x+y > \frac{1}{2}\}$$

Επειδή όμως $f = 0$ εκτός του τριγώνου T και θέτοντας $\Gamma = T - (B_1 \cup B_2)$, (δες σχήμα) έχουμε:

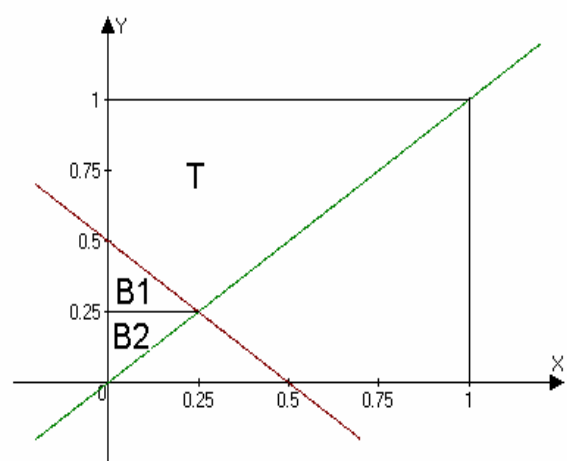
$$P(X+Y > \frac{1}{2}) = \iint_{\Gamma} \frac{1}{y} dx dy = 1 - \iint_{B_1 \cup B_2} \frac{1}{y} dx dy =$$

$$= 1 - \iint_{B_1} \frac{1}{y} dx dy - \iint_{B_2} \frac{1}{y} dx dy =$$

$$= 1 - \int_{1/4}^{1/2} \int_0^{1/2-y} \frac{1}{y} dx dy - \int_0^{1/4} \int_0^y \frac{1}{y} dx dy =$$

$$= 1 - \int_{1/4}^{1/2} \frac{1/2 - y}{y} dy - \int_0^{1/4} 1 dy =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{y} dy + \int_{1/4}^{1/2} 1 dy - \int_0^{1/4} 1 dy =$$



$$= 1 - \frac{1}{2} [\ln y]_{1/4}^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \ln 2 = 0,6534$$

Άσκηση 2.15 σελ. 91

$f(x, y) = c(x^2 + y^2)$ όταν $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$
και 0 παντού αλλού

$$\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \Leftrightarrow \iint_T c(x^2 + y^2) dx dy = 1 \Leftrightarrow c \cdot \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy = 1 \Leftrightarrow$$

$$c \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 \right) dy = 1 \Leftrightarrow c \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

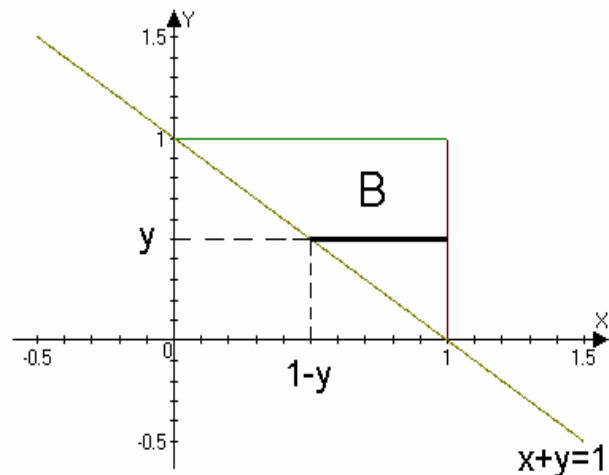
$$\beta) P\left(\left\{0 < X \leq \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{\frac{1}{2} < Y \leq 1\right\}\right) = \int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{4}$$

γ) Έστω $T = (0, 1) \times (0, 1)$ και $A = \{(x, y) : x + y > 1\}$

Επειδή $f = 0$ εκτός του T
τελικά απομένει :

$$P(X + Y > 1) = \iint_B \frac{3}{2}(x^2 + y^2) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 \frac{3}{2}(x^2 + y^2) dx \right) dy = \frac{3}{4}$$



$$\delta) P\left(0 < X \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(\left\{0 < X \leq \frac{1}{2}\right\} \cap \{-\infty < Y < +\infty\}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{1/2} f(x, y) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1/2} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) dx dy = \frac{3}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{24} + \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{3}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{12} + y^2 \right) dy = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{16}$$

Άσκηση 2.20 σελ. 92 (διορθωμένη)

$f(x, y) = \frac{1}{1-\rho} e^{-x-\rho xy-y}$ όταν $x > 0, y > 0$ και 0 παντού αλλού. Με $\rho \in (0, 1)$.

Θα βρούμε πρώτα τις περιθώριες κατανομές $f_X(x)$ και $f_Y(y)$.

$$\text{Για } x \leq 0 \text{ έχω } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0$$

Για $x > 0$ έχω

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\rho} e^{-x-\rho xy-y} dy = \frac{1}{1-\rho} e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-y(\rho x+1)} dy = \frac{1}{1-\rho} e^{-x} \left[-\frac{1}{\rho x+1} e^{-y(\rho x+1)} \right]_0^{+\infty} \\ = \frac{1}{1-\rho} \frac{e^{-x}}{1+\rho x}$$

Συνολικά

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} \frac{e^{-x}}{1+\rho x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Όμοια

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} \frac{e^{-y}}{1+\rho y} & , y > 0 \\ 0 & , y \leq 0 \end{cases}$$

Όταν $\rho=0$ τότε $f(x,y) = e^{-x-y}$, $f_X(x) = e^{-x}$, $f_Y(y) = e^{-y}$ για όλα τα $x,y > 0$.

Προφανώς $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall x,y > 0$ άρα X,Y ανεξάρτητες.

