Έχουν Φυσικό Νόημα οι Μαθηματικές Έννοιες;

Ιωάννης Β. Κιουστελίδης

jqstel@math.ntua.gr[1]

Περίληψη

Παρά την διαδεδομένη έποψη ότι τα βασικά μαθηματικά μεγέθη κατά κάποιον τρόπο ενυπάρχουν στον φυσικό κόσμο, αυτά τα μεγέθη *δεν* αντιστοιχούν άμεσα σε κανένα φυσικό φαινόμενο. Τόσο οι πραγματικοί αριθμοί όσο και οι τριγωνομετρικές και άλλες θεμελιώδεις συναρτήσεις δεν υπάρχουν στην Φύση. Είναι εφευρήματα του ανθρώπινου νου, που επιτρέπουν μία συνοπτική και απλουστευτική περιγραφή της πραγματικότητας. Ακόμα και οι φυσικοί αριθμοί, αν θεωρηθούν ως σύνολο, αποτελούν νοερό κατασκεύασμα.

Εισαγωγή

Μία ευρέως διαδεδομένη άποψη είναι ότι οι μαθηματικές έννοιες είναι, κατά κάποιον τρόπο, εγγενείς στον φυσικό κόσμο. Η μαθηματική περιγραφή διαφόρων φαινομένων μας είναι σήμερα τόσο οικεία ώστε τείνουμε να θεωρούμε και τα μαθηματικά μεγέθη, που χρησιμοποιούνται γι' αυτόν τον σκοπό ως κατά κάποιον τρόπο ενυπάρχοντα στην Φύση. Συχνά ταυτίζουμε ένα φαινόμενο με την μαθηματική περιγραφή του και έτσι θεωρούμε ότι τα μαθηματικά μεγέθη, που χρησιμοποιούνται, αντιστοιχούν σε κάποια υπαρκτά φυσικά μεγέθη. Ισχύει, όμως, αυτό;

Υπάρχουν στην φύση όλα τα νοητά τα σημεία μίας ευθείας;

Υπάρχουν, ειδικότερα, φυσικά μεγέθη αντίστοιχα προς άρρητους αριθμούς όπως είναι ο $\sqrt{2}$;[2]

Υπάρχουν φυσικά φαινόμενα, που να περιγράφονται ακριβώς από τις βασικές στοιχειώδεις συναρτήσεις, όπως είναι το ημίτονο και το συνημίτονο;

Όπως θα ιδούμε παρακάτω, στον υλικό κόσμο δεν υπάρχουν ούτε ο $\sqrt{2}$, ούτε τα σημεία μίας ευθείας, ούτε φαινόμενα, που να περιγράφονται ακριβώς από κάποιες κλασσικές συναρτήσεις, δηλαδή να αντιστοιχούν πλήρως σε αυτές. Όλες αυτές οι έννοιες είναι μόνο εξιδανικεύσεις της πραγματικότητας, που ποτέ δεν ανταποκρίνονται πλήρως σε αυτήν.

Γιατί, όμως, δεν επιδιώκουμε να έχουμε πιο ρεαλιστικά μαθηματικά μεγέθη, δηλαδή μεγέθη που να περιγράφουν επακριβώς τα φυσικά φαινόμενα;

Όπως θα ιδούμε, ο βασικός λόγος φαίνεται να είναι ότι αυτό θα περιέπλεκε ασύλληπτα την μαθηματική περιγραφή. Έτσι, προτιμούμε να εξιδανικεύουμε τα φαινόμενα και να τα ταυτίζουμε νοερά με κάποια μαθηματικά μεγέθη, που

[1] Άλλα παρεμφερή κείμενα υπάρχουν στην ιστοσελίδα http://www.math.ntua.gr/~jqstel/

[2] Ο $\sqrt{2}$ αντιστοιχεί προς το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς 1. Λέγεται άρρητος, δηλαδή ανείπωτος (αυτός που δεν μπορεί να λεχθεί), γιατί η δεκαδική του παράσταση: $\sqrt{2}$=1,414 21356237310… δεν έχει καμία κανονικότητα. Έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται περιοδικώς, όπως συμβαίνει με την δεκαδική παράσταση κλασμάτων. Για παράδειγμα, 1/7=0,142857142857…, όπου η ακολουθία χαρακτήρων 142857 επαναλαμβάνεται συνεχώς χωρίς τέλος.

έχουν εφευρεθεί για να απλουστεύουν την περιγραφή των φαινομένων. Όποτε χρειάζεται μία ακριβέστερη περιγραφή των φαινομένων, καταφεύγουμε, απλά, σε πιο σύνθετες μαθηματικές περιγραφές, που να αντιστοιχούν στον επιδιωκόμενο βαθμό ακριβείας.

Αυτά τα συμπεράσματα παραξενεύουν, ίσως, όσους έχουν συνηθίσει στην αφελή μαθηματική περιγραφή των φαινομένων, αλλά δεν είναι καινούργια. Έχουν επανειλημμένα τονισθεί από κάποιους μαθηματικούς και φιλοσόφους, αλλά συνήθως παραμένουν στο περιθώριο του ενδιαφέροντος τόσο των μαθηματικών, όσο και των φυσικών. Εντούτοις, είναι σημαντικά, όταν προσπαθούμε να κατανοήσουμε την Φύση και να βελτιώσουμε τα μοντέλα που περιγράφουν φυσικά φαινόμενα. Όταν γράφουμε εξισώσεις π.χ. της Φυσικής σημασία έχει να κατανοούμε τι είναι τα μεγέθη που περιγράφουμε με τις εξισώσεις αυτές (να κατανοούμε την φύση των μεγεθών αυτών).

Ας εξετάσουμε λοιπόν αρχικά τα βασικά μαθηματικά μεγέθη, με τα οποία κατασκευάζουμε, τελικά, όλα μας τα φυσικά μοντέλα. Την αναντιστοιχία τους με τα φυσικά δεδομένα έχουν τονίσει κορυφαίοι μαθηματικοί όπως ο Felix Klein [1] και οι Alexandrov, Kolmogorov, Lavrent'ev [2]. Παρόμοιες ιδέες αναπτύσσει επίσης και ο φιλόσοφος Peter Smith [3] αναφερόμενος ειδικότερα σε χαοτικά φαινόμενα. Θα αναφερθούμε εδώ στις παρατηρήσεις τους σχετικά με τον χαρακτήρα διαφόρων μαθηματικών μεγεθών και θα προσπαθήσουμε στην συνέχεια να κάνουμε εμφανές γιατί μας εξυπηρετεί να χρησιμοποιούμε τέτοια «εξωπραγματικά» μεγέθη.

1. Υπάρχουν στην φύση οι άρρητοι αριθμοί;

Ο Felix Klein [1, σελ. 35-36] σημειώνει ότι η αντίληψή μας για τον χώρο έχει πεπερασμένη ακρίβεια ακόμα και αν χρησιμοποιήσουμε τα πιο ευαίσθητα οπτικά μέσα παρατήρησης. Εντούτοις, «σε αντίθεση με αυτήν την ιδιότητα του χώρου που είναι περιορισμένη σε ακρίβεια, η αφηρημένη ή εξιδανικευμένη αντίληψη του χώρου απαιτεί απεριόριστη ακρίβεια, χάρις στην οποία ... αντιστοιχεί ακριβώς προς τον αριθμητικό ορισμό της έννοιας του [πραγματικού] αριθμού. Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε μαθηματικά προσέγγισης και μαθηματικά ακριβείας».

Η αντιστοιχία μεταξύ της εξιδανικευμένης αντίληψης του χώρου και του συνόλου των πραγματικών αριθμών πηγάζει κατά τον Klein από το λεγόμενο *αξίωμα του Cantor*[3] *(1872),* που ορίζει μια ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ πραγματικών αριθμών και των σημείων πάνω σε μίαν ευθεία. Εντούτοις, αυτή η ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι, μία αφαίρεση και δεν μπορεί να σχεδιαστεί. Δεν αντιστοιχεί σε κανένα υλικό σχήμα. Με όποιον τρόπο και αν σχεδιάσουμε μίαν γραμμή αυτή θα αποτελείται από μίαν αλυσίδα ατόμων και δεν θα είναι γνησίως συνεχής.

