ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Επιμέλεια: Ι. Σπηλιώτης, Δ. Λεπίπας, Π. Αγγελόπουλος

Άσκηση 1.3 σελ. 4

α) εύκολο

β) Αφού $C_0 \subset F_0$ θα είναι $\sigma(C_0) \subset \sigma(F_0)$ και λόφω του α) θα είναι $\sigma(C_0) \subset F_0$. Για την απόδειξη του αντίθετου εγκλισμού θεωρούμε την κλάση

$$E = \{A \in F : A \bigcap \Omega_0 \in \sigma(C_0)\}$$

Για την κλάση υποσυνόλων E παρατηρούμε ότι $C \subset E$ διότι για τυχόν $A \in C$ ισχύει $A \bigcap \Omega_0 \in C_0 \subset \sigma(C_0)$. Επίσης η κλάση E είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω διότι :

i) $\Omega \bigcap \Omega_0 = \Omega_0 \in \sigma(C_0)$ αφού η $\sigma(C_0)$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω_0.

ii) Αν $A \in E$ τότε κατά τον ορισμό της E είναι $A \bigcap \Omega_0 \in \sigma(C_0)$ και συνεπώς $\Omega_0 \setminus A \bigcap \Omega_0 \in \sigma(C_0)$. Ομως $(\Omega \setminus A) \bigcap \Omega_0 = \Omega_0 \setminus A \bigcap \Omega_0$ και άρα $(\Omega \setminus A) \bigcap \Omega_0 \in \sigma(C_0)$

iii) Αν $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$ τότε $A_n \bigcap \Omega_0 \in \sigma(C_0)$ και άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \bigcap \Omega_0) \in \sigma(C_0)$

Συνεπώς $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \bigcap \Omega_0 \in \sigma(C_0)$, δηλαδή, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in E$. Ωστε η E είναι σ-άλγεβρα και περιέχει την C και συνεπώς περιέχει και $\sigma(C) = F$. Αν τώρα $A \bigcap \Omega_0, A \in F$ είναι τυχόν στοιχείο της F_0 τότε $A \in E$ δηλαδή $A \bigcap \Omega_0 \in \sigma(C_0)$, δηλαδή $F_0 \subset \sigma(C_0)$

γ) εύκολο

Άσκηση 3.2 σελ. 13

Έστω D ένα σύστημα Dynkin. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι (i)-(iv) της άσκησης. Οι (i) και (ii) από τον ορισμό. Για την (iii) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} = \mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} \bigcup \varnothing \bigcup \varnothing \bigcup \ldots$ και αφού δύο οποιαδήποτε σύνολα της ένωσης $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} \bigcup \varnothing \bigcup \varnothing \bigcup \ldots$ έχουν τομή το κενό συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} \in D$. Απομένει η (iv). Πράγματι θέτουμε $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2 = \mathrm{A}_2 \setminus \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_3 = \mathrm{A}_3 \setminus \mathrm{A}_2, \ldots$ Από την (ii) συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{B}_n \in D \ \forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης τα σύνολα B_n είναι ξένα ανά δύο και ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n$ άρα κατά τον ορισμό $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \in D$.

Αντίστροφα έστω ότι η κλάση D ικανοποιεί τις (i)-(iv) της άσκησης. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι (i),(ii),(iii) του ορισμού του συστήματος Dynkin . Αρκεί να γίνει για την (iii). Έστω $\{\mathrm{A}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D$ με $\mathrm{A}_i \bigcap \mathrm{A}_j = \varnothing \ \forall i \neq j$. Θέτουμε $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2 = \mathrm{A}_1 \bigcup \mathrm{A}_2$ και γενικά $\mathrm{B}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k$. Από την (ii) της άσκησης έχουμε(εύκολα με επαγωγή) ότι $\mathrm{B}_n \in D$ και αφού $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{B}_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε από την (iv) ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n \in D$. Όμως $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n$.

Άσκηση 3.4 σελ. 13

α) Αν το μέτρο P΄ έχει την ιδιότητα (3.3) συμπεραίνουμε ότι P΄(E)=P(E) για κάθε $\mathrm{E} \in P^2$. Όμως η κλάση P^2 είναι ημιδακτύλιος και $B^2 = \sigma(P^2)$. Αρκεί να επικαλεστούμε την πρόταση 3.3 σελ. 12.