Αντίστροφα: Όταν X,Y ανεξάρτητες τότε $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ για όλα τα x,y άρα

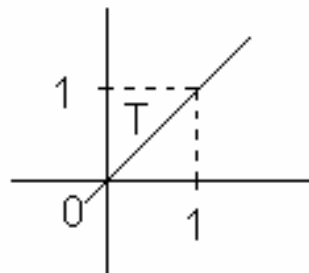
$$e^{-x-\rho xy-y} = \frac{1}{1-\rho} \frac{e^{-x}}{1+\rho x} \cdot \frac{e^{-y}}{1+\rho y} \quad \forall x,y > 0 \quad \text{άρα} \quad e^{-\rho xy} = \frac{1}{(1+\rho x)(1+\rho y)(1-\rho)} \quad \forall x,y > 0$$

άρα

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{-\rho xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{(1+\rho x)(1+\rho y)(1-\rho)} \quad \text{άρα} \quad e^0 = \frac{1}{1-\rho} \quad \text{άρα} \quad \rho = 1$$

Άσκηση 2.23 σελ. 93

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{ παντού αλλου} \end{cases}$$



$$\text{Πρέπει} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1 \Leftrightarrow \iint_T c(x^2 + y^2) dx dy = 1 \Leftrightarrow c \cdot \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy = 1 \Leftrightarrow$$

$$c \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy = 1 \Leftrightarrow c = 2$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^1 f(x, y) dy \text{ αφού } f = 0 \text{ όταν } y \notin (0, 1)$$

$$\text{Όταν } x \notin (0, 1) \text{ τότε } (x, y) \notin T \text{ και } f(x, y) = 0 \text{ άρα } f_X(x) = \int_0^1 0 dy = 0$$

$$\text{Όταν } x \in (0, 1) \text{ τότε } f_X(x) = \int_0^x 0 dy + \int_x^1 2(x+y) dy = -3x^2 + 2x + 1$$

$$\text{άρα } f_X(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x + 1, & 0 < x < 1 \\ 0 & , x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 f(x, y) dx \text{ αφού } f = 0 \text{ όταν } x \notin (0, 1)$$

$$\text{Όταν } y \notin (0, 1) \text{ τότε } (x, y) \notin T \text{ και } f(x, y) = 0 \text{ άρα } f_Y(y) = \int_0^1 0 dx = 0$$

$$\text{Όταν } y \in (0, 1) \text{ τότε } f_Y(y) = \int_y^1 0 dx + \int_0^y 2(x+y) dx = 3y^2$$

$$\text{άρα } f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 < y < 1 \\ 0 & , y \notin (0, 1) \end{cases}$$

Επειδή $f_X(x) \cdot f_Y(y) = (-3x^2 + 2x + 1) \cdot 3y^2 \neq 2(x+y) = f(x, y)$ για $(x, y) \in T$
συμπεραίνω ότι X, Y εξαρτημένες.

Άσκηση 2.25 σελ. 93

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.μ. ανεξάρτητες και ισόνομες με σ.κ. F .

Θέτουμε $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ και $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Να ευρεθεί η κατανομή των Y και Z .

Από υπόθεση $F(x) = P(X_i \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$.

Από τον ορισμό της σ.κ. έχουμε για την F_Y της τ.μ. Y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq y) \text{ Όμως } \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq y$$

ισοδυναμεί με $\{X_1 \leq y\} \cap \{X_2 \leq y\} \cap \dots \cap \{X_n \leq y\}$ Άρα

$$F_Y(y) = P(\{X_1 \leq y\} \cap \{X_2 \leq y\} \cap \dots \cap \{X_n \leq y\}) \text{ και λόγω ανεξαρτησίας}$$

$$F_Y(y) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq y) = \prod_{i=1}^n F(y) = (F(y))^n, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } F_Y(y) = (F(y))^n, \quad y \in \mathbb{R}$$

Αν υπάρχει σ.π.π. f_Y της τ.μ. Y τότε $f_Y = (F(y))'$ άρα

$$f_Y(y) = n \cdot (F(y))^{n-1} \cdot f(y)$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq z) = 1 - P(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > z) = \\ &= 1 - P(\{X_1 > z\} \cap \{X_2 > z\} \cap \dots \cap \{X_n > z\}) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > z) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq z)) = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F(z)) \end{aligned}$$

άρα $F_Z(z) = 1 - (1 - F(z))^n$, $z \in \mathbb{R}$

Όσο για την σ.π.π. της τ.μ. Z είναι:

$$f_Z(z) = n \cdot (1 - F(z))^{n-1} \cdot f(z) , \quad z \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 2.26 σελ. 93

Εύκολα βρίσκουμε τις επιμέρους κατανομές των X, Y

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Αφού $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x, y)$ συμπεραίνουμε ότι οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες.

α) Όταν τα εξαρτήματα είναι «εν σειρά» τότε η διάρκεια ζωής του συστήματος είναι η μικρότερη των διαρκειών ζωής των δύο εξαρτημάτων (δεν ξέρουμε όμως ποια από τις δύο είναι). Έτσι η διάρκεια ζωής T του συστήματος είναι $T = \min\{X, Y\}$ οπότε έχει σ.π.π. σύμφωνα με το προηγούμενο (ασκ. 2.25) :

$$f_T(t) = 2(1 - F(t))e^{-t}, \quad t > 0$$

όπου F η σ.κ. των X, Y δηλ. $F(t) = \int_{-\infty}^t f_X(\omega) d\omega = 1 - e^{-t}, \quad t > 0$

$$\text{Άρα } f_T(t) = 2 \cdot e^{-2t}, \quad t > 0$$

Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(1 < T < 2) = \int_1^2 2e^{-2t} dt = [-e^{-2t}]_1^2 = e^{-2} - e^{-4}$$

β) Αν T^* η διάρκεια ζωής του συστήματος των δύο εξαρτημάτων τότε είναι η μεγαλύτερη από τις δύο αφού είναι «εν παραλλήλω» άρα $T^* = \max\{X, Y\}$.

