# Η Φορμαλιστική Απροσδιοριστία των Φυσικών Αριθμών και Η Τεχνητή Ευφυία

από τον Ι.Β. Κιουστελίδης
jqstel@gmail.com
jqstel@math.ntua.gr

## Εισαγωγική Παρατήρηση:

*Το άρθρο αυτό απευθύνεται σε όσους ενδιαφέρονται για τις δυνατότητες και αδυναμίες των προσπαθειών συμβολικής-μηχανιστικής αναπαραγωγής της σκέψης, χωρίς να απαιτεί από τον αναγνώστη εμβάθυνση στην Συμβολική Λογική ή τα Μαθηματικά. Εδώ εξετάζεται ειδικότερα το πού μας οδηγεί η αναγωγή της Αριθμητικής σε έναν φορμαλισμό βασιζόμενο στην Συμβολική Λογική. Για την κατανόηση του βασικού κειμένου ο αναγνώστης θα χρειαστεί μόνο να ξέρει τι είναι τα πολυώνυμα. Πέρα από αυτό αρκεί η προσεκτική ανάγνωση. Το κείμενο είναι επίτηδες απλοποιημένο με παράλειψη πολλών συμβολισμών και αντικατάστασή τους από λεκτικές περιγραφές. Για την κατανόηση, όμως, του Παραρτήματος 2 περί αδυναμιών της Δευτεροβάθμιας Λογικής χρειάζονται κάποια βασικά αποτελέσματα της Θεωρίας Συνόλων που παρατίθενται στο Παράρτημα 1.*

## Η πολυσημαντότητα της έννοιας «Άπειρο»

Φαίνεται κατ' αρχήν παράδοξο το να ισχυριζόμαστε ότι δεν ξέρουμε τελικά τι είναι Φυσικοί Αριθμοί (ΦΑ), ενώ κάθε παιδί μαθαίνει να μετράει στα δάκτυλα, 1, 2, 3, 4, 5, …ήδη από την πρώιμη παιδική ηλικία. Η απροσδιοριστία όμως αυτή αναφέρεται στην φορμαλιστική περιγραφή του συστήματος των ΦΑ και όχι στην εμπειρική τους αντίληψη. Είναι, δηλαδή, συνέπεια των δυνατοτήτων και αδυναμιών που προσφέρει μία φορμαλιστική θεμελίωσή τους με μορφή ενός συστήματος στοιχειωδών παραδοχών (αξιωμάτων). Εν μέρει, το πρόβλημα δεν βρίσκεται στην αρχή της ακολουθίας των ΦΑ αλλά στο νοητό «τέλος» της, το άπειρο.

Όπως ορθά παρατηρεί ο Nietzsche [1], πολλές φορές το γεγονός ότι δίνουμε σε μίαν έννοια ένα συγκεκριμένο όνομα, μας παραπλανά στο να νομίζουμε ότι αυτή περιγράφει κάτι μονοσήμαντα ορισμένο.

Όπως θα φανεί, λοιπόν, η έννοια «άπειρο» δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη[1].

Αν είναι, βέβαια, πράγματι ασαφής και πολυσήμαντη, θα θέλαμε ίσως να την αποφύγουμε τελείως. Όμως αυτό δεν είναι δυνατό, γιατί τότε καμία πρόταση της Αριθμητικής δεν θα ίσχυε γενικά. Όλες οι μαθηματικές αποδείξεις γενικών ιδιοτήτων των ΦΑ εκτείνονται αναγκαστικά μέχρι το άπειρο. Όταν λέμε ότι μία σχέση ισχύει για ΟΛΟΥΣ τους ΦΑ εννοούμε ότι ισχύει για κάθε ΦΑ από το 1 μέχρι το άπειρο, ότι και αν είναι αυτό.

[1] Ήδη ο Georg Cantor έδειξε ότι υπάρχουν μη αριθμήσιμα σύνολα, δηλαδή, πολλά ήδη απείρου (βλ. Παρ. 1). Αλλά εδώ θα ιδούμε ένα άπειρο, ∞, όπου ∞+1>∞.

Μία άλλη πλευρά της αδυναμίας μονοσήμαντου καθορισμού των ΦΑ μέσω ενός φορμαλισμού οφείλεται στο ότι ο φορμαλισμός αυτός ΔΕΝ αποκλείει και την παράλληλη ύπαρξη συνόλων από μεγέθη που δεν εντάσσονται στην συνήθη «αλυσίδα» των θετικών ακεραίων αριθμών που παράγεται από το σύστημα αξιωμάτων μέσω της διαδικασίας της διαδοχής των ΦΑ: 1, 2, 3, ….

Τα πρώτα θεωρήματα που ανέτρεψαν την ελπίδα μονοσήμαντου καθορισμού των Φυσικών Αριθμών με την βοήθεια ενός φορμαλισμού είναι θεωρήματα της Συμβολικής Λογικής που ανάγονται στους Leopold Löwenheim (1915) και Thoralf Skolem (1920 και μετά). Αργότερα, το 1931 ακολούθησαν τα πολύ γνωστότερα θεωρήματα του Kurt Gödel.

Ας δούμε όμως ένα πολύ απλό παράδειγμα που ανάγεται στον Skolem [2] (1929) και δείχνει ότι ο φορμαλιστικός καθορισμός της ακολουθίας των ΦΑ είναι ανέφικτος.