β) Για τυχόν I=(α,β]$\in P'$ θεωρούμε την κλάση $\phi = \{ \mathrm{A} \in B^1 : \mathrm{P}(\mathrm{A}\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}_2(\mathrm{B})\}$

Θα δείξουμε ότι η κλάση ϕ είναι ένα σύστημα Dynkin υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Πράγματι $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1]$ κα άρα

$$\mathrm{P}(\mathbb{R}\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}((\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1])\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1]\times\mathrm{I}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{P}(\bigcup(n,n+1])\times\mathrm{I}) \overset{(3.3)}{=}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{P}_1((n,n+1])\cdot\mathrm{P}_2(\mathrm{I}) = \mathrm{P}_2(\mathrm{I})\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{P}_1((n,n+1]) = \mathrm{P}_2(\mathrm{I})\cdot\mathrm{P}_1(\mathbb{R}) \text{ άρα } \mathbb{R}\in\phi.$$

Αν τώρα A, B $\in\phi$ με $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ τότε βέβαια

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{A})\mathrm{P}_2(\mathrm{I})$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{B}\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{B})\mathrm{P}_2(\mathrm{I})$$

άρα $\mathrm{P}(\mathrm{B}\times\mathrm{I}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{B})\mathrm{P}_2(\mathrm{I}) - \mathrm{P}_1(\mathrm{A})\mathrm{P}_2(\mathrm{I})$ και συνεπώς

$\mathrm{P}(\mathrm{B}\times\mathrm{I}\setminus\mathrm{A}\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{B}\setminus\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}_2(\mathrm{I})$. Όμως $\mathrm{B}\times\mathrm{I}\setminus\mathrm{A}\times\mathrm{I} = (\mathrm{B}\setminus\mathrm{A})\times\mathrm{I}$ (εύκολο)

Τελικά $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}\in\phi$.

Έστω τώρα $\{\mathrm{A}_n, n\in\mathbb{N}\}\subset\phi$ με $\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j = \varnothing \quad \forall i\neq j$

Από την $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{A})\mathrm{P}_2(\mathrm{I})$ συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(\mathrm{A}_n\times\mathrm{I}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}_1(\mathrm{A}_n)\mathrm{P}_2(\mathrm{I})$

και αφού τα $\mathrm{A}_n\times\mathrm{I}$ είναι ξένα ανά δύο $\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n\times\mathrm{I})) = \mathrm{P}_2(\mathrm{I})\cdot\mathrm{P}_1(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n)$.

Όμως $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n\times\mathrm{I}) = (\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n)\times\mathrm{I}$ (επαληθεύστε)

Τελικά $\mathrm{P}((\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n)\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}_1(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n)\mathrm{P}_2(\mathrm{I})$ άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n\in\phi$.

Ώστε ϕ είναι σύστημα Dynkin και προφανώς λόγω της (3.3) περιέχει τα σύνολα της P^1 άρα $\phi\supset \mathrm{d}(P^1) = \sigma(P^1) = B^1$. Αφού η κλάση ϕ περιέχει την B^1 έχουμε αποδείξει ότι $\mathrm{P}(\mathrm{A}\times\mathrm{I}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{A})\mathrm{P}_2(\mathrm{I}) \quad \forall\mathrm{A}\in B^1$. (1)

Για τυχόν A $\in B^1$ θεωρούμε την κλάση $\varepsilon = \{\mathrm{B}\in B^1 : \mathrm{P}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{A})\mathrm{P}_2(\mathrm{B})\}$

Όπως προηγουμένως αποδεικνύεται ότι η ε είναι σύστημα Dynkin υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που λόγω της (1) περιέχει P^1 και άρα $\varepsilon\supset\mathrm{d}(P^1) = B^1$ δηλαδή $\varepsilon\supset B^1$ (μάλιστα =)

Και άρα έχουμε αποδείξει ότι: $\mathrm{P}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{A})\mathrm{P}_2(\mathrm{B}) \quad \forall\,\mathrm{B}\in B^1$.

Άσκηση 4.1 σελ. 14

Επαγωγικά στο $\kappa\in\mathbb{N}$

Για $\kappa = 1$ είναι προφανές από τον ορισμό του ημιδακτυλίου .

Έστω τώρα ότι ισχύει για $\kappa = \lambda$ δηλ. $\mathrm{A}\setminus\bigcup_{i=1}^{\lambda}\mathrm{A}_i = \bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{B}_i$ (*)

Τότε

$$A\setminus\bigcup_{i=1}^{\lambda+1}A_i = A\cap(\bigcup_{i=1}^{\lambda+1}A_i)^c = A\cap\bigcap_{i=1}^{\lambda}A_i^c\cap A_{\lambda+1}^c = A\cap(\bigcup_{i=1}^{\lambda}A_i)^c\cap A_{\lambda+1}^c = (A\setminus\bigcup_{i=1}^{\lambda}A_i)\cap A_{\lambda+1}^c =$$

$$\stackrel{(*)}{=}(\bigcup_{i=1}^{m}B_i)\cap A_{\lambda+1}^c = \bigcup_{i=1}^{m}(B_i\cap A_{\lambda+1}^c) = \bigcup_{i=1}^{m}(B_i\setminus A_{\lambda+1}).$$ Από τον ορισμό του ημιδακτυλίου κάθε ένα από τα $B_i\setminus A_{\lambda+1}$ (i=1,2,..,m) γράφεται ως ένωση ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων από τον ημιδακτύλιο και άρα $\bigcup_{i=1}^{m}(B_i\setminus A_{\lambda+1}) = \bigcup_{j=1}^{\nu}\Gamma_j$ όπου Γ_j, j=1,…,ν ξένα μεταξύ τους αφού $B_i\setminus A_{\lambda+1}$, i=1,…,m είναι ξένα.