Συνεπώς $f_{T^*}(t) = 2 \cdot F(t) \cdot e^{-t}, \quad t > 0$

Άρα $f_{T^*}(t) = 2(1 - e^{-t})e^{-t} = 2e^{-t} - 2e^{-2t}, \quad t > 0$

$$\text{Άρα } P(1 < T < 2) = \int_1^2 f_{T^*}(t)dt = \dots$$

Άσκηση 3.12 σελ. 127

Έστω X η διάρκεια ζωής (σε έτη). Από την εκφώνηση $X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 2)$. Έστω t ο ζητούμενος χρόνος εγγύησης. Όταν $X < t$ αντικαθίσταται ο λέβητας, αλλιώς όχι. Συνεπώς το ποσοστό των αντικαθιστώμενων λεβήτων θα είναι $P(X < t)$ και είναι επιθυμητό να είναι :

$$P(X < t) \leq 0,02$$

$$\text{Όμως } P(X < t) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{t - 10}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{t - 10}{\sqrt{2}}\right) \text{ άρα } \Phi\left(\frac{t - 10}{\sqrt{2}}\right) \leq 0,02 \quad (1)$$

Στους πίνακες της Κανονικής κατανομής αναζητώ αριθμό α τέτοιο ώστε

$$\Phi(\alpha) = 0,02 \text{ δηλ. } 1 - \Phi(\alpha) = 0,98 \text{ δηλ. } \Phi(-\alpha) = 0,98 \text{ και βρίσκω ότι}$$

$$-\alpha = 2,05 \text{ άρα } \alpha = -2,05. \text{ Συνεπώς από την (1) έχω } \Phi\left(\frac{t - 10}{\sqrt{2}}\right) \leq \Phi(\alpha) = \Phi(-2,05)$$

$$\text{και επειδή η } \Phi \text{ αύξουσα συμπεραίνω ότι } \frac{t - 10}{\sqrt{2}} \leq -2,05 \text{ άρα } t \leq 7,1 \text{ (έτη).}$$

Άσκηση 3.13 σελ. 127

$$X \sim P(\lambda) \quad \text{δηλ. } P(X = \kappa) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}, \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

α) Έστω Y ο αριθμός των καταγεγραμμένων ατελειών. Τότε $Y = 0, 1, 2, \dots$ και

$$\text{προφανώς } Y \leq X. \text{ Ζητούμε την } P(Y = m) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} P(Y = m | X = \kappa)P(X = \kappa) \quad (\text{τύπος}$$

ολικής πιθανότητας). Όμως όταν $\kappa < m$ τότε $P(Y = m | X = \kappa) = 0$ διότι είναι αδύνατο

να καταγραφούν m ατέλειες όταν οι πραγματικές είναι $\kappa < m$ και συνεπώς

$$P(Y = m) = \sum_{\kappa=m}^{\infty} P(Y = m | X = \kappa)P(X = \kappa). \text{ Όμως οι καταγεγραμμένες ατέλειες στις } \kappa$$

πραγματικές με πιθανότητα καταγραφής p της κάθε μιας ακολουθούν διωνυμική

$$\text{κατανομή } b(N = \kappa, p) \text{ δηλαδή: } P(Y = m | X = \kappa) = \binom{\kappa}{m} p^m (1-p)^{\kappa-m} \text{ και άρα}$$

$$P(Y = m) = \sum_{\kappa=m}^{\infty} \binom{\kappa}{m} p^m (1-p)^{\kappa-m} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} = p^m e^{-\lambda} \frac{1}{m!} \sum_{\kappa=m}^{\infty} \frac{1}{(\kappa-m)!} (1-p)^{\kappa-m} \lambda^{\kappa-m} \lambda^m =$$

$$\begin{aligned}
&= p^m e^{-\lambda} \frac{1}{m!} \lambda^m \sum_{\kappa=m}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{\kappa-m}}{(\kappa-m)!} = (\lambda p)^m e^{-\lambda} \frac{1}{m!} \left(1 + \frac{\lambda(1-p)}{1!} + \frac{[\lambda(1-p)]^2}{2!} + \dots\right) = \\
&= (\lambda p)^m e^{-\lambda} \frac{1}{m!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!}, \quad m=0,1,2,\dots
\end{aligned}$$

δηλαδή η τ.μ. Y ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λp .

β)

$$\begin{aligned}
P(X > 3 | Y = 2) &= 1 - P(X \leq 3 | Y = 2) = 1 - P(2 \leq X \leq 3 | Y = 2) = \\
&= 1 - P(\{X = 2\} \cup \{X = 3\} | Y = 2) = 1 - P(X = 2 | Y = 2) - P(X = 3 | Y = 2) = \\
&= 1 - \frac{P(X = 2 \text{ και } Y = 2)}{P(Y = 2)} - \frac{P(X = 3 \text{ και } Y = 2)}{P(Y = 2)}
\end{aligned}$$

Όμως $P(X = 2 \text{ και } Y = 2) = P(Y = 2 | X = 2)P(X = 2)$,

$P(X = 3 \text{ και } Y = 2) = P(Y = 2 | X = 3)P(X = 3)$ όπου:

$$P(Y = 2 | X = 2) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 \text{ και } P(Y = 2 | X = 3) = \binom{3}{2} p^2 (1-p)^{3-2}$$

Άσκηση 3.14 σελ. 127

$$P(X \leq 20) = \int_0^{20} f(x) dx \stackrel{\substack{\ln x = y \\ x = e^y}}{=} \int_{-\infty}^{\ln 20} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}(\ln 20 - \mu)\right).$$