Ο Calvin Clawson [6, σελ. 67-71, 109-111] παρατηρεί ότι η αντίληψη ότι μία γραμμή είναι ένα «φυσικό» μέγεθος, που αποτελείται από ένα σύνολο

[3] Ο *Cantor* ορίζει ως ευθεία των πραγματικών αριθμών μία ευθεία, επί της οποίας έχει ορισθεί ένα τμήμα με μοναδιαίο μήκος, και θεωρεί αξιωματικά ότι σε κάθε ρητό ή άρρητο πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα σημείο της αυτής της ευθείας. Αντιστρόφως, κάθε σημείο μίας τέτοιας ευθείας θεωρείται αξιωματικά ότι αντιστοιχεί σε έναν ρητό ή άρρητο πραγματικό αριθμό, που λέγεται η τετμημένη (abscissa) του σημείου αυτού.

σημείων, έχει εσωτερικές αντιφάσεις. «Αν μια γραμμή δεν είναι τίποτα άλλο από άπειρα σημεία, που το καθένα δεν προσθέτει τίποτα στο συνολικό μήκος της γραμμής [γιατί είναι αδιάστατο], τότε ένα άπειρο σύνολο από μηδενικά [μήκη] εξακολουθεί να έχει άθροισμα μηδέν». Στην συνέχεια παρατηρεί ότι η αντίθετη άποψη, πώς τα μεμονωμένα σημεία έχουν πράγματι κάποιο μικροσκοπικό στοιχειώδες μέγεθος, οδηγεί σε άλλες αντιφάσεις. Αν κάθε τμήμα ευθείας αποτελείται από άπειρα σημεία τότε θα έχει άπειρο μήκος. Αν, πάλι, αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος σημείων, τότε το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος θα έπρεπε να εκφράζεται ως ακέραιο πολλαπλάσιο αυτού του στοιχειώδους μήκους. Τότε και το πηλίκο του μήκους οποιωνδήποτε ευθυγράμμων τμημάτων θα έπρεπε μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα, δηλαδή ως το πηλίκο των αριθμών στοιχειωδών μηκών που περιλαμβάνει κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα. Αυτό το συμπέρασμα, όμως, δεν συμβιβάζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Σύμφωνα με αυτό, η διαγώνιος ενός τετραγώνου δεν είναι σύμμετρη με την πλευρά του. Το πηλίκο των μηκών τους είναι $\sqrt{2}$, αριθμός που <u>δεν</u> μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα[4].

Ο Clawson βλέπει τα προβλήματα αυτά να αναιρούνται μόνο μέσα από την αξιωματική θεμελίωση της «ευθείας των αριθμών» μέσω του αξιώματος του Cantor.

Αντίστοιχα, ο A.D.Aleksandrov [2, σελ. 30 και 31] λέει:
«Αλλά ιδανικά ακριβείς γεωμετρικές μορφές και απολύτως ακριβείς τιμές μεγεθών αντιπροσωπεύουν αφαιρέσεις. Κανένα συγκεκριμένο αντικείμενο δεν έχει απολύτως ακριβή μορφή, ούτε μπορεί οποιοδήποτε συγκεκριμένο μέγεθος να μετρηθεί με απόλυτη ακρίβεια, αφού δεν έχει καν μίαν απόλυτα ακριβή τιμή. Το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος, για παράδειγμα, δεν έχει νόημα αν προσπαθεί κανείς να το κάνει ακριβές πέρα από ατομικές διαστάσεις.

Εδώ μπορεί να ανακύψουν επίσης και άλλες ερωτήσεις: Υπάρχουν ενδοατομικά διάκενα ή όχι; Αν υπάρχουν πώς θα περιγραφούν; Υπάρχει χώρος χωρίς καθόλου ύλη; Τι είναι το διαστρικό κενό;

Εξ άλλου, ακόμα και για μεγέθη που θεωρούμε ότι διαιρούνται επ' άπειρον, όπως είναι ο χρόνος, φαίνεται παράλογο να μιλούμε για άρρητα ποσά. Μπορεί κάποιο φαινόμενο να διαρκεί $\sqrt{2}$ δευτερόλεπτα; Ένα τέτοιο χρονικό διάστημα <u>δεν</u> είναι μετρήσιμο!

Σε κάθε περίσταση, όταν περνάει κανείς πέρα από γνωστά όρια ποσοτικής ακρίβειας, εμφανίζεται μία ποιοτική αλλαγή στο μέγεθος και γενικώς χάνει το αρχικό του νόημα. Για παράδειγμα, η πίεση ενός αερίου δεν μπορεί να γίνει ακριβής πέρα από τα όρια σύγκρουσης δύο μορίων, το ηλεκτρικό φορτίο παύει να είναι συνεχές όταν προσπαθεί κανείς να το κάνει ακριβές πέρα από το φορτίο ενός ηλεκτρονίου κ.ο.κ. Μάλιστα, ο νομπελίστας Robert B. Laughlin, πηγαίνει πιο μακριά: Αρνείται την ύπαρξη κάποιων φυσικών μεγεθών και αντικειμένων σε πολύ μικρές διαστάσεις (Βλέπε το Παράρτημα 1).

Εν όψει της απουσίας στην φύση αντικειμένων με ιδανικά ακριβή μορφή (δηλαδή, με μαθηματικά ακριβές σχήμα), ο ισχυρισμός ότι ο λόγος της διαγωνίου ενός τετραγώνου προς την πλευρά του ισούται ακριβώς με $\sqrt{2}$, όχι μόνο δεν μπορεί να συναχθεί από άμεση μέτρηση, αλλά δεν έχει καν

[4] Ο $\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807856 97\ldots$ έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία χωρίς καμία κανονικότητα στην διάταξή τους.

οποιοδήποτε ακριβές νόημα για ένα γνήσιο συγκεκριμένο τετράγωνο» (Βλέπε στο Παράρτημα 1 τις αντίστοιχες απόψεις του φιλοσόφου Peter Smith).

Ο αριθμός √2 είναι, επομένως, ένα εφεύρημα της φαντασίας μας και το ίδιο είναι όλοι οι άλλοι άρρητοι αριθμοί! Μόνο τα κλάσματα μπορούν να αντιστοιχούν σε ευθύγραμμα τμήματα, γιατί, αν θεωρήσουμε μίαν ευθεία ως αλυσίδα αρκετού πλήθους «ατόμων», μπορούμε να αντιστοιχήσουμε το κλάσμα σε ακέραιο αριθμό ατόμων. Αν σε μία τέτοια «ευθεία» θεωρήσουμε ως μοναδιαίο μήκος ένα τμήμα αποτελούμενο από 500 άτομα, τότε το κλάσμα 3/5 αντιστοιχεί στο τριακοσιοστό άτομο από την αρχή του μοναδιαίου ευθυγράμμου τμήματος, ενώ το 7/4 αντιστοιχεί στο άτομο υπ' αριθμόν 875 (500*7/4=875).[5]

Τι χρειαζόμαστε, όμως, τους άρρητους αριθμούς; Γιατί τους εφεύραμε;

2. Τι χρειάζονται οι άρρητοι αριθμοί;

Για παράδειγμα, τι χρειαζόμαστε τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$;

Η μόνη εύλογη απάντηση φαίνεται να είναι: Για να μπορούμε να προσδιορίσουμε το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με εμβαδόν 2 (αν δεχθούμε, βέβαια, ότι ένα τέτοιο τετράγωνο μπορεί να υπάρξει) ή για να μπορούμε να προσδιορίσουμε το μήκος της διαγωνίου ενός «ιδανικού» τετραγώνου με πλευρά 1.

Με βάση την σωματιδιακή αντίληψη για την σύσταση της ύλης ένα τέτοιο υλικό τετράγωνο (από υλικό π.χ. σταθερού πάχους) *δεν* μπορεί να υπάρξει. Δεν μπορούμε να έχουμε μήκη εκτάσεως, π.χ., μισού ατόμου. Το μοναδιαίο μήκος, με το οποίο αντιπαραβάλλουμε όλα τα άλλα μήκη, μπορεί να αντιστοιχεί στον υλικό κόσμο μόνο με μία σειρά πλήρων ατόμων. Τα κλάσματά του θα πρέπει να εκφράζονται επίσης ως ακέραια πλήθη ατόμων.

Αυτά όλα, βέβαια, με βάση μίαν αφελή ατομική θεωρία, που αναφέρεται σε άτομα σταθερού μεγέθους με σταθερή θέση. Στην πραγματικότητα κανένα άτομο δεν είναι εντελώς ακίνητο, έστω και αν είναι δεσμευμένο μέσα σε ένα κρυσταλλικό πλέγμα, ενώ η διάμετρός του μεταβάλλεται, αν όλα τα ηλεκτρόνια της εξωτερικής στοιβάδας μεταπηδήσουν σε γειτονικό άτομο.