Άσκηση 4.3 σελ. 15

Θέτουμε $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Από υπόθεση $A\in \mathcal{F}_0$. Σύμφωνα με την άσκηση 4.1

$A\setminus\bigcup_{n=1}^{k}A_n = \bigcup_{i=1}^{m}B_i\,(*)$ όπου $B_i, i=1,...,m$ ξένα μεταξύ τους και συνεπώς

$A=\bigcup_{n=1}^{k}A_n\cup(\bigcup_{i=1}^{m}B_i)$. Από υπόθεση επίσης τα σύνολα $A_1,A_2,...,A_k$ είναι ξένα μεταξύ τους και από την (*) προκύπτει ότι $(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)\cap(\bigcup_{i=1}^{m}B_i)=\varnothing$ και συνεπώς τα σύνολα $A_1,...,A_k$, $B_1,...,B_m$ είναι ξένα μεταξύ τους άρα $P_0(A)=\sum_{n=1}^{k}P_0(A_n)+\sum_{i=1}^{m}P_0(B_i)$ αφού η P_0 είναι απλώς προσθετική από υπόθεση. Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{k}P_0(A_n)\le P_0(A)$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και άρα $\sum_{n=1}^{\infty}P_0(A_n)\le P_0(A)$.

Από την εκφώνηση έχουμε ήδη την αντίθετη ανισότητα και τελικά τη ζητούμενη ισότητα.

Άσκηση 4.5 σελ. 16

Θέτουμε $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$

Τότε $A=(A\setminus\bigcup_{n=1}^{k}A_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)$ και συνεπώς

$$P(A)=P(A\setminus\bigcup_{n=1}^{k}A_n)+P(\bigcup_{n=1}^{k}A_n) \qquad (*)$$

Όμως $\bigcap_{k=1}^{\infty}(A\setminus\bigcup_{n=1}^{k}A_n)=\varnothing$ (επαληθεύστε) και η ακολουθία $B_k=A\setminus\bigcup_{n=1}^{k}A_n$ είναι

φθίνουσα και συνεπώς κατά την εκφώνηση $\lim_k P(A\setminus\bigcup_{n=1}^{k}A_n)=0$

Επίσης $\lim_k\sum_{n=1}^{k}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ και συνεπώς από την (*) παίρνουμε ότι

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

<u>Άσκηση 4.8 σελ. 19</u>

Θέτουμε $\phi=\sigma(F\bigcup N)$. Θα δείξουμε ότι $\overline{F}=\phi$. Έστω τυχόν $E\in\overline{F}$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό της $\overline{F}$ το $E=A\bigcup N$ με $A\in F$ και $N\in N$ και άρα $A,N\in F\bigcup N$. Συνεπώς $A\bigcup N\in\sigma(F\bigcup N)=\phi$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\overline{F}\subset\phi$. Επειδή από τον ορισμό της $\overline{F}$ βλέπουμε άμεσα ότι $F,N\subset\overline{F}$ συμπεραίνουμε ότι $F\bigcup N\subset\overline{F}$ και άρα $\sigma(F\bigcup N)\subset\overline{F}$.

<u>Άσκηση 5.2 σελ. 19</u>

Εύκολα διαπιστώνεται ότι

$\{c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(c-\frac{1}{n},c)$ και επειδή η ακολουθία $(c-\frac{1}{n},c]$ είναι φθίνουσα έχουμε

$$P(\{c\})=\lim_n P(c-\frac{1}{n},c]=\lim_n P(F(c)-F(c-\frac{1}{n}))=F(c)-\lim_n F(c-\frac{1}{n})=F(c)-F(c-)$$

<u>Άσκηση 6.1 σελ. 26</u>

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι κλάσεις $C_1\bigcup\{\Omega\},...,C_m\bigcup\{\Omega\}$ είναι ανεξάρτητες.
Θεωρούμε τις παρακάτω κλάσεις υποσυνόλων

$$\varepsilon_1=\{\bigcap_{i=1}^{k}A_i:A_i\in C_i\bigcup\{\Omega\}\text{ για i=1,2,…,k}\}$$

$$\varepsilon_2=\{\bigcap_{j=k+1}^{m}B_j:B_j\in C_j\bigcup\{\Omega\}\text{ για j=k+1,2,…,m}\}$$

Τότε οι κλάσεις ε_1, ε_2 είναι κλειστές ως προς την πεπερασμένη τομή δηλ. αν A,B $\in\varepsilon_i$ τότε $A\bigcap B\in\varepsilon_i$ *(ι=1,2)*. Επίσης είναι ανεξάρτητες όπως διαπιστώνεται αμέσως και άρα $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)$ είναι ανεξάρτητες κατά την πρόταση 6.1. Όμως $\varepsilon_1\supset C_1\bigcup...\bigcup C_k$, $\varepsilon_2\supset C_{k+1}\bigcup...\bigcup C_m$ και $\varepsilon_1\subset F_1$ και $\varepsilon_2\subset F_2$. Άρα $\sigma(\varepsilon_1)=F_1,\sigma(\varepsilon_2)=F_2$.