Όμως $\sigma = \frac{1}{2}, \mu = 2$ άρα $P(X \leq 20) = \Phi\left(\frac{1}{2}(\ln 20 - 2)\right) = \Phi(2) = 0,97725$

Άσκηση 3.15 σελ. 127

α) Το ποσοστό των κατάλληλων είναι η πιθανότητα :

$$\begin{aligned}
P(5 - 10^{-1} < X < 5 + 10^{-1}) &= P\left(\frac{5 - 10^{-1} - 5}{0,5 \cdot 10^{-1}} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{5 + 10^{-1} - 5}{0,5 \cdot 10^{-1}}\right) = P\left(-2 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 2\right) = \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0,97725 - 1 = 0,9550
\end{aligned}$$

β) Έστω $Y=0,1,2,3,4$ ο αριθμός των κατάλληλων στα 4. Τότε Y ακολουθεί διωνυμική κατανομή δηλ.:

$$P(Y = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k} \quad \text{όπου } p=0,955$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y \geq 3) = P(\{Y = 3\} \cup \{Y = 4\}) = P(Y = 3) + P(Y = 4) = \binom{4}{3} p^3 (1-p)^1 + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0$$

όπου $p=0,995$.

Άσκηση 3.17 σελ. 127

α) Από τον τύπο ολικής πιθανότητας:

$$P(X < 41) = P(X < 41 / A)P(A) + P(X < 41 / B)P(B)$$

Όμως αν είναι τύπου A τότε $X \sim N(\mu = 44, \sigma^2 = 3^2)$

$$\text{Άρα } P(X < 41 / A) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{41 - 44}{3}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84 = 0,16$$

$$\text{Και όμοια } P(X < 41 / B) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{41 - 36}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 0,95$$

$$\text{Άρα } P(X < 41) = 0,16 \cdot \frac{2}{3} + 0,95 \cdot \frac{1}{3} = 0,42$$

$$\text{Συνεπώς } P(A / X < 41) = \frac{P(X < 41 / A)P(A)}{P(X < 41)} = \frac{0,16 \cdot \frac{2}{3}}{0,42} = 0,25$$

β) Έστω $Y = 0, 1, 2, \dots, 20$ ο αριθμός ανταλλακτικών στα 20 με διάρκεια ζωής μικρότερη του 41. Τότε η τ.μ. Y ακολουθεί διωνυμική κατανομή $b(N=20, p=0,42)$ και άρα $P(Y \leq 15) = 1 - P(Y > 15) = 1 - P(\{Y = 16\} \cup \{Y = 17\} \cup \dots \cup \{Y = 20\}) =$

$$= 1 - P(Y = 16) - P(Y = 17) - \dots - P(Y = 20) = 1 - \binom{20}{16} p^{16} (1-p)^4 - \dots - \binom{20}{20} p^{20} (1-p)^0$$

όπου $p=0,42$

Άσκηση 4.2 σελ.150

$$f(c+x) = f(c-x), \text{ για κάθε } x \text{ (1)}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (w+c) f(w+c) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} w f(w+c) dw + \int_{-\infty}^{+\infty} c f(w+c) dw = \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} w f(c-w) dw + c \int_{-\infty}^{+\infty} f(w+c) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} w f(c-w) dw + c1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (c-z) f(z) dz + c = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} c f(z) dz - \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz + c = c1 - I + c = 2c - I \Rightarrow 2I = 2c \Rightarrow I = c \end{aligned}$$

Άσκηση 4.5 σελ.150

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ συνεπώς } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ έχουμε

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \stackrel{\frac{x-\mu}{\sigma}=\omega}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma\omega+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega = \\
&= \\
&= e^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega^2-2\omega\sigma)}{2}} d\omega = e^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega^2-2\sigma\omega+\sigma^2-\sigma^2)}{2}} d\omega = \\
&= e^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\sigma)^2}{2}} e^{\frac{\sigma^2}{2}} d\omega = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\sigma)^2}{2}} d\omega = \\
&= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} 1 = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}
\end{aligned}$$

διότι $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ είναι η σ.π.π. της $N(0,1)$

Για την διασπορά υπολογίζουμε πρώτα την $E(Y^2) = E(e^{2x})$ με ανάλογο τρόπο και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον τύπο $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

Άσκηση 4.14 σελ.151

Το ενδεχόμενο αποδοχής της κατασκευής είναι $A \cap B$ και αφού X, Y ανεξάρτητες τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα

δηλαδή,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Τώρα
$$\begin{aligned}
P(A) &= P(25 - 0.6 < X < 25 + 0.6) = P\left(\frac{-0.6}{\sqrt{0.3}} < \frac{X-25}{\sqrt{0.3}} < \frac{0.6}{\sqrt{0.3}}\right) = \\
&= \Phi(1,1) - \Phi(-1,1) = 2\Phi(1,1) - 1 = 2 * 0.87375 - 1 = 0.687
\end{aligned}$$

και
$$\begin{aligned}
P(B) &= P(37 - 0.8 < Y < 37 + 0.8) = P\left(\frac{-0.8}{0.6} < \frac{Y-37}{0.6} < \frac{0.8}{0.6}\right) = \\
&= \Phi(1.33) - \Phi(-1.33) = 2\Phi(1.33) - 1 = 2 * 0.90824 - 1 = 0.816
\end{aligned}$$

άρα $P(A \cap B) = 0.687 * 0.816 = 0.56$

Το ενδεχόμενο να πραγματοποιείται μία ακριβώς από τις προδιαγραφές A, B είναι $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$ και επειδή τα A^c, B είναι ανεξάρτητα όπως επίσης και τα A, B^c θα έχω :

$$\begin{aligned}
P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) &= P(A^c \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A^c)P(B) + P(A)P(B^c) = \\
&= [1 - P(A)]P(B) + P(A)[1 - P(B)] = (1 - 0.627)0.816 + 0.687(1 - 0.816) = 0.255 + 0.126 = 0.381
\end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο να μην ικανοποιούνται οι προδιαγραφές A, B είναι $A^c \cap B^c$ όπου A^c, B^c ανεξάρτητα συνεπώς $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = 0.057$