Θα μπορούσε κανείς να ρωτήσει, βέβαια: Πώς, όμως θα πάει ένα κινητό κινούμενο ευθύγραμμα από την θέση 1,41 στην θέση 1,42 χωρίς να περάσει από κάποια θέση $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$;

Η απάντηση είναι απλή: Όπως στους ακεραίους πηγαίνουμε από το 1 στο 2 και στο 3 χωρίς να περάσουμε από ενδιάμεσες θέσεις. Ενδιάμεσες θέσεις <u>δεν</u> έχουν πάντοτε νόημα. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να ανέβουμε μισό σκαλί σε μία σκάλα. Ενδιάμεσες τιμές δεν υπάρχουν κατ ανάγκη, αλλά εισάγονται συχνά αξιωματικά στους συλλογισμούς μας. Ακόμα και η μετατόπιση του

[5] Είναι αξιοσημείωτο ότι δεν υπάρχει γενική μέθοδος (αλγόριθμος) που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ρητός ή άρρητος. Για παράδειγμα για τους αριθμούς $2^e, 2^\pi, \pi^e$ όπου e ο αριθμός του Νέπερ (Napier) και για την σταθερά c του Euler δεν γνωρίζουμε καν αν είναι ρητοί ή άρρητοι. Το ίδιο ισχύει κατά τους Sondheimer-Rogerson και για τους e^e, π^π. (Βλέπε E.Sondheimer -A. Rogerson: Numbers and Infinity, Dover, p.68).

ερεθίσματος στο μάτι δεν είναι συνεχής. Ο εγκέφαλος «συνεχοποιεί» απλώς τις διαδοχικές διεγέρσεις των κυττάρων του αμφιβληστροειδούς από τα φωτόνια που αντανακλώνται από το διερχόμενο κινητό. Απλά, είμαστε δέσμιοι του σώματός μας, που μας παρακινεί να βλέπουμε τα πάντα αιτιοκρατικά και συνεκτικά.

Επομένως, «φυσικό» μήκος $\sqrt{2}$ δεν υπάρχει.

Όμως, όλες οι θεωρητικές αναλύσεις μας θα γίνονταν εξαιρετικά περίπλοκες αν απορρίπταμε το $\sqrt{2}$ ως θεωρητική νοερή κατασκευή. Για παράδειγμα, δεν θα ίσχυε το Πυθαγόρειο θεώρημα, που είναι θεμέλιο της Γεωμετρίας αλλά και όλης της Τριγωνομετρίας.

Στα μαθηματικά θεωρούμε, λοιπόν, ότι ο «αριθμός» $\sqrt{2}$ έχει νόημα, έστω και αν δεν υπάρχει στην φύση το μοναδιαίο τετράγωνο, που έχει ως μήκος διαγωνίου το $\sqrt{2}$.

Αν όμως δεν έχει φυσικό νόημα, ποιο μπορεί να είναι το μαθηματικό νόημά του;

Ως $\sqrt{2}$ εννοούμε στην πραγματικότητα το αποτέλεσμα (το όριο) μίας ατέρμονος υπολογιστικής διαδικασίας (αλγορίθμου) του εξής τύπου:

$$x_0 = 1, x_{k+1} = \frac{1}{2}\left\{x_k + \frac{2}{x_k}\right\}, k = 0,1,2, \ldots$$

Δίνει διαδοχικά τις τιμές $x_1 = 1.5,\ x_2 = 1.4166..,\ x_3 = 1.414215...,$ κ.ο.κ. Διακόπτοντας κατά βούληση την παραπάνω διαδικασία παίρνουμε ενδιάμεσα αποτελέσματα ρου είναι αυξανόμενης ακρίβειας προσεγγίσεις της θετικής «λύσης» της εξίσωσης $x^2=2$. Εντούτοις, κανένα από αυτά τα αποτελέσματα δεν αντιστοιχεί επακριβώς προς αυτόν τον «αριθμό».

Το ίδιο ισχύει και για όλους τους άλλους άρρητους αριθμούς, είτε είναι αλγεβρικοί, όπως ο $\sqrt{2}$ είτε υπερβατικοί, όπως ο π=3,141592653589793238..

Γιατί, όμως, δεν απλοποιούμε τα μαθηματικά αποδεχόμενοι για τέτοιους αριθμούς κάποιες ρητές προσεγγίσεις τους;

3. Τι μας ενδιαφέρει αν κάποιοι αριθμοί είναι ρητοί ή άρρητοι;

Αυτό το ερώτημα είναι ανάλογο με το προηγούμενο. Σχετίζεται με την ακρίβεια των μαθηματικών σχέσεων.

Τι μας ενδιαφέρει, για παράδειγμα, αν ο αριθμός π είναι ρητός ή άρρητος;

Μία προφανής απάντηση είναι: Τότε μόνο ισχύουν ακριβώς σχέσεις όπως η, ημ(π)=0 (όπου οι γωνίες μετρώνται εδώ σε ακτίνια). Χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις του π=3,141592654... σε έναν υπολογιστή του χεριού έχουμε για παράδειγμα: sin(3.14)= 0.001592652 και sin(3.14159)=0.000002653 αλλά όχι μηδενική τιμή.

Το ίδιο ισχύει και για, όλες τις άλλες απλές σχέσεις που χρησιμοποιούμε στην Τριγωνομετρία. Ειδικότερα, το Πυθαγόρειο θεώρημα σε τριγωνομετρική μορφή:

$$συν^2φ+ημ^2φ=1,$$

που αποτελεί το υπόβαθρο όλης της τριγωνομετρίας, παύει να ισχύει αν αντικαταστήσουμε το ημίτονο και το συνημίτονο με ρητές προσεγγίσεις τους.

Αν θέλουμε να έχουμε ακριβείς σχέσεις, *δεν* μπορούμε να αποφύγουμε την χρήση των άρρητων αριθμών. Αν για όλα τα παραπάνω μεγέθη χρησιμοποιήσουμε κάποια πεπερασμένη ακρίβεια τότε η Πυθαγόρεια ταυτότητα δεν ισχύει ακριβώς και δεν μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για παραπέρα μαθηματικούς υπολογισμούς.

4. Υπάρχουν στην φύση οι Φυσικοί Αριθμοί;

Αν και θα παραξενέψει πολλούς, προσεκτική εξέταση των δεδομένων δείχνει ότι ούτε αυτοί υπάρχουν ως σύνολο.

Ορθό είναι ότι οι πρώτοι 5 ως 7 φυσικοί αριθμοί φαίνεται να έχουν μία αντιστοιχία με ενδόμυχες νοητικές διαδικασίες. Ο εγκέφαλος πολλών ζώων (ανθρώπων, πιθήκων, κοράκων, περιστεριών) μπορεί να κρατήσει στην επίκαιρη μνήμη του γύρω στα 5 ομοειδή «κομμάτια»[6] πληροφορίας ταυτοχρόνως, αλλά και την σειρά με την οποία εμφανίσθηκαν. Έτσι, ενυπάρχουν στον νου οι απαρχές της αρίθμησης, τις οποίες οι άνθρωποι επεκτείνουν με το να αντιστοιχούν αριθμούμενα αντικείμενα με τα δάκτυλα των χεριών και ποδιών τους. Όμως, μεγαλύτεροι από το 10 ή το 20 αριθμοί γίνονται αντιληπτοί μόνο ως σύμβολα, ως αλυσίδες δεκαδικών ψηφίων, τις οποίες ξέρουμε εν μέρει να χειριστούμε για να απαντήσουμε ερωτήματα σχετικά με την σύγκριση ενός πλήθους με κάποιο άλλο, την άθροιση ή τον πολλαπλασιασμό κ.ο.κ.

Πώς φαίνεται ότι οι Φυσικοί Αριθμοί 0, 1, 2, 3, … είναι ένα νοερό κατασκεύασμα και <u>δεν</u> ενυπάρχουν στην «Φύση», δηλαδή στον υλικό κόσμο;

Υπάρχουν διάφορες παρατηρήσεις που το τεκμηριώνουν:

1. Όπως παρατηρεί ο Aleksandrov, οι πράξεις με ακεραίους δεν έχουν πάντα νόημα. Δεν ισχύει πάντοτε π.χ. 2+1=3. Δύο μήλα και ένα αχλάδι αποτελούν, ίσως, τρία φρούτα. Αν, όμως, προσθέσουμε δύο λίτρα υδρογόνου σε ένα λίτρο οξυγόνου το αποτέλεσμα δεν είναι τρία λίτρα αερίου αλλά πολύ μικρότερος όγκος νερού (ίσως σε μορφή υδρατμών γιατί η χημική αντίδραση είναι έντονα εξώθερμη). Αν οι αριθμοί περιγράφουν πλήθος κάποιων αντικειμένων ή ποσότητες κάποιων υλικών, τότε η πρόσθεσή τους έχει νόημα μόνο όταν πρόκειται για ομοειδή αντικείμενα. Ένα μήλο και ένα πορτοκάλι δεν αποτελούν δύο μηλοπορτόκαλα! Η πρόσθεσή τους έχει νόημα μόνο αν τα αναγάγουμε σε μία ενιαία κατηγορία, τα φρούτα. Τότε λέμε ότι υπάρχουν δύο φρούτα. Παρομοίως, δεν έχει νόημα να προσθέσουμε μία ιδέα και μία πατάτα. Η πρόσθεση έχει νόημα μόνο αν προσθέτουμε ποσότητες ομοειδών πραγμάτων. Αλλά το τι είναι ομοειδή πράγματα είναι συχνά θέμα λογικής αφαίρεσης. Μία ιδέα και μία πατάτα μπορούν να προστεθούν αν τα θεωρήσουμε ότι αποτελούν απλώς αντικείμενα της σκέψης. Τότε έχουμε δύο αντικείμενα της σκέψης.