<u>Γενίκευση</u>

Έστω C_i, $i\in I$ ανεξάρτητες κλάσεις κλειστές για πεπερασμένες τομές και I σύνολο δεικτών για το οποίο γνωρίζουμε ότι $I=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}J_\lambda$ όπου $J_\lambda,\lambda\in\Lambda$ είναι ξένα μεταξύ τους (Λ άλλο σύνολο δεικτών). Θέτουμε $F_\lambda=\sigma(\bigcup_{i\in J_\lambda}C_i),\lambda\in\Lambda$. Τότε οι σ-άλγεβρες $F_\lambda,\lambda\in\Lambda$ είναι ανεξάρτητες.

(Υπόδειξη : Θέτουμε $\varepsilon_\lambda=\{\bigcap_{j\in K}\Lambda_j:\Lambda_j\in C_j\bigcup\{\Omega\},K\text{ πεπερασμένο υποσύνολο του }J_\lambda\}$

Τότε οι $\varepsilon_\lambda,\lambda\in\Lambda$ είναι ανεξάρτητες και κλειστές για πεπερασμένες τομές.

<u>Άσκηση 6.4 σελ.30</u>

Έχουμε $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=1$ και $P(A_n)<1$ άρα $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c)=0$ και $P(A_n^c)>0$

Συνεπώς $\lim_{k\to\infty} P(\bigcap_{n=1}^{k} A_n^c)=0$ και λόγω ανεξαρτησίας $\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k} P(A_n^c)=0$

Από την τελευταία έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\ln P(A_n^c)=-\infty$ και άρα $\forall m\in\mathbb{N}$

$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=m}^{k}\ln P(A_n^c)=-\infty$ (1)

Εξ άλλου με $A=\limsup A_n=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$

$$1-P(A)=P(A^c)=P(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c)=\lim_m P(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c)=\lim_m\lim_k P(\bigcap_{n=m}^{k} A_n^c)=$$

$$=\lim_m\lim_k\prod_{n=m}^{k} P(A_n^c)=\lim_m\lim_k e^{\ln\prod_{n=m}^{k} P(A_n^c)}=\lim_m\lim_k e^{\sum_{n=m}^{k}\ln P(A_n^c)}$$

Οπότε λαμβάνοντας υπόψιν την σχέση (1) έχουμε $1-P(A)=0$

Άσκηση 6.5 σελ.30

Έχουμε $\lim_n P(A_n)=0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n\setminus A_{n+1})<\infty$ τώρα διαδοχικά

$$P(\limsup A_n)=P(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n)=\lim_m P(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n)=\lim_m\lim_l P(\bigcup_{n=m}^{l} A_n)$$

όμως $\bigcup_{n=m}^{l} A_n=A_m\bigcup(A_{m+1}\setminus A_m)\cup(A_{m+2}\setminus A_{m+1})\cup\ldots\cup(A_l\setminus A_{l-1})$ και συνεπώς

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Boole και την ιδιότητα $P(A\setminus B)=P(A)-P(A\cap B)$

$$P(\limsup A_n)\le\lim_m\lim_l[P(A_m)+P(A_{m+1})-P(A_{m+1}\cap A_m)+P(A_{m+2})-P(A_{m+2}\cap A_{m+1})+\ldots$$

$$\ldots+P(A_l)-P(A_l\cap A_{l-1})]$$

επαληθεύστε ότι το εντός των αγκυλών άθροισμα γράφεται

$P(A_m\setminus A_{m+1})+P(A_{m+1}\setminus A_{m+2})+\ldots+P(A_{l-1}\setminus A_l)+P(A_l)$ και συνεπώς

$$P(\limsup A_n)\le\lim_m\lim_l(\sum_{i=m}^{l-1} P(A_i\setminus A_{i+1})+P(A_l))=\lim_m(\sum_{i=m}^{\infty} P(A_i\setminus A_{i+1})+\lim_l P(A_l))=$$

$$=\lim_m(\sum_{i=m}^{\infty} P(A_i\setminus A_{i+1}))=0$$

αφού $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i\setminus A_{i+1})<\infty$

Άσκηση 1.4 σελ.34

Θέτουμε $A=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:|x|\le a\}$ τότε $A\in B^n$ και συνεπώς η συνάρτηση

$I_A(x_1,...,x_n)=\begin{cases}1 & (x_1,...,x_n)\in A\\ 0 & (x_1,...,x_n)\notin A\end{cases}$ είναι συνάρτηση Borel.