Έστω τώρα η τυχαία μεταβλητή Y = κόστος κατασκευής ανα κομμάτι. Τότε

$$Y = \begin{cases} 5000A \cap B \\ 6200(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ 7000A^c \cap B^c \end{cases}$$

$$\text{Άρα } E(Y) = 5000 \cdot 0.56 + 6200 \cdot 0.381 + 7000 \cdot 0.057 = 5562$$

$$\text{Σημείωση : } P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cap B) - P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c))$$

Άσκηση 4.24 σελ.153

Έστω $P(X=1) = p_1$, $P(X=0) = 1 - p_1$ και $P(Y=1) = p_2$, $P(Y=0) = 1 - p_2$
Όταν οι X, Y είναι ανεξάρτητες είναι γνωστό από την θεωρία ότι είναι και ασυσχέτιστες.

Θα δείξουμε τώρα το αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι είναι ασυσχέτιστες και θα δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητες

Αρκεί να δείξω ότι :

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1), \quad P(X=1, Y=0) = P(X=1)P(Y=0)$$

$$P(X=0, Y=1) = P(X=0)P(Y=1), \quad P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0)$$

$$\text{Έχουμε ότι } \text{Cov}(X, Y) = 0 \text{ δηλαδή } E(XY) - E(X)E(Y) = 0 \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y), \quad (1)$$

$$\text{Όμως } E(XY) = 1P(XY=1) + 0P(XY=0) = P(XY=1) \text{ και}$$

$$E(X) = P(X=1), \quad E(Y) = P(Y=1) \text{ και άρα από την (1) έχουμε}$$

$$P(XY=1) = P(X=1)P(Y=1) \text{ όμως } P(XY=1) = P(X=1, Y=1)$$

$$\text{Συνεπώς } P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } P(X=1, Y=0) &= P(\{X=1\} \cap \{Y=1\}^c) = P(X=1) - P(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) \quad (2) \\ &= P(X=1) - P(X=1)P(Y=1) = P(X=1)[1 - P(Y=1)] = P(X=1)P(Y=0) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P(X=1, Y=0) = P(X=1)P(Y=0), \quad (3)$$

$$\text{Όμοια δείχνουμε ότι } P(X=0, Y=1) = P(X=0)P(Y=1), \quad (4)$$

Μένει να δείξουμε ότι $P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0)$. Πράγματι

$$P(X=0, Y=0) =$$

$$\begin{aligned} P(\{X=0\} \cap \{Y=1\}^c) &= P(X=0) - P(\{X=0\} \cap \{Y=1\}) \quad (4) \\ &= P(X=0) - P(X=0)P(Y=1) = \\ &= P(X=0)[1 - P(Y=1)] = P(X=0)P(Y=0) \end{aligned}$$

Άσκηση 4.25 σελ.153

$$(X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma) \text{ όπου } \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \text{ και } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

είναι γνωστό ότι $\mu_i = E(X_i)$ και $\sigma_i^2 = V(X_i)$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \text{Cov}(X_1, X_2)$

Η από κοινού σ.π.π. των (X_1, X_2) είναι $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi(\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-Q(x_1, x_2)}$ όπου

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}$$

Αφού γνωρίζω ότι $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ θα είναι $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

Άρα $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$ και συνεπώς

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1^2}, \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2^2} \right) \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right)$$

Άρα $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi(\det \Sigma)} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$, δηλαδή $f(x_1, x_2) = h(x_1)g(x_2)$

και συνεπώς οι τ.μ. X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες

Άσκηση 4.28 σελ.154

$f(x, y) = k(x + y - x^2 - y^2)$ όταν $0 < x < 1$ ή $0 < y < 1$ και 0 αλλού

Εύρεση σταθεράς κ

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1 \Leftrightarrow k \int_0^1 \int_0^1 (x + y - x^2 - y^2) dx dy = 1 \Leftrightarrow$$

$$k \int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y - x^2 - y^2) dx \right) dy = 1 \Leftrightarrow k \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$$

Εύρεση των σ.π.π. f_X και f_Y

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

για $x \notin (0, 1) \Rightarrow (x, y) \notin T$ άρα $f_X(x) = \int 0 dy = 0$

για $x \in (0, 1)$ είναι

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^1 3(x + y - x^2 - y^2) dy + \int_1^{+\infty} 0 dy = \\ &= 3 \int_0^1 (x + y - x^2 - y^2) dy = 3 \left(x + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 - x^2 - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 \right) = \\ &= 3 \left(x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{3} \right) = 3 \left(-x^2 + x + \frac{1}{6} \right) = -3x^2 + 3x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

δηλαδή $f_X(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3x + \frac{1}{2}, & x \in (0, 1) \\ 0 & , x \notin (0, 1) \end{cases}$

ομοίως

$$f_Y(y) = \begin{cases} -3y^2 + 3y + \frac{1}{2}, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$$

είναι προφανές ότι $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ για $(x,y) \in (0,1)$ και συνεπώς οι τ.μ. X,Y είναι εξαρτημένες.