Πιο δύσκολα είναι τα πράγματα για τον πολλαπλασιασμό, γιατί δεν μπορούμε πάντοτε να πολλαπλασιάσουμε ομοειδή ποσά. Δύο μέτρα μήκους και τρία μέτρα πλάτους ισούνται, ίσως, με έξη τετραγωνικά μέτρα, αλλά δύο

[6] Οι Herbert Simon και G. A. Miller τα ονόμασαν chunks.

πορτοκάλια δεν μπορούν να πολλαπλασιασθούν με τρία μήλα! Μπορούμε, βέβαια, να πολλαπλασιάσουμε δύο πορτοκάλια με κάτι που το λέμε «φορές» ή «επαναλήψεις». Τρεις φορές δύο πορτοκάλια αντιστοιχούν σε έξη πορτοκάλια.

Χωρίς γλωσσική και λογική ανάλυση και δημιουργία κατάλληλων εποπτικών παραστάσεων οι πράξεις της αριθμητικής δεν έχουν νόημα!

2. Στην πραγματικότητα αδυνατούμε να φανταστούμε καν κάπως μεγάλους φυσικούς αριθμούς (ΦΑ), όπως είναι ήδη ο 123. Η ψευδαίσθηση ότι ξέρουμε τι σημαίνει ο 123 οφείλεται στο ότι έχουμε ένα εύχρηστο σύστημα γραφής του, το δεκαδικό. Ας δοκιμάσουμε, όμως, να τον φαντασθούμε ως μία σειρά από εκατόν είκοσι τρεις «χαραγματιές», ||||….|||, όπως θα τις έγραφε ίσως ένας πρωτόγονος βοσκός αριθμώντας τα πρόβατά του. Βλέπουμε αμέσως ότι αδυνατούμε να τον συλλάβουμε νοερά. Ο μόνος τρόπος να συγκρίνουμε αριθμούς γραμμένους με αυτόν τον τρόπο, π.χ. τον 123 με τον 128, είναι η καταγραφή τους σε δύο παράλληλες γραμμές σε αντιστοιχία μίας προς μία χαραγματιά, ώστε να φανεί σε ποιόν περισσεύουν κάποιες γραμμές.

3. Πρακτικά, το σύνολό όλων των ΦΑ, που μπορούμε να γράψουμε, είναι πεπερασμένο. Ότι αριθμητικό σύστημα παράστασης των ΦΑ και αν χρησιμοποιήσουμε, θα υπάρχει πάντα ένας ασύλληπτα μεγάλος αριθμός, που όλο το μελάνι του κόσμου δεν αρκεί για να τον γράψουμε. Τι νόημα έχει, επομένως να μιλούμε τότε για τον επόμενό του ή το διπλάσιό του;

Στην πραγματικότητα, ως σύνολο των ΦΑ νοούμε το αποτέλεσμα μίας ατέρμονος διαδικασίας, που συνίσταται σε προσθήκη εκάστοτε μίας μονάδας στον προηγούμενο όρο. Είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε αυτό το άλμα φαντασίας για να μπορούμε να αποδεικνύουμε θεωρήματα της Αριθμητικής. Το βασικό εργαλείο για αποδείξεις στην Αριθμητική είναι το «Αξίωμα Πλήρους Επαγωγής». Ισχυρίζεται ότι αν μία μαθηματική σχέση (μία ιδιότητα αναφερόμενη σε φυσικούς αριθμούς) ισχύει για τον πρώτο ΦΑ, 1, και μπορεί να δειχθεί ότι μεταβιβάζεται από τυχόντα ΦΑ, ν, στον επόμενό του, τον ν+1, τότε αυτή η σχέση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή, μέχρι το άπειρο.

Εντούτοις, γνωρίζουμε ότι δεν μπορούμε ποτέ να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο σύνολο αριθμών, αφού ο χρόνος ζωής μας είναι πεπερασμένος. Είναι προφανές ότι οι ΦΑ αποτελούν μίαν νοερή σύλληψη που αδιαφορεί για το αν μπορούμε πράγματι να τους γράψουμε. Από αυτήν την πλευρά διαφεύγουν από κάθε φυσική αντίληψη.

Σε σχέση με τους ΦΑ πρέπει, επίσης, να προσέξουμε ότι η συνέχισή τους μέχρι το άπειρο δημιουργεί το ερώτημα αν ως σύνολο είναι μονοσήμαντα ορισμένοι, αφού η έννοια «άπειρο» δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Υπάρχουν διάφορα είδη «απείρου», όπως έδειξε το 1874 ο Georg Cantor. Αντιστοίχως, ο Thoralf Skolem έδειξε με εργασίες που δημοσίευσε από το 1929 ως το 1935 ότι μπορούν να επεκταθούν με διαφόρους τρόπους υπερ-πεπερασμένα, δηλαδή πέρα από το άπειρο, το οποίο τώρα θεωρείται ως αυτοτελές μέγεθος και όχι ως αποτέλεσμα ή δημιουργός μίας ατέρμονος δυναμικής διαδικασίας. (βλέπε Παράρτημα 2).

Ανάλογα με τα προηγούμενα είναι και τα ακόλουθα ερωτήματα:

5. Έχουν οι καθιερωμένες στοιχειώδεις συναρτήσεις φυσικό νόημα;

Ούτε οι συναρτήσεις, που χρησιμοποιούμε, π.χ. οι ημ(x), συν(x), δεν αντιστοιχούν επακριβώς σε καμία φυσική πραγματικότητα, αφού οι τιμές τους είναι συνήθως άρρητοι αριθμοί. Όμως, οι εξισώσεις που ικανοποιούν είναι πολύ απλούστερες από εκείνες που θα προσέγγιζαν ακριβέστερα τα φαινόμενα. Έτσι μας βολεύει να χρησιμοποιούμε τέτοιες συναρτήσεις αφού και οι εξισώσεις τους έχουν πολύ απλή δομή και «λύνονται» εύκολα ή μετασχηματίζονται εύκολα.

Στην προκειμένη περίπτωση οι συναρτήσεις αυτές προκύπτουν από την διαφορική εξίσωση:

$$y''(x) = y(x)$$

που έχει την γενική λύση:

$$y(x) = A\eta\mu(x) + B\sigma\upsilon\nu(x)$$

με τυχαίες σταθερές Α, Β.

Τα Μαθηματικά είναι γεμάτα με εξαιρετικά απλοποιημένα μοντέλα της υλικής πραγματικότητας, που όμως επιτρέπουν στους μαθηματικούς να δώσουν εύκολα λύσεις και να εντοπίσουν κατά προσέγγιση βασικές ιδιότητες των φαινομένων (όπως είναι η περιοδικότητα των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης y″=y). Αν επιδιώκαμε να έχουμε πολύ ακριβέστερα μαθηματικά μοντέλα θα ήμασταν ακόμα αιώνες πίσω, όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και στην Τεχνολογία.[7]

Τα μοντέλα φυσικών διεργασιών που εξετάζουν συνήθως τα μαθηματικά δεν αντιστοιχούν στην φυσική πραγματικότητα! Οι εξισώσεις, που συνήθως μελετούν και λύνουν οι μαθηματικοί και φυσικοί, δεν περιγράφουν ακριβώς τον φυσικό κόσμο. Όμως, χωρίς αυτές τις απλουστεύσεις, δεν θα υπήρχε η σημερινή Τεχνολογία. Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι η τροχιά ενός βλήματος είναι μία παραβολή, πράγμα που δεν ισχύει αν λάβουμε υπόψη την αντίσταση του αέρα αλλά και μεταβολές στην πυκνότητά του, όπως επίσης και το γεγονός ότι δεν είναι στάσιμος αλλά αποτελεί ρευστό. Η ακριβής αντιμετώπιση τέτοιων αποκλίσεων από το αρχικό απλουστευμένο μοντέλο είναι εφικτή μόνο με χρήση Η/Υ και έγινε στο τέλος του 20ου αιώνα, ενώ η αρχική, απλουστευμένη, περιγραφή ανακαλύφθηκε γύρω στα τέλη του 16ου και τις αρχές του 17ου αιώνα.