Με την σειρά της η συνάρτηση $I_A(X)$ είναι τυχαία μεταβλητή ως σύνθεση της τ.μ. $X=(x_1,...,x_n)$ και της συνάρτησης Borel I_A (βλέπε πρόταση 1.4)

Επειδή $Y=X*I_A(X)$ (επαληθεύστε το) συμπεραίνουμε ότι η Y είναι τ.μ.

<u>Άσκηση 1.5 σελ.34</u>

Θέτουμε $C=\{A\times B: A\in B^m, B\in B^n\}$

Το τυχόν στοιχείο $E\in P^{m+n}$ είναι της μορφής

$E=(a_1,b_1]\times...\times(a_m,b_m]\times(a_{m+1},b_{m+1}]\times...\times(a_{m+n},b_{m+n}]=A\times B$ όπου

$A=(a_1,b_1]\times...\times(a_m,b_m]$ και $B=(a_{m+1},b_{m+1}]\times...\times(a_{m+n},b_{m+n}]$ άρα $E\in C$

δηλαδή $P^{m+n}\subseteq C\Rightarrow\sigma(P^{m+n})\subseteq\sigma(C)\Rightarrow B^{m+n}\subseteq B^m\otimes B^n$

εξ άλλου το τυχόν στοιχείο $A\times B\in C$ γράφεται $A\times B=(A\times\mathbb{R}^n)\cap(\mathbb{R}^m\times B)$

θεωρούμε τώρα την $g:\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^m$ με τύπο $g(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_{m+n})=(x_1,...,x_m)$ και την $h:\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^n$ με τύπο $h(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_{m+n})=(x_{m+1},...,x_{m+n})$ δηλαδή τις προβολές του $\mathbb{R}^{m+n}$ στον $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα. Τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι $A\times\mathbb{R}^n=g^{-1}(A)$ και $\mathbb{R}^m\times B=h^{-1}(B)$ και επειδή οι συναρτήσεις g,h είναι συνεχείς θα είναι και Borel δηλαδή $g^{-1}(A),h^{-1}(B)\in B^{m+n}$ και συνεπώς

$A\times B=g^{-1}(A)\cap h^{-1}(B)\in B^{m+n}\Rightarrow C\subseteq B^{m+n}$ και άρα $B^m\otimes B^n=\sigma(C)\subseteq B^{m+n}$

<u>Άσκηση 2.5 σελ.39</u>

$X_n\le Y$ P-σ.β. σημαίνει ότι υπάρχει $N_n\in F$ με $P(N_n)=0$

και $X_n(\omega)\le \mathrm{Y}(\omega),\forall\omega\in\Omega\setminus N_n$

αν τώρα τεθεί $N=\bigcup_{n=1}^{\infty}N_n$ τότε $N\in F$ και $P(N)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(N_n)=0$ δηλαδή $P(N)=0$

και βέβαια ισχύει $X_n(\omega)\le Y(\omega),\forall\omega\in\Omega\setminus N$ άρα $\sup_n X_n(\omega)\le Y(\omega),\forall\omega\in\Omega\setminus N$

Άσκηση :

Έστω $\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$ ακολουθία ενδεχομένων με $\lim_{n\to\infty}P(A_n)\to 0$. Αν X τυχαία μεταβλητή με $E[|X|]<\infty$ δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}XdP=0$.

Απόδειξη : (*εις άτοπον απαγωγή*)

Αρκεί να δείξουμε ότι $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0):\int_A|X|<\varepsilon$, όταν $P(A)<\delta(\varepsilon)$

Έστω ότι δεν ισχύει τότε

$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta=\frac{1}{2^n}>0):\exists A_n$ με $P(A_n)<\frac{1}{2^n}$ και $\int_{A_n}|X|<\varepsilon$

θέτουμε $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\subset\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m,\forall n\in\mathbb{N}$ και άρα $P(A)=0$

Τώρα θέτουμε $B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ τότε $I_{B_n} \searrow I_A$ και άρα $I_{B_n}|X| \searrow I_A|X|$ στο Ω και με βάση το παρακάτω θεώρημα έπεται ότι $\int_\Omega I_{B_n}|X| \searrow \int_\Omega I_A|X|$

Συνεπώς

$$\int_\Omega I_A|X|\,dP = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega I_{B_n}|X|dP = \lim_{n\to\infty}\int_{B_n}|X|dP = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{A_n}|X|\,dP + \int_{\bigcup_{m=n+1}^{\infty} A_m}|X|dP\right) \geq$$

$$\geq \liminf_{n\to\infty}\int_{A_n}|X|dP$$

Από την μία $\int_\Omega I_A|X|dP > \varepsilon$ και από την άλλη επειδή P(A) > 0

$\int_\Omega I_A|X|\,dP = \int_A|X|\,dP = 0$.