Εύρεση $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x(-3x^2 + 3x + \frac{1}{2})dx = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 y(-3y^2 + 3y + \frac{1}{2})dy = \frac{1}{2}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 xy3(x+y-x^2-y^2)dxdy = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 0$$

Συνεπώς οι X,Y είναι ασυσχέτιστες

Άσκηση 4.33 σελ.155

$$\rho(U, T) = \frac{\text{Cov}(U, T)}{\sqrt{V(U)}\sqrt{V(T)}}, \quad X, Y, Z \sim E(a)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, T) &= \text{Cov}(X+Y, Y+Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Y) + \text{Cov}(Y, Z) = \\ &= \text{Cov}(Y, Y) = V(Y) = \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

διότι X, Y, Z ανεξάρτητες. Επίσης για τον ίδιο λόγο

$$V(U) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

$$V(T) = V(Y+Z) = V(Y) + V(Z) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

$$\text{Άρα } \rho(U, V) = \frac{\frac{1}{a^2}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}}\sqrt{\frac{2}{a^2}}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{2}{a^2}} = \frac{1}{2}$$

Παρατηρήσεις: Από την θεωρία χρησιμοποιήθηκαν τα

Αν X, Y ανεξάρτητες τότε X, Y ασυσχέτιστες και

$$\text{Cov}(X, X) = V(X)$$

Επίσης ότι η διασπορά της εκθετικής $E(a)$ είναι $\frac{1}{a^2}$ από τους πίνακες κατανομών.

Άσκηση 4.36 σελ.155

$$\rho(Z, W) = \frac{\text{Cov}(Z, W)}{\sqrt{V(Z)}\sqrt{V(W)}}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Z, W) &= \text{Cov}(aX + bY, aX - bY) = a^2\text{Cov}(X, X) - ab\text{Cov}(X, Y) + ab\text{Cov}(Y, X) - b^2\text{Cov}(Y, Y) = \\ &= a^2V(X) - b^2V(Y) = (a^2 - b^2)V(X)\end{aligned}$$

διότι X, Y ανεξάρτητες άρα $\text{Cov}(X, Y) = 0$ και ισόνομες άρα $V(X) = V(Y)$

Επίσης $V(Z) = a^2V(X) + b^2V(Y) = (a^2 + b^2)V(X)$ και

$$V(W) = a^2V(X) + b^2V(Y) = (a^2 + b^2)V(X) \text{ συνεπώς}$$

$$\rho(Z, W) = \frac{(a^2 - b^2)V(X)}{(a^2 + b^2)V(X)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Άσκηση 5.1 σελ.176

$$X \sim U(0,1) \text{ δηλαδή } f_x(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$y = -\ln x$$

$$S = (0,1) \quad y = g(x) = -\ln x \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = e^{-y}$$

$$T = g(S) = (0, +\infty)$$

$$\text{Άρα } f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = 1 \cdot |-e^{-y}| = e^{-y} \quad \text{για } y \in T = (0, +\infty)$$

και $f_y(y) = 0$ αλλού.

$$\text{Τελικά } f_y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \text{ δηλαδή } Y \sim E(1) \text{ Άσκηση 5.5 σελ.176}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & x \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$y = \epsilon\phi x \Leftrightarrow x = \text{τοξ}\epsilon\phi y \text{ άρα αν } g(x) = \epsilon\phi x \text{ τότε } g^{-1}(y) = \text{τοξ}\epsilon\phi y$$

$$S = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } T = g(S) = \mathbb{R} \text{ συνεπώς}$$

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 5.5 σελ.176

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & x \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$y = \varepsilon\phi x \Leftrightarrow x = \tau\omicron\xi\varepsilon\phi y$ άρα αν $g(x) = \varepsilon\phi x$ τότε $g^{-1}(y) = \tau\omicron\xi\varepsilon\phi y$

$S = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $T = g(S) = \mathbb{R}$ συνεπώς

$$f_y(y) = f_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 5.11 σελ.177

α) Αφού $f_x(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}, x>0$ και $f_y(y) = \frac{a^q}{\Gamma(q)} y^{q-1} e^{-ay}, y>0$

και X, Y ανεξάρτητες θα είναι $f_{xy}(x, y) = \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} y^{q-1} e^{-a(x+y)}, x, y>0$

και 0 παντού αλλού

β) Θα βρούμε την από κοινού σ.π.π. του ζεύγους (R, S) .

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $r = \frac{x}{x+y}, \quad s = x+y$ ο οποίος αντιστρέφεται στον

$x=rs, \quad y=s-rs$ με $0 < r < 1, \quad s>0$ και έχει Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} s & r \\ -s & 1-r \end{vmatrix} = s(1-r) + sr = s - sr + sr = s, \quad s>0$$

άρα $f_{RS}(r, s) = \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1} s^{p-1} s^{q-1} (1-r)^{q-1} e^{-as} s$ για $0 < r < 1, \quad s>0$

ή $f_{RS}(r, s) = \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1} (1-r)^{q-1} s^{p+q-1} e^{-as}$ με $0 < r < 1, \quad s>0$

αφού η $f_{RS}(r, s)$ γράφεται σαν γινόμενο μιας συνάρτησης του r επί μια συνάρτηση του s οι τ.μ. R, S είναι ανεξάρτητες

γ)

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{RS}(r, s) ds = \int_0^{\infty} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1} (1-r)^{q-1} s^{p+q-1} e^{-as} ds = \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1} (1-r)^{q-1} \int_0^{\infty} s^{p+q-1} e^{-as} ds \stackrel{as=t}{=} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1} (1-r)^{q-1} \frac{1}{a^{p+q}} \int_0^{\infty} t^{p+q-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} r^{p-1} (1-r)^{q-1}, \quad \text{όταν } 0 < r < 1. \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι η σ.π.π. της κατανομής Βήτα

Άσκηση 5.17 σελ.178

Οι τ.μ. X, Y έχουν εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(a)$ και αφού είναι ανεξάρτητες το ζεύγος (X, Y) έχει από κοινού κατανομή:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = ae^{-ax}ae^{-ay} = a^2e^{-(x+y)} \quad \text{για } x, y > 0.$$