Οι περισσότερες έννοιες των μαθηματικών, (όπως και οι ΦΑ) αντιστοιχούν σε νοερές διαδικασίες (procedures) και όχι σε σταθερές τετελεσμένες μορφές εγγεγραμμένες (αποθηκευμένες, δηλαδή σταθερά περιεχόμενες) στην μνήμη μας. Είναι νοερές κατασκευές, που μας επιτρέπουν να γράφουμε ιδιαίτερα απλές σχέσεις, ώστε να μπορούμε να τις επεξεργασθούμε και να τις μελετήσουμε ευκολώτερα.

Εδώ αξίζει να αναφέρουμε και μία παρατήρηση του Einstein: «Φαίνεται ότι η ανθρώπινη νόηση πρέπει πρώτα να κατασκευάσει αυτόνομα τις μορφές πριν

---

[7] Για παράδειγμα, δεν υπάρχει εναλλασσόμενο ρεύμα καθαρά ημιτονοειδές με σταθερή συχνότητα και φάση, δηλαδή της μορφής $i(t) = i_0\eta\mu(\omega t + \theta)$ με σταθερά εύρος i_0, συχνότητα, ω, και φάση θ. Όμως εμείς θεωρούμε ότι οι πραγματικές μεταβολές της έντασης του ρεύματος ακολουθούν με ικανοποιητική ακρίβεια αυτό το μοντέλο.

μπορέσουμε να τις διαπιστώσουμε στα πράγματα. Από το θαυμάσιο έργο ζωής του Kepler αναγνωρίζουμε με ιδιαίτερα ωραίο τρόπο ότι η γνώση δεν μπορεί να ανθίσει από απλή εμπειρία, αλλά μόνο από την σύγκριση αυτού που έχει εφευρεθεί με αυτό που παρατηρείται» (Albert Einstein: Περί τον Kepler, Frankfurter Zeitung, 9 Νοεμβρίου 1930). [8]

Ο Einstein εννοεί εδώ τις καμπύλες, που λέγονται «ελλείψεις» και προκύπτουν αν «κόψουμε» έναν κώνο με ένα επίπεδο. Τις κωνικές τομές μελέτησε ο Απολλώνιος, που έζησε τον 3ο π.Χ. αιώνα. Ο Kepler δημοσίευσε την απόδειξη ότι οι τροχιές, που διαγράφουν οι πλανήτες αντιστοιχούν σε ελλείψεις, που στην μία εστία τους βρίσκεται ο ήλιος το 1609.

6. Τι νόημα έχουν οι κλασσικές διαφορικές εξισώσεις της Φυσικής; Πόσο καλά περιγράφουν τα φυσικά φαινόμενα;

Ας εξετάσουμε, για παράδειγμα, την διαφορική εξίσωση $y''-a^2y=0$ που χαρακτηρίζει τόσο χωρικές ταλαντώσεις (ταλαντώσεις μίας χορδής), όσο και χρονικές περιοδικές μεταβολές.

Ως μελέτη ενός διαχρονικού φαινομένου η εξίσωση αυτή είναι πολύ πιο πιστό μοντέλο της φυσικής πραγματικότητας, γιατί ο χρόνος είναι μία νοερή κατασκευή που θεωρείται συνήθως ως απείρως διαιρετή. Έτσι μπορούμε πράγματι να ορίσουμε παραγώγους ως όρια για $\Delta t \to 0$. Αντιθέτως, ο χώρος δεν διαθέτει στην κυριολεξία απειροστά και επομένως η εξίσωση που περιγράφει τις ταλαντώσεις μίας χορδής στερεωμένης στα δύο άκρα της δεν θα έπρεπε να είναι διαφορική εξίσωση αλλά μάλλον μία «εξίσωση διαφορών» που περιγράφει την κίνηση κάθε υλικού σωματιδίου της χορδής. Η χορδή δεν είναι ένα συνεκτικό σώμα αλλά μάλλον μία αλυσίδα σωματιδίων. Δηλαδή η παράγωγος ως προς τον χρόνο ίσως έχει κάποιο «φυσικό» νόημα, ενώ η παράγωγος ως προς x, όπου x μία μεταβλητή που εκφράζει αποστάσεις στον χώρο, <u>δεν</u> έχει άμεσο φυσικό νόημα και αποτελεί μόνο μία εξιδανικευμένη περιγραφή της κλίσης που έχει η καμπύλη y(x) σε κάθε θέση x.

Στην πραγματικότητα η χορδή δεν είναι καν μία αλυσίδα σωματιδίων. Τα άτομα μετάλλου που την απαρτίζουν είναι ενσωματωμένα σε ένα πλέγμα με ελαστικούς δεσμούς μεταξύ των ατόμων. Έτσι δεν είναι εύκολο ούτε χρήσιμο να περιγράψουμε την κίνηση κάθε ατόμου χωριστά.

Η εξίσωση της χορδής βασίζεται μάλλον σε απλές υποθέσεις σχετιζόμενες με την εμπειρία (εμπειρικές παρατηρήσεις) και όχι στην ατομική θεωρία. Έτσι, όπως συμβαίνει συχνά στην Φυσική και την Τεχνολογία, η εξίσωση είναι ανεξάρτητη από άλλες αρχές.

Η σύγχρονη Φυσική αποτελείται από ένα σύνολο ανεξάρτητων θεωριών βασισμένων σε εμπειρικές υποθέσεις και παρατηρήσεις και δεν είναι μία συνεκτική συναγωγική θεωρία βασισμένη σε πρωταρχικές αρχές όπως θα ήθελαν να πιστέψουμε πολλοί φυσικοί.

Έστω, όμως, και αν δεχθούμε ότι είναι κάπως αξιόπιστη η περιγραφή ταλαντώσεων στον χώρο με χρήση διαφορικών εξισώσεων, η μετατόπιση μίας παλλόμενης χορδής δίνεται πιο σωστά από την μη γραμμική μερική

[8] Βλέπε Einstein' s manuscript στα Einstein Archives Online.

διαφορική εξίσωση[9]. Όλοι οι όροι αυτής της εξίσωσης χρησιμοποιούνται πράγματι στην πράξη, κατά την μελέτη διαφόρων φαινομένων, αλλά συνήθως όχι όλοι μαζί. Ανάλογα με το σε ποιες πλευρές κάποιου φαινομένου δίνουμε έμφαση, συνήθως παραλείπουμε κάποιον όρο και απλουστεύουμε έτσι την διαφορική εξίσωση.

Συνηθέστερα, όμως, χρησιμοποιούμε την εξαιρετικά απλουστευμένη μορφή της παραπάνω μερικής διαφορικής εξίσωσης:

$$\alpha^2 y_{xx}(x,t) = y_{tt}(x,t)$$

που λέγεται *μονοδιάστατη κυματική εξίσωση*. Εδώ y_{xx} είναι η δεύτερη παράγωγος της κάθετης μετατόπισης y ως προς την μετακίνηση στο διάστημα, x, ενώ y_{tt} είναι η δεύτερη παράγωγος της κάθετης μετατόπισης y ως προς την μεταβλητή χρόνου t.

Γιατί κάνουμε αυτές τις απλοποιήσεις;
Αυτό γίνεται γιατί η λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι πολύ απλή:

$$y(x,t) = F(x-\alpha t) + G(x+\alpha t)$$

όπου F και G είναι αρχικά απροσδιόριστες συναρτήσεις, που καθορίζονται από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του φαινομένου. Θεωρούμε, μάλιστα, ότι οι συναρτήσεις αυτές παριστάνουν δύο κύματα, που (για $a > 0$), το πρώτο, το F, κινείται προς τα δεξιά, ενώ το δεύτερο, το G, κινείται προς τα αριστερά.

7. Απόρριψη του Πλατωνισμού

Ο Πλατωνισμός, θεωρεί ότι αφηρημένες έννοιες, όπως οι έννοιες της Γεωμετρίας και γενικότερα, οι θεμελιώδεις έννοιες των Μαθηματικών, υπάρχουν σε έναν άϋλο κόσμο, τον κόσμο των ιδεών, με τον οποίο επικοινωνεί η σκέψη μας και καθοδηγείται από αυτόν στην δημιουργία εννοιών κατάλληλων για την περιγραφή της πραγματικότητας.