- άτοπο.

Θεώρημα : Έστω $X_n, n \in \mathbb{N}$ ακολουθία τ.μ. τέτοια ώστε

1) $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ P-σχεδόν παντού

2) Υπάρχει τ.μ. Υολοκληρώσιμη ως προς P τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|X_n| \leq Y$ P-σχεδόν παντού.

Τότε η τ.μ. X είναι ολοκληρώσιμη ως προς P και μάλιστα

$\lim_{n\to\infty}\int X_n dP = \int XdP$.

Άσκηση : Έστω $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία τ.μ. Δείξτε ότι

$$X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X \Leftrightarrow P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0, \forall \varepsilon > 0 \ (1).$$

Απόδειξη :

Από Αρχιμήδειο ιδιότητα $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \frac{1}{\nu} < \varepsilon$ τότε

$$\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{1}{\nu}\} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset \limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \frac{1}{\nu}\}$$

Και άρα αν η (1) ισχύει για κάθε ε της μορφής $\frac{1}{\nu}$ θα ισχύει και για κάθε ε γενικά. Το αντίστροφο είναι προφανές ώστε

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0, \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \frac{1}{\nu}\}) = 0, \forall \nu \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \frac{1}{\nu}\}) = 0, \forall \nu \in \mathbb{N} \Leftrightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{|X_n - X| > \frac{1}{\nu}\}) = 0, \forall \nu \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{|X_n - X| \leq \frac{1}{\nu}\}) = 1, \forall \nu \in \mathbb{N} \ (2)$$

επειδή η ακολουθία $A_\nu = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{|X_n - X| \leq \frac{1}{\nu}\}$ είναι φθίνουσα

συμπεραίνουμε ότι $P(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} P(A_\nu) = 1$ αλλά και αντίστροφα αν

$P(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu)=1$ τότε $P(A_\nu)=1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ αφού $A_\nu \supset \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$.Ώστε τελικά η (2) ισοδυναμεί με $P(\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}\{|X_n - X| \le \frac{1}{\nu}\})=1 \Leftrightarrow P(\lim_{n\to\infty} X_n = X)=1$.

Άσκηση : Έστω $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με $P(X_n=0)=1-\frac{1}{n}$ και $P(X_n=1)=\frac{1}{n}$. Δείξτε ότι $X_n \xrightarrow{P} 0$ αλλά δεν ισχύει $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} 0$.

Απόδειξη :

$P(|X_n - 0|>\varepsilon)=P(|X_n|>\varepsilon)=P(X_n=1)=\frac{1}{n}\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n-0|>\varepsilon)=0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$

ότι $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\not\to} 0$ θα δειχθεί με εις άτοπον απαγωγή.

Έστω ότι ισχύει τότε σύμφωνα με προηγούμενη άσκηση θα πρέπει $P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n|>\varepsilon\})=0$. Από την άλλη επειδή τα ενδεχόμενα $\{|X_n|>\varepsilon\}$, $n=1,2,...$ είναι ανεξάρτητα έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n|>\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n=1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ οπότε από το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli θα έχω $P(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n|>\varepsilon\})=1$ -άτοπο

Άσκηση : Αν οι τ.μ. $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ισόνομες και ανεξάρτητες με $E[X_n]=\mu$, $Var[X_n]=\sigma^2$ τότε $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{L^2}\mu$.

Απόδειξη :

$$\mathrm{E}[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|^2]=\mathrm{E}[\left|\frac{S_n-n\mu}{n}\right|^2]=\frac{1}{n^2}\mathrm{E}[|S_n-n\mu|^2]=\frac{1}{n^2}\{Var[S_n-n\mu]+(E[S_n-n\mu])^2\}$$

Όμως $E[S_n-n\mu]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]-n\mu=n\mu-n\mu=0$ και

$Var[S_n-n\mu]=Var[X_1-\mu+...+X_n-\mu]=Var[X_1-\mu]+...+Var[X_n-\mu]=n\sigma^2$

λόγω ανεξαρτησίας

Τελικά $\mathrm{E}[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|^2]=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|^2]=0\Rightarrow\frac{S_n}{n}\xrightarrow{L^2}0$

Άσκηση : Έστω ακολουθία τ.μ. $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ και $S_n=X_1+...+X_n$ δείξτε ότι αν $X_n\xrightarrow{L^2}0$ τότε $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{L^2}0$

Λύση :

$X_n \xrightarrow{L^2} 0 \Rightarrow E[X_n^2]=0$ έχουμε διαδοχικά

$$E[(\frac{S_n}{n})^2]=\frac{1}{n^2}E\left|X_1+...+X_n\right|^2=\frac{1}{n^2}E(\sum_{i,j}X_iX_j)\le$$
$$\le\frac{1}{n^2}E\frac{1}{2}\sum_{i,j}(X_i^2+X_j^2)=\frac{1}{2n^2}\sum_{i,j}(E(X_i^2)+E(X_j^2))=$$
$$=\frac{1}{n^2}(n\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+n\sum_{j=1}^{n}E(X_j^2))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)$$

Συνεπώς $0\le E(\frac{S_n}{n})^2\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)$

Όμως $\lim_{n\to\infty}E(X_n^2)=0$ και από γνωστό λήμμα της ανάλυσης

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=0$

Άσκηση : Έστω $\{X_n : n\in\mathbb{N}\}$ ανεξάρτητες , ισόνομες με κατανομή ομοιόμορφη στο (0,1).