Θα βρούμε τώρα την κατανομή $f_{U,W}(u, w)$ του ζεύγους (U, W) όπου:

$$U = X + Y, \quad W = \frac{X}{Y}.$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $T: u = x + y$ και $w = \frac{x}{y} \Leftrightarrow T^{-1}: x = \frac{uw}{w+1}$ και

$$y = \frac{u}{w+1}$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του T^{-1} είναι $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{w}{w+1} & \frac{u}{(w+1)^2} \\ \frac{1}{w+1} & \frac{-u}{(w+1)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{(w+1)^2}$

Άρα η σ.π.π. του ζεύγους (U, W) είναι

$$f_{uw}(u, w) = f_{xy}\left(x = \frac{uw}{w+1}, y = \frac{u}{w+1}\right) \left| -\frac{u}{(w+1)^2} \right| \quad \text{για } u, w > 0$$

$$\text{άρα } f_{uw}(u, w) = a^2 e^{-a\left(\frac{uw}{w+1} + \frac{u}{w+1}\right)} \frac{u}{(w+1)^2} = a^2 e^{-au} \frac{u}{(w+1)^2} \quad \text{για } u, w > 0$$

Συνεπώς η περιθώρια κατανομή της τ.μ. είναι:

$$\begin{aligned} f_w(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{uw}(u, w) du = \int_0^{\infty} a^2 e^{-au} \frac{u}{(w+1)^2} du = \\ &= \frac{a^2}{(w+1)^2} \int_0^{\infty} u e^{-au} du = \frac{a^2}{(w+1)^2} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{(w+1)^2} \end{aligned}$$

Τελικά για $w > 0$, $f_w(w) = \frac{1}{(w+1)^2}$.

Άσκηση 6.16 σελ.194

$$R_1 \sim N(\mu_1 = 600, 40^2)$$

$$R_2 \sim N(\mu_2 = 700, 50^2) \quad \text{και } R_1, R_2, R_3 \text{ ανεξάρτητες}$$

$$R_3 \sim N(\mu_3 = 800, 60^2)$$

$$\text{άρα } R = R_1 + R_2 + R_3 \sim N(600 + 700 + 800, 40^2 + 50^2 + 60^2)$$

$$\text{δηλαδή, } R \sim N(2100, 77 \cdot 10^2) \Rightarrow Z = \frac{R - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Άρα

$$P(1950 < R < 2200) =$$

$$P\left(\frac{1950-2100}{10\sqrt{77}} < Z < \frac{2200-2100}{10\sqrt{77}}\right) = P(-1.7 < Z < 1.1) = \Phi(1.1) - \Phi(-1.7) = \Phi(1.1) - [1 - \Phi(1.7)] = \\ = \Phi(1.1) + \Phi(1.7) - 1 = 0.86433 + 0.95543 - 1 \approx 0.82$$

Άσκηση 6.17 σελ.194

Είναι γνωστό ότι : Αν $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ και X, Y ανεξάρτητες

τότε $aX + bY \sim N(\mu = a\mu_1 + b\mu_2, \sigma^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ συνεπώς στην παρούσα

περίπτωση

$R = Y - X = (-1)X + Y$ ακολουθεί κατανομή $N(\mu = 5.01 - 5, \sigma^2 = 4 * 10^{-6})$ δηλαδή

$R \sim N(0.01, 4 * 10^{-6})$ Συνεπώς

$$P(0.5 * 10^{-2} < Y - X < 2 * 10^{-2}) = P(0.5 * 10^{-2} < R < 2 * 10^{-2}) =$$

$$= P\left(\frac{0.5 * 10^{-2} - 0.01}{2 * 10^{-3}} < \frac{R - \mu}{\sigma} < \frac{2 * 10^{-2} - 0.01}{2 * 10^{-3}}\right) = P\left(\frac{0.5 * 10^{-2} - 0.01}{2 * 10^{-3}} < Z < \frac{2 * 10^{-2} - 0.01}{2 * 10^{-3}}\right) =$$

$$= P(-2.5 < Z < 5) = \Phi(5) - \Phi(-2.5) = \Phi(5) + \Phi(2.5) - 1 \approx 1 + 0.99379 - 1 = 0.99379$$

Παρατήρηση: $\Phi(5) \approx 1$

Άσκηση 7.9 σελ.218

$$\text{Κάθε μια από τις τ.μ. } X_n \text{ έχει σ.π.π. } f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$\text{και α.σ.κ } F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx \text{ δηλαδή } F(t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ t, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Τώρα η α.σ.κ. της τ.μ. Y_n είναι : $F_n(y) = P(Y_n \leq y) =$

$$= P(n \min\{x_1, \dots, x_n\} \leq y) = P(\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq \frac{y}{n}) = 1 - P(\min\{x_1, \dots, x_n\} > \frac{y}{n}) = \text{(λόγω}$$

ανεξαρτησίας) =

$$= 1 - P(\{X_1 > \frac{y}{n}\} \cap \dots \cap \{X_n > \frac{y}{n}\}) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n P(\{X_i > \frac{y}{n}\}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(\{X_i \leq \frac{y}{n}\})) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F(\frac{y}{n})) =$$

$$= 1 - (1 - F(\frac{y}{n}))^n = \begin{cases} 0, & \frac{y}{n} < 0 \\ 1 - (1 - \frac{y}{n})^n, & 0 \leq \frac{y}{n} < 1 \\ 1, & \frac{y}{n} \geq 1 \end{cases}$$

Για τυχόν $y < 0$ έχω $\frac{y}{n} < 0$ και άρα $F_n(y) = 0$ συνεπώς $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) \rightarrow 0$ για $y < 0$.