Εντούτοις, το συμπέρασμα που βγαίνει από τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι ότι οι αριθμοί και τα άλλα μαθηματικά μεγέθη είναι δημιουργήματα μίας διαδικασίας εξέλιξης και απλοποίησης των μοντέλων με τα οποία προσεγγίζουμε την περιγραφή της πραγματικότητας. Δεν ενυπάρχουν ούτε στην φύση, ούτε σε κάποιον άϋλο κόσμο των ιδεών, όπως φανταζόταν ο Πλάτων. Επειδή συνεχώς εξελίσσονται δεν έχουν καμία a priori δοσμένη πάγια μορφή. Απλά φανταζόμαστε την τελευταία, πιο εξελιγμένη τους μορφή, ως την «πραγματική» μορφή τους, γιατί με αυτήν έχουμε συνηθίσει να τα χειριζόμαστε. Ακόμα και οι λεγόμενοι «φυσικοί αριθμοί» απέκτησαν πιο ξεκάθαρη υπόσταση όταν πέρασαν από τον 13ο αιώνα και μετά από την αθροιστική παράσταση των Ελλήνων και Ρωμαίων στην δεκαδική (δηλαδή μίαν πολυωνυμική) παράσταση. Αυτό έγινε στον Δυτικό Κόσμο σταδιακά από

---

[9] $$\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y_x(x,t)}{\sqrt{1+y_x^2(x,t)}}\right] - g\sqrt{1+y_x^2(x,t)} + \frac{1}{\delta} f(x,t) = y_{tt}(x,t)$$

τον 13ο ως τον 16ο αιώνα, ενώ οι πραγματικοί και οι μιγαδικοί αριθμοί ορίστηκαν ξεκάθαρα τον 19ο αιώνα.

Όπως σωστά παρατηρεί ο Einstein «Φαίνεται ότι η ανθρώπινη νόηση πρέπει πρώτα να κατασκευάσει αυτόνομα τις μορφές πριν μπορέσουμε να τις διαπιστώσουμε στα πράγματα…».[10]

Η εντύπωσή μας ότι ορισμένες έννοιες είναι «φυσικές», γιατί έχουμε συνηθίσει να σκεπτόμαστε με αυτές, νομίζω πως είναι απλά αποτέλεσμα της συνήθειας και του ότι κάποιες έννοιες φαίνονται να είναι εντελώς απαραίτητες για την σκέψη. Εξ ίσου απαραίτητο για την ζωή μας είναι, όμως, σήμερα το κινητό τηλέφωνο, που πριν σαράντα χρόνια κανείς δεν φανταζόταν ότι θα υπάρξει. Το ότι κάτι μας φαίνεται εντελώς απαραίτητο δεν σημαίνει ότι αυτό βρίσκεται στην «φύση» του κόσμου που μας περιβάλλει.

8. Πόσο «αντικειμενικά» είναι τα Μαθηματικά;
Η συνεισφορά των Μαθηματικών στην κατανόηση της Φύσης.

Η απόρριψη της φυσικής ύπαρξης διαφόρων μαθηματικών μεγεθών μπορεί να δώσει την εντύπωση ότι τα Μαθηματικά είναι μία αυθαίρετη δημιουργία όπως η Ποίηση. Εντούτοις, αυτό είναι μία παρανόηση! Τα Μαθηματικά μας παρέχουν ένα λογικά ασφαλές (το μόνο λογικά ασφαλές) πλαίσιο για μίαν συνολική θεώρηση της πραγματικότητας.

Πολλές άλλες θεωρητικές επιστήμες μας παρέχουν σημαντικές ερμηνείες διαφόρων πλευρών της πραγματικότητας. Εντούτοις τους λείπει η λογική συνοχή. Στις κοινωνικές και οικονομικές επιστήμες δεν υπάρχει απόλυτη λογική διασύνδεση όλων των εννοιών. Έτσι δεν μπορούμε να φθάσουμε πάντοτε σε αληθή συμπεράσματα από τις υπάρχουσες θεωρίες, άσχετα με το πόσο λαμπρές μπορεί να είναι. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εν μέρει έμμεσα με μαθηματικοποίηση αυτών των θεωριών.

Συνοπτικά μπορούμε να σημειώσουμε:

1. Η δημιουργία αφηρημένων μαθηματικών εννοιών είναι μία εξιδανίκευση εμπειρικών εννοιών, δηλαδή εννοιών που αντιστοιχούν σε άμεσες εμπειρίες.
2. Μαθηματικά είναι η τέχνη και επιστήμη φειδωλής λογικής μοντελοποίησης. Μπορεί να εξιδανικεύουμε την πραγματικότητα, αλλά δημιουργούμε με αυτές τις εξιδανικευμένες έννοιες λογικά συνεκτικές θεωρίες. Αυτό επιτρέπει στις Φυσικές Θεωρίες να πετυχαίνουν λογική συνοχή με το να υιοθετούν μοντέλα (της πραγματικότητας /φύσης) που αντιστοιχούν σε μαθηματικές δομές και περιγράφουν ικανοποιητικά κάποια φυσικά φαινόμενα.

---

[10] Κατασκευάζουμε, λοιπόν, π.χ. τον αριθμό $\sqrt{2}$ ως νοητό όριο μίας ακολουθίας χωρίς να λάβουμε υπόψη ότι αδυνατούμε να παρακολουθήσουμε την διαδικασία αλγοριθμικής κατασκευής της πράγματι μέχρι το άπειρο. Ο $\sqrt{2}$ δεν υπάρχει σε έναν άϋλο κόσμο των ιδεών γιατί δεν μπορεί να υπάρξει αυτοτελώς. Δεν έχει πεπερασμένη έκφραση. Δεν έχει, επίσης, σχέση με την πραγματικότητα, αλλά έχει σχέση με την φαντασία μας, που τον δημιουργεί για να μπορούμε να απαντήσουμε το ερώτημα τι λύση έχει η εξίσωση $x^2-2=0$. Κατά τον ίδιο τρόπο δημιουργήσαμε τους μιγαδικούς αριθμούς για να έχουν λύση εξισώσεις, όπως η $x^2+2=0$, και τις παραγώγους για να υπάρχουν εφαπτόμενες με συγκεκριμένη τιμή.

Τελικές Παρατηρήσεις

Το βασικό συμπέρασμα αυτής της ανάλυσης είναι ότι οι περισσότερες μαθηματικές έννοιες είναι εφευρέσεις και όχι με κάποιον τρόπο εγγενείς στην Φύση. Όμως, είναι εφευρέσεις που απλοποιούν σημαντικά την περιγραφή φυσικών φαινομένων. Δεν πρέπει να θεωρούμε τις θεμελιώδεις έννοιες ως σταθερές και αμετάβλητες. Μόνο ορισμένες απαρχές τους είναι κατά κάποιο τρόπο έμφυτες, δηλαδή δοσμένες από τον τρόπο που ενσωματώνουμε στον νου μας εξωτερικές εμπειρίες καθώς αναπτυσσόμαστε. Είναι μέρος του συνεχούς μας διαλόγου με την Φύση.

Σε κάθε περίπτωση η αντίληψή μας για τους πραγματικούς αριθμούς δεν σχετίζεται με τον τρόπο που λειτουργεί η Φύση, αλλά μάλλον νε το τι μας φαίνεται βολικό. Οι περισσότερες μαθηματικές έννοιες δεν έχουν άμεση σχέση με φυσικά φαινόμενα. Σχετίζονται μάλλον με απλουστεύσεις κάποιων φυσικών φαινομένων και έχουν φθάσει την σημερινή μορφή τους με πολιτισμική εξέλιξη.

Έτσι, όλες οι διαδικασίες που περιλαμβάνουν όρια είναι εφευρέσεις, αλλά οι πρώτοι πέντε ως επτά θετικοί ακέραιοι φαίνονται να ενυπάρχουν σε νευρωνικούς μηχανισμούς. Οι γεωμετρικές έννοιες είναι επίσης κατά κάποιον τρόπο ένας συμβιβασμός μεταξύ του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε το περιβάλλον και του τρόπου με τον οποίο το κατανοούμε. Χωρίς γεωμετρική εκπαίδευση έννοιες όπως η «απόσταση» δεν έχουν ακριβές νόημα.

Αυτό που δίνει στις μαθηματικές έννοιες πειστικότητα είναι η λογική συνοχή των γεωμετρικών και άλλων μαθηματικών θεωριών, όχι ο υποτιθέμενα έμφυτος χαρακτήρας τους. Οι έννοιες χώρος (και ο χρόνος) φαίνονται να έχουν μία φυσιολογική βάση /προέλευση ως προερχόμενες από τον τρόπο διαμόρφωσης του σώματός μας. Αυτό όμως που είναι εγγενές (προϋπάρχει) σε αυτές είναι ο τρόπος εξέλιξης /ανάπτυξης του νευρικού μας συστήματος.