Θέτουμε $Y_n = n\min\{X_1,...,X_n\}, Z_n = n(1-\max\{X_1,...,X_n\})$. Δείξτε ότι

$Y_n \xrightarrow{D} Y, Z_n \xrightarrow{D} Z$ όπου Y,Z τ.μ. με εκθετική κατανομή.

Λύση :

$Z_n = n(1-\max\{X_1,...,X_n\})$, n=1,2,…

Οι τ.μ. $X_1,...,X_n$ έχουν την ίδια κατανομή , ομοιόμορφη στο (0,1) , και συνεπώς έχουν α.σ.κ.

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ x & , \quad 0\le x<1\\ 1 & , \quad x\ge 1\end{cases}$$

Η κατανομή της τ.μ. $T_n=\max\{X_1,...,X_n\}$ είναι

$P(T_n\le x)=P(\max\{X_1,...,X_n\}\le x)=P(X_i\le x,\forall i=1,...,n)=$

$=P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\le x\})$ και λόγω ανεξαρτησίας έπεται ότι $P(T_n\le x)=\prod_{i=1}^{n}P(\{X_i\le x\})=$

$=\prod_{i=1}^{n}F(x)=[F(x)]^n$

Όσον αφορά την κατανομή της τ.μ. Z_n έχουμε

$$F_n(x)=P(Z_n\le x)=P(n(1-T_n)\le x)=P(1-T_n\le\frac{x}{n})=$$
$$=P(T_n\ge 1-\frac{x}{n})=1-P(T_n<1-\frac{x}{n})$$

και συνεπώς $F_n(x) = 1 - [F(1-\frac{x}{n})]^n$

ή ισοδύναμα $F_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ 1-(1-\frac{x}{n})^n & , \quad 0 < x \le n \\ 1 & , \quad x \ge n \end{cases}$

Για τυχόν $x > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $0 < x \le n, \forall n \ge n_0$ οπότε

$F_n(x) = 1-(1-\frac{x}{n})^n, \forall n \ge n_0$ και βέβαια $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1 - e^{-x}$.

Για τυχόν $x \le 0$ $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$. Ώστε $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1-e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή $Z_n \to Z \sim \varepsilon(1)$

Άσκηση : Έστω ακολουθία τ.μ. $\{ X_n : n \in \mathbb{N} \}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $A_n > 0 : \frac{X_n}{A_n} \to 0$

Λύση :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M(\varepsilon) > 0) : P(|X_n| > M) < \varepsilon$ άρα για $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ υπάρχει

$B_n = M\frac{1}{2^n} : P(|X_n| > B_n) < \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$

άρα $P(\frac{|X_n|}{B_n} > 1) < \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(\frac{|X_n|}{B_n} > 1) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$

εφαρμόζω το λήμμα Borel-Canelli για τα σύνολα $\{ \frac{|X_n|}{B_n} > 1 \}$ κι έχω

$P(\limsup_{n\to\infty}\{\frac{|X_n|}{B_n} > 1\}) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\frac{|X_n|}{B_n} > 1\}) = 1$

Θέτω $\Omega_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{\frac{|X_n|}{B_n} \le 1\}$. Τότε $P(\Omega_0) = 1$ και για τυχόν $\omega \in \Omega_0$

υπάρχει $m_0 = m_0(\omega)$ τέτοιο ώστε $\omega \in \{\frac{|X_n|}{B_n} \le 1\}, \forall n \ge m_0$ δηλαδή

$\omega \in \{\frac{|X_n|}{nB_n} \le \frac{1}{n}\}, \forall n \ge m_0$. Ώστε για τυχόν $\omega \in \Omega_0$ $\frac{X_n(\omega)}{A_n} \to 0$ αν θέτω

$A_n = nB_n$ αφού $P(\Omega_0) = 1$

<u>Άσκηση</u>

Έστω πείραμα τύχης με δύο ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα ‘επιτυχία – αποτυχία’. Το πείραμα επαναλαμβάνεται επ’άπειρον. Ποια η πιθανότητα να συναντώνται επ’ άπειρον διαδοχές επιτυχιών τουλάχιστον διπλάσιες σε πλήθος από το πλήθος των δοκιμών που προηγούνται;