Για τυχόν $y > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{y}{n} < 1$ δηλαδή $F_n(y) = 1 - (1 - \frac{y}{n})^n, \forall n > n_0$
και συνεπώς $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = 1 - e^{-y}$. Τελικά

$$F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases} \quad \text{Η α.σ.κ. είναι η εκθετική } \mathcal{E}(1)$$

$$\text{διότι } F'(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

Ομοίως για την ακολουθία τ.μ. $Z_n = n(1 - \max\{X_j\})$.

Άσκηση 7.19 σελ.219

Στη διάρκεια της i -μονάδας του χρόνου η συμπεριφορά του σωματιδίου μπορεί να αποδοθεί από την τ.μ.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } p = 0.45 \\ 0 & \text{με πιθανότητα } q = 0.1 \\ -1 & \text{με πιθανότητα } r = 0.45 \end{cases}$$

Με το τέλος της χρονικής μονάδας η θέση του σωματιδίου είναι: $X_1 + X_2 + \dots + X_n$, όπου οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή:

$$E(X_i) = 1 \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0.45 = 0$$

και διασπορά:

$$V(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = E(X_i^2) = 1^2 \cdot 0.45 + 0^2 \cdot 0.1 + (-1)^2 \cdot 0.45 = 0.90$$

$$\alpha) P(-6 \leq X_1 + \dots + X_{20} \leq 6) = P\left(\frac{-6}{\sqrt{20} \sqrt{0.9}} \leq \frac{X_1 + \dots + X_{20}}{\sqrt{20} \sqrt{0.9}} \leq \frac{6}{\sqrt{20} \sqrt{0.9}}\right)$$

$$\stackrel{\kappa.ο.θ.}{\cong} \Phi(1.42) - \Phi(-1.42) = 2\Phi(1.42) - 1 = 0.84$$

$$\beta) P_n = P(-6 \leq X_1 + \dots + X_n \leq 6) = P\left(\frac{-6}{\sqrt{0.9 \cdot n}} \leq \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{0.9 \cdot n}} \leq \frac{6}{\sqrt{0.9 \cdot n}}\right)$$

$$\stackrel{\kappa.ο.θ.}{\cong} 2\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{0.9 \cdot n}}\right) - 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{0.9 \cdot n}}\right) - 1 = 2\Phi(0) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

Άσκηση 7.20 σελ.220

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_{20}$ οι διάρκειες ζωής των 20 ανταλλακτικών. Τότε οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες ισόνομες με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}(x-50)}$ όταν $x > 50$ και 0 όταν $x < 50$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E(X_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{50}^{\infty} x \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}(x-50)} dx = \int_0^{\infty} (y+50) \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}y} dy = \\ &= \int_0^{\infty} y \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}y} dy + \int_0^{\infty} 50 \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}y} dy = 200 + 50 = 250 \end{aligned}$$

αφού $\frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}y}$, $y > 0$ είναι η σ.π.π. της εκθετικής (βλέπε πίνακες κατανομών σελ. 346).

Επίσης

$$V(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-250)^2 f(x) dx = \int_{50}^{\infty} (x-250)^2 \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}(x-50)} dx = \int_0^{\infty} (y-200)^2 \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}y} dy =$$

= διασπορά της εκθετικής $\frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200}y}$, $y > 0$ (βλέπε πίνακες) και συνεπώς

$$V(X_i) = 200^2$$

Ζητείται η

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i > 4500\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 20 \cdot 250}{\sqrt{20 \cdot 200}} > \frac{4500 - 20 \cdot 250}{\sqrt{20 \cdot 200}}\right) \approx \\ &\approx \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{4500 - 20 \cdot 250}{\sqrt{20 \cdot 200}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-500}{\sqrt{20 \cdot 200}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0.55) = \Phi(0.55) \approx 0.7 \end{aligned}$$

Άσκηση 7.21 σελ.220

Οι τιμές των 25 αντιστάσεων είναι τ.μ. $X_1, \dots, X_{25}$. Η συνολική αντίσταση είναι

$R = X_1 + \dots + X_{25}$ όπου $E(X_i) = 6$ και $V(X_i) = \sigma^2$. Αναζητείται η τιμή του σ έτσι ώστε

$$P(|R - 150| \leq 3) \geq 0.95 \Leftrightarrow P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_{25} - 25 \cdot 6}{\sigma \sqrt{25}}\right| \leq \frac{3}{\sigma \sqrt{25}}\right) \geq 0.95$$

Σύμφωνα με το κ.ο.θ. $\frac{X_1 + \dots + X_{25} - 25 \cdot 6}{\sigma \sqrt{25}} \rightarrow Z \sim N(0,1)$

Συνεπώς προσεγγιστικά $P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_{25} - 25 \cdot 6}{\sigma\sqrt{25}}\right| \leq \frac{3}{\sigma\sqrt{25}}\right) \approx P(|Z| \leq \frac{3}{\sigma\sqrt{25}})$

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq \frac{3}{\sigma \cdot 5}) \geq 0.95 &\Leftrightarrow P(\frac{-3}{5 \cdot \sigma} \leq Z \leq \frac{3}{5 \cdot \sigma}) \geq 0.95 \Leftrightarrow \\ \text{Άρα} \quad &\Leftrightarrow \Phi(\frac{3}{5\sigma}) - \Phi(-\frac{3}{5\sigma}) \geq 0.95 \Leftrightarrow 2\Phi(\frac{3}{5\sigma}) - 1 \geq 0.95 \Leftrightarrow \Phi(\frac{3}{5\sigma}) \geq 0.975 = \Phi(1.96) \end{aligned}$$

Και αφού η Φ είναι γνησίως αύξουσα $\frac{3}{5\sigma} \geq 1.96 \Leftrightarrow \sigma \geq \frac{3}{5} \cdot 1.96$