Τα χαρακτηριστικά τους, η μορφή τους δεν είναι εγγενή στην Φύση, αλλά μία προσπάθεια να μοντελοποιήσουμε τις φυσικές παρατηρήσεις με την βοήθεια εννοιών που διαμορφώνουμε έτσι ώστε να συλλαμβάνουμε και να ελέγχουμε το άμεσο περιβάλλον μας. Ερμηνεύουν φαινόμενα του *μικροκόσμου* (του κόσμου των ατομικών φαινομένων) και του *μακροκόσμου* (του κόσμου των αστρονομικών παρατηρήσεων) με την βοήθεια εννοιών διαμορφωμένων για χρήση στον *μεσόκοσμο*, τον κόσμο των άμεσα παρατηρήσιμων αντικειμένων και φαινομένων που έχουν την δική μας τάξη μεγέθους. Έτσι δεν θα έπρεπε να περιμένουμε να βρούμε για διατομικά και αστρονομικά φαινόμενα περιγραφές που οπωσδήποτε συμβιβάζονται με τον κοινό νου μας. Το αν θα έρεπε να θεωρούμε τον χώρο (και τον χρόνο) ως κοκκώδη (έχοντα διακριτή δομή) ή συνεχή δεν είναι θέμα της υποτιθέμενα «αληθινής» φύσης αυτών των εννοιών. Εξαρτάται μόνο από το πόσο βολικό μπορεί να είναι το μαθηματικό μοντέλο που προκύπτει.

Ο απώτερος σκοπός της Φυσικής είναι να δώσει μίαν φειδωλή και μαθηματικώς εύχρηστη περιγραφή των φαινομένων. Αυτό είναι η ουσία αυτού που ονομάζουμε «ομορφιά» μίας θεωρίας, και όχι μόνο το πόσο παράξενη φαίνεται. Όπως είπε ο Περικλής πρέπει κανείς να «επιδιώκει την ομορφιά με φειδωλότητα» («Φιλοκαλούμεν μετ' ευτελείας») τόσο στην Επιστήμη όσο και στην Τέχνη.

Πρέπει κανείς να έχει πάντα στον νου του ότι ο απώτερος σκοπός μίας φυσικής θεωρίας δεν είναι η παραδοξότητα αλλά η περιεκτικότητα και φειδωλότητα των μέσων.

Το απώτερο κριτήριο του τι είναι δυνατό στην Φύση είναι το αν κάτι είναι πειραματικά επαληθεύσιμο και όχι κάποιες εκ των προτέρων συλλαμβανόμενες θεωρητικές κατασκευές.[11]

Οι σημερινές φυσικές θεωρίες φαίνονται στους περισσότερους ανθρώπους παράξενες και ακατανόητες. Αυτό που θα ήθελαν να δουν είναι μία θεωρία που θα αποκαθιστούσε τις θεμελιώδεις έννοιες στην «καθιερωμένη /φυσική» χρήση τους, στον τρόπο που έχουμε συνηθίσει να τις χρησιμοποιούμε. Εντούτοις αυτό δεν είναι πιθανό. Οι φυσικές θεωρίες μπορεί να γίνουν ακόμα πιο παράξενες, αν αυτό θα επέτρεπε μία πιο φειδωλή /συνοπτική επεξήγηση όλων των πειραματικών δεδομένων.

Δεν πρέπει να θεωρούμε τις φυσικές έννοιες ως απόλυτες. Δεν θα έπρεπε να μιλούμε για την «πραγματική φύση του χωροχρόνου», αλλά μάλλον να έχουμε την επίγνωση ότι όλες οι θεωρίες είναι θέμα διευκόλυνσης. Δεν μπορούμε να αγνοήσουμε πειραματικά δεδομένα αλλά πρέπει να προσέχουμε πάντα πως τα ερμηνεύουμε. Ειδικότερα πρέπει να προσέχουμε ότι κάποιες πλευρές φυσικών φαινομένων οφείλονται στα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε και δεν είναι εγγενείς στην Φύση.

Οι Θετικές Επιστήμες ως Θέατρο Σκιών[12]

Η εικόνα της Φύσης, που μας δίνουν οι επιστημονικές θεωρίες, θα μπορούσε να παρομοιασθεί με ένα τοπείο στην ομίχλη ή ένα θέατρο σκιών. Βλέπουμε κάποιες ασαφείς σκιές, τους δίνουμε ονόματα, και περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο κινούνται ή συμπεριφέρονται. Ποιοί είναι όμως αυτοί δεν ξέρουμε ακριβώς ούτε μπορούμε να μαντέψουμε. Δεν θα γνωρίσουμε ποτέ τα «πράγματα καθαυτά», όπως παρατηρεί ο Kant. Δεν πρέπει να ξεχνούμε ότι αυτά που βλέπουμε, ακόμα και αν νομίζουμε ότι τα βλέπουμε με σαφήνεια, προσδιορίζονται σε μεγάλο βαθμό από την δομή του εγκεφάλου και τα αισθητήρια όργανά μας. Υπάρχουν, για παράδειγμα, έντομα και ζώα που βλέπουν ένα άλλο φάσμα συχνοτήτων από εμάς. Τα πράγματα έχουν γι αυτά τα ζώα άλλα χρώματα, που εν μέρει δεν μπορούμε ούτε να τα φαντασθούμε. Η πραγματικότητα δεν είναι τόσο σαφής και μονοσήμαντη όσο θέλουμε να πιστεύουμε. Σημαντική είναι, παρ' όλα αυτά η λογική συνοχή των επιστημονικών μας θεωριών, η απλότητα των θεμελίων τους και η επαληθευσιμότητά τους. Πρέπει οι περιγραφές μας να περιγράφουν πιστά τον ρόλο που παίζει κάθε σκιά για να έχουν αξιοπιστία τα συμπεράσματά μας.

---

[11] Ειδικά σε σχέση με διακριτά έναντι συνεχών μοντέλων πρέπει κανείς να έχει στον νου ότι τα διακριτά μοντέλα φαίνονται από μίαν άποψη πιο κατάλληλα για ύλη αποτελούμενη από σωματίδια, αλλά είναι συχνά πολύ πιο δύσκολο να αναλυθούν μαθηματικά. Εντούτοις, ένα συνεχές μοντέλο μπορεί κατά κάποιαν έννοια να είναι εξίσου καλό, αφού η επ'ίλυση των εξισώσεων στις οποίες οδηγεί γίνεται συνήθως με διακριτοποίηση, δηλαδή με αριθμητικές προσεγγίσεις που μπορούν να φθάσουν μέχρι την ακρίβεια που μπορούν να παράσχουν τα όργανα μετρήσεως.

[12] Απόσπασμα από το άρθρο «Επιστήμη και Πραγματικότητα». Βλέπε Files and FOLDERS\ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ\LUCIO RUSSO\Επιστήμη και Πραγματικότητα.docx

Βιβλιογραφία

1. Felix Klein, Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint – Arithmetic, Algebra, Analysis, Dover Publications, 2004.
2. A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentev: Mathematics, Its Contents, Methods and Meaning, Dover, 1999.
3. Peter Smith, Explaining Chaos, Cambridge U. P. 1998.
4. Robert B. Laughlin: A Different Universe, Basic Books, 2005. (R. B. Laughlin: Ένα Διαφορετικό Σύμπαν, Κάτοπτρο, 2008).
5. Calvin C. Clawson: Η Μαγεία των Μαθηματικών, Κέδρος 2008.
6. Robert B. Laughlin – David Pines: The Theory of Everything, 28-31, PNAS, January 4, 2000, vol.97, no.1. (to be found in the internet).
7. P. W. Anderson: More Is Different, *Science*, New Series, Vol. 177, No. 4047. (Aug. 4, 1972), pp. 393-396.
8. Stephen Blundell, Superconductivity, Oxford U.P., 2009.

Παράρτημα 1

Οι απόψεις του νομπελίστα Robert Laughlin για την υπό όρους ύπαρξη κάποιων φυσικών μεγεθών:

Η αναγωγική αντίληψη απορρίπτεται σήμερα και στην Φυσική από πολλούς επιστήμονες, όπως είναι οι νομπελίστες Philip W. Anderson [7] και Robert B. Laughlin [4, 6]! Κατά τον Robert B. Laughlin, ακόμα και η εικόνα, ότι υπάρχουν τα μεμονωμένα ηλεκτρόνια, είναι εσφαλμένη.