Λύση

Θεωρείστε τον δ.χ. $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}$ όπως στο παράδειγμα 6.3 σελ. 28 εφοδιασμένο με το μέτρο πιθανότητας P για το οποίο ισχύει

$$P(A_1 x ... A_m x \prod_{i=m+1}^{\infty}\{0,1\}) = Q(A_1)...Q(A_m), A_i \subset \{0,1\}$$

όπου Q το μέτρο πιθανότητας στον $\{0,1\}$ το οριζόμενο από τις σχέσεις

$$Q(\{0\})=Q(\{1\})=\frac{1}{2}.$$

Το ενδεχόμενο της εκφώνησης είναι $A=\limsup A_n$ όπου

$A_n = \{\omega=(\omega_1,\omega_2,...): \omega_n = 1, \omega_{n+1} = 1,...,\omega_{3(n-1)} = 1\}, n \geq 2$

Τότε $A_n = \prod_{\kappa=1}^{n-1}\{0,1\} x \underbrace{\{1\}x...x\{1\}}_{2n-2} x \prod_{3n-2}\{0,1\}$ και συνεπώς

$P(A_n) = (\frac{1}{2})^{2(n-1)}$

Από την τελευταία συνάγουμε ότι $\sum_{n=2}^{\infty} P(A_n) < \infty$ και άρα $P(A) = 0$

Άσκηση

Έστω p η πιθανότητα επιτυχούς έκβασης της προσπάθειας να τεθεί σε λειτουργία ένα σύστημα κατά την n-οστή απόπειρα και X ο αριθμός αποπειρών μέχρι την πρώτη επιτυχή απόπειρα. Υποθέτοντας ότι $0 \leq p_n < 1$

α) Να δοθεί ο κατάλληλος δ.χ. και να ορισθεί η τ.μ. X

β) Υπολογίστε την $P(X<\infty)$ και την κατανομή της τ.μ. X

γ) Δώστε μια απλή ικανή συνθήκη ώστε $P(X < \infty) = 1$

δ) Υπολογίστε επακριβώς την $P(X < \infty)$ όταν :

i) $p_n = p, 0 < p < 1$

ii) $p_n = 1/n, n \geq 2$ και $p_1 = 0$

iii) $p_n = 1/n^2, n \geq 2$ και $p_1 = 0$

Λύση

α) $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}$ και P οριζόμενο από την

$P(P(A_1 x A_2 x ... x A_m x \prod_{i=m+1}^{\infty}\{0,1\}) = P_1(A_1)...P_m(A_m)$ για $A_i \subset \{0,1\}$ και P_n οριζόμενο στον $\{0,1\}$ από την $P_n(\{1\}) = P_n, P_n(\{0\}) = 1 - P_n$

Για τυχόν ω=($\omega_1,\omega_2,...$) ορίζουμε:

$$X(\omega)=\begin{cases}\inf\{n\in\mathbb{N}:\omega_n=1\} \text{ αν } \{n\in\mathbb{N}:\omega_n=1\}\neq\varnothing \\ \infty \quad \text{αν} \qquad \omega=(0,0,...)\end{cases}$$

β) $P(X<\infty)=1-P(X=\infty)=1-P(0,0,...)$. Ομως $\{(00,...)\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ με

$$A_n=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,...):\omega_1,...,\omega_n=0\}=\{0\}x\{0\}x...x\{0\}x\prod_{k=n+1}^{\infty}\{0,1\}$$

Συνεπώς $P(X<\infty)=1-P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=1-\lim_{n\to\infty}P(A_n)=1-\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1-P_k)=1-\prod_{n=1}^{\infty}(1-P_n)$

Η κατανομή της τ.μ. X είναι :

$$P(X=\infty)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-P_n)$$

$$P(X=m)=P(\{0\}x...x\{0\}x\{1\}x\prod_{i=m+1}^{\infty}\{0,1\})=\prod_{k=1}^{m-1}(1-P_k)P_m$$

γ) $P(X<\infty)=1$ όταν και μόνο όταν $\prod_{n=1}^{\infty}(1-P_n)=0$

επειδή $1-P_n\leq e^{-P_n}$ συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη $\sum_{n=1}^{\infty}P_n=\infty$ συνεπάγεται ότι

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-P_n)=0$$

δ)

i) $P(X<\infty)=1$ αφού $\sum_{n=1}^{\infty}P=\infty$

ii) $P(X<\infty)=1$ αφού $\sum_{n=1}^{\infty}P_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

iii)
$$P(X<\infty)=1-\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=1-\lim_k\prod_{n=2}^{k}\frac{n^2-1}{n^2}=1-\lim\prod_{n=2}^{k}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=$$
$$=1-\lim_k\frac{1\cdot3}{4}\cdot\frac{2\cdot4}{9}\cdot\frac{3\cdot5}{16}\cdot\frac{4\cdot6}{25}\cdot\frac{5\cdot7}{36}\cdots\frac{(k-1)\cdot(k+1)}{k^2}=\frac{1}{2}$$