Αυτά που θεωρούμε ως θεμελιώδη στοιχεία διακριτοποίησης της δομής της ύλης, όπως η έννοια «ηλεκτρόνιο» [4, σελ. 17], δεν είναι γνήσια αναγωγικές έννοιες (reductionist concepts), γιατί η μέτρηση των ιδιοτήτων τους (π.χ. η μέτρηση του φορτίου ενός ηλεκτρονίου) βασίζεται σε συλλογικά (collective) φαινόμενα, δηλαδή, μακροσκοπικές παρατηρήσεις.

Στην σελ. 18 λέει: «Στον βαθμό που η γνώση μας για τον φυσικό κόσμο βασίζεται σε πειραματική βεβαιότητα, είναι λογικό ότι θα έπρεπε να συνδέσουμε την μεγαλύτερη αλήθεια με την πιο βέβαιη μέτρηση. Αλλά αυτό θα φαινόταν να συνεπάγεται ότι ένα συλλογικό φαινόμενο μπορεί να είναι πιο αληθινό από τους μικροσκοπικούς κανόνες από τους οποίους προέρχεται. ... [τα πειράματα] αποκαλύπτουν ότι το φορτίο ηλεκτρονίου έχει νόημα *μόνο* σε συλλογική συσχέτιση ... Στην σελ. 19 της ελληνικής έκδοσης λέει ότι «όλοι οι φυσικοί νόμοι που γνωρίζουμε έχουν συλλογική προέλευση ...» ενώ «η διάκριση μεταξύ θεμελιωδών νόμων και νόμων που κατάγονται από αυτούς είναι μύθος» και Ό φυσικός νόμος γενικά δεν μπορεί να προβλεφθεί από την καθαρή σκέψη, αλλά πρέπει να ανακαλυφθεί πειραματικά, διότι ο έλεγχος της Φύσης επιτυγχάνεται μόνο όταν η Φύση το επιτρέπει μέσω κάποιας αρχής οργάνωσης».

Στο άρθρο του "The Theory of Everything" με τον David Pines,[6, σελ.28], ο Laughlin παρατηρεί ότι οι Δ.Ε. του Schrödinger δεν μπορούν να λυθούν με ακρίβεια για ένα σύστημα σωματιδίων με πάνω από 10 σωμάτια. Κανένας Η/Υ

που υπάρχει ή θα υπάρξει δεν μπορεί να ξεπεράσει αυτό το όριο, γιατί ή απαιτούμενη μνήμη αυξάνεται εκθετικά με τον αριθμό των σωματιδίων. Αν η μνήμη που απαιτείται για την παρουσίαση της κβαντικής κυματικής συνάρτησης ενός σωματίου είναι N, τότε η μνήμη που απαιτείται για την κυματική συνάρτηση k σωματιδίων είναι N^k. Έτσι αδυνατούμε να προβλέψουμε (να υπολογίσουμε) την συμπεριφορά ενός μεγάλου συστήματος σωματιδίων και πρέπει να καταφύγουμε στην παρατήρηση και το πείραμα. Ορισμένες προσεγγιστικές μέθοδοι, που φαίνονται να περιγράφουν ικανοποιητικά τα φαινόμενα, αδυνατούν να προβλέψουν την έκβαση των πειραμάτων και χρησιμεύουν μόνο για την εκ των υστέρων επεξήγησή τους. Παρομοίως, ο Stephen Blundell [8, σελ. 45 και 139-140] αναφερόμενος στα φαινόμενα υπεραγωγιμότητας σε εξαιρετικά χαμηλές θερμοκρασίες λέει ότι αυτή η αδυναμία μας να προβλέψουμε την συμπεριφορά ενός συστήματος γίνεται ιδιαίτερα εμφανής στην Φυσική των Υπεραγωγών, που χαρακτηρίζεται από *«μακροσκοπικά κβαντικά φαινόμενα».*

Οι απόψεις του Peter Smith για την ανυπαρξία ορισμένων φυσικών μεγεθών σε πολύ μικρές διαστάσεις

Ο Peter Smith [3, σελ. 39-40], αναφερόμενος στο γεγονός ότι η μαθηματική περιγραφή χαοτικών φαινομένων δεν έχει φυσικό νόημα για πολύ μικρή κλίμακα παρατηρεί ότι τα ίδια τα μεγέθη που υποτίθεται ότι περιγράφουν οι διαφορικές εξισώσεις, όπως η πίεση ενός αερίου ή η ταχύτητα μίας ροής, δεν έχουν τότε νόημα. Μάλιστα, ο Smith παρατηρεί εύστοχα ότι μεγέθη, όπως η ταχύτητα ενός ρευστού, δεν μπορούν ποτέ να αποκτήσουν ακριβές νόημα. Αν θεωρηθεί ως ο μέσος όρος των ταχυτήτων των σωματιδίων μίας περιοχής του χώρου, τότε το μέγεθός της εξαρτάται από το μέγεθος αυτής της περιοχής. Αν η περιοχή είναι πολύ μεγάλη, τότε η υποτιθέμενη ταχύτητα του ρευστού είναι σταθερή σε όλη αυτή την περιοχή. Αν η εκάστοτε περιοχή είναι πολύ μικρή, τότε η ταχύτητα είναι μηδέν, σε αν εκεί δεν υπάρχει κανένα σωματίδιο του ρευστού και μεγάλη σε κάποιες γειτονικές περιοχές όπου υπάρχουν σωματίδια. Έχει, δηλαδή, απότομες μεταπτώσεις.

Παράρτημα 2: Η μη-μονοσημαντότητα του συνόλου των Φυσικών Αριθμών

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών υποτίθεται ότι συνεχίζεται μέχρι το «άπειρο». Το γεγονός ότι η έννοια αυτή ορίζει το άνω άκρο του διατεταγμένου αυτού συνόλου και συμβολίζεται με ένα ειδικό σύμβολο, ∞, οδηγεί συχνά στην παρανόηση ότι αποτελεί κάτι μονοσήμαντα ορισμένο. Όμως ήδη ο Cantor έδειξε ότι υπάρχουν πολλά είδη «απείρου», όλοι οι πληθάριθμοι (cardinal numbers) και όλοι οι διατακτικοί αριθμοί (ordinal numbers). Πέρα από αυτούς όμως, ο Thoralf Skolem έδειξε ότι μπορούμε να ορίσουμε και ένα αριθμήσιμα άπειρο πλήθος διακριτών «αριθμών», που μπορούν να χαρακτηρισθούν ως «στατικά άπειρα», γιατί βρίσκονται πέρα από κάθε πεπερασμένο ΦΑ.

Για παράδειγμα, έστω ότι εξετάζουμε «συναρτήσεις φυσικών αριθμών», f, που για κάθε ΦΑ, x, η τιμή f(x) είναι επίσης ένας ΦΑ. Αν τώρα εισαγάγουμε τον συμβολισμό

$$[f(x)]<[g(x)]$$

για να υποδηλώσουμε ότι η συνάρτηση f(x) έχει μικρότερη τιμή από την g(x) όχι οπωσδήποτε για όλους τους ΦΑ, x, αλλά για όλους τους x με εξαίρεση ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών του x, τότε μπορούμε να γράψουμε[13]:

$1<2<\ldots<[x]<[x+1]<[x+3]<\ldots<[2x]<[2x+1]<\ldots<[x^2]<[x^2+1]<\ldots<[2x^2]<[2x^2+1]<\ldots<[x^3]<\ldots$

Εδώ οι παραστάσεις [x], [x+1], … αποτελούν επέκταση του συνόλου των ΦΑ, είναι διακριτοί μεταξύ τους αλλά *υπερπεπερασμένοι* «αριθμοί», αφού βρίσκονται στην διάταξη αυτή πέρα από τους πεπερασμένους ΦΑ. Έτσι αποτελούν διαφορετικά, διακριτά μεταξύ τους και στατικά είδη απείρου. Τέτοιοι αριθμοί ονομάζονται «*υπερακέραιοι*». Ο όρος «άπειρο» χαρακτηρίζει δηλαδή, διαφόρων ειδών μαθηματικά μεγέθη, που καθορίζονται από κατάλληλους «αλγορίθμους».

[13] Εδώ βάζουμε τις «συναρτήσεις» x, x+1, …, 2x, … μέσα σε αγκύλες για να υποδηλώσουμε ότι λαμβάνονται, όχι σημειακά, αλλά ως ολότητες. Σε αυτήν την διάταξη είναι π.χ. $[5x+2]<[x^2]$ γιατί ισχύει $5x+2<x^2$ για όλα τα x που ξεπερνούν το 5.