## Πώς μπορούμε να επεκτείνουμε το σύστημα των φυσικών αριθμών

Ο Skolem κατασκευάζει εδώ ένα σύστημα κάποιου είδους αριθμητικών μεγεθών που διαφέρουν από τους ΦΑ αλλά ικανοποιούν ακριβώς τα ίδια αξιώματα με αυτούς.

Αξιώματα λέγονται αναπόδεικτες θεμελιώδεις παραδοχές που καθορίζουν την φύση των μεγεθών που μελετούμε. Όλες οι άλλες προτάσεις που αναφέρονται σε αυτά τα μεγέθη πρέπει να αποδεικνύονται λογικά με χρήση αυτών των αξιωμάτων.

Ο Skolem χρησιμοποίησε μία παραλλαγή των συνήθων αξιωμάτων των Peano-Dedekind, όπου θεωρεί ως πρώτον ΦΑ το 1 (ενώ άλλοι χρησιμοποιούν το 0). Εδώ τα απλοποιούμε κάπως παραλείποντας την φορμαλιστική τους μορφή:

(1) Οι φυσικοί αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης '<' (διάκρισης μικρότερου-μεγαλύτερου).

(2) Υπάρχει ένας αριθμός, ο 1, που δεν έχει προηγούμενον.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας διάδοχός του, ο sx (Successor of x), που συνήθως τον γράφουμε x+1 μόλις ορίσουμε την πρόσθεση.

(4) Υπάρχει μία πράξη '+', η πρόσθεση, που ορίζεται με την αναδρομική σχέση x+sy=s(x+y), δηλαδή, x+(y+1)=(x+y)+1.

(5) Υπάρχει μία πράξη '*', ο πολλαπλασιασμός, που ορίζεται με την αναδρομική σχέση x*(y+1)=x*y+x.

(6) Αρχή της Επαγωγής: Για φορμαλιστικές προτάσεις, P(x), που αναφέρονται σε φυσικούς αριθμούς x, ισχύουν τα ακόλουθα: Αν η P(x) ισχύει για x = 1 και από την ισχύ της για x=k έπεται ότι ισχύει και για x=sk=k+1, τότε η πρόταση ισχύει για όλους τους ΦΑ x.

Βασική ιδέα του Skolem ήταν να εξετάσει σύνολα συναρτήσεων των ΦΑ, δηλαδή συναρτήσεων, όπως η $x^2$ που για κάθε ΦΑ, x, μας δίνουν έναν άλλο ΦΑ. Τέτοιες συναρτήσεις ικανοποιούν αναγκαστικά οποιεσδήποτε σχέσεις ικανοποιούνται και από ΦΑ, γιατί τελικά οι τιμές που παίρνουν αυτές οι συναρτήσεις είναι μόνο ΦΑ.

Ορίζει, λοιπόν, το σύμβολο '<' λέγοντας ότι για οποιεσδήποτε συναρτήσεις των φυσικών αριθμών f(x) και g(x), θα γράφουμε φορμαλιστικά f(x)<g(x) αν η

τιμή f(x) είναι μικρότερη από την τιμή g(x) για άπειρο πλήθος φυσικών αριθμών x. Θα γράφουμε, για παράδειγμα, $x+100<x^2$ γιατί αυτό ισχύει για κάθε ΦΑ από το 11 και μετά.

Έτσι μπορούμε να επεκτείνουμε την ακολουθία των ΦΑ με τον εξής τρόπο:

$1<2<3<\ldots<x<x+1<x+2<\ldots<x+100<\ldots<2x<2x+1<\ldots<x^2<x^2+1<\ldots$

$<x^2+x+1<\ldots<x^3< x^3+1<\ldots< 2x^3+3x^2+4x+5<\ldots<x^4< x^4+1<\ldots$

όπου τα 1, 2, 3, … θεωρούνται τώρα απλώς συναρτήσεις με σταθερή τιμή.

Προφανώς, όταν συγκρίνουμε με αυτόν τον τρόπο συναρτήσεις των ΦΑ το σύμβολο «<» έχει διαφορετικό από το καθιερωμένο νόημα. *Αυτό όμως δεν αλλάζει τίποτα στον φορμαλισμό γιατί ο φορμαλισμός μόνο χρησιμοποιεί αυτό το σύμβολο αλλά δεν ενδιαφέρεται να το ερμηνεύσει!* Τα αξιώματα που περιλαμβάνουν αυτό το σύμβολο ισχύουν απαράλλακτα για το νέο σύστημα μεγεθών.

Το παραπάνω διατεταγμένο σύνολο πληροί όλα τα καθιερωμένα αξιώματα για τους ΦΑ, αλλά δεν έχει ίδια δομή με αυτούς (δεν είναι ισόμορφο), γιατί εδώ υπάρχουν όροι, όπως ο x και ο 2x, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται άπειροι ενδιάμεσοι, οι x+1, x+2, x+3, …, ενώ μεταξύ δύο ΦΑ υπάρχει πάντα πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων. Τα μέλη του συστήματος αριθμητικών μεγεθών αυτού ονομάσθηκαν αργότερα *υπερακέραιοι (superintegers).*

Με βάση αυτήν την ερμηνεία θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε αυτήν την διάταξη οι παραστάσεις x, x+1, … αποτελούν επέκταση του συνόλου των ΦΑ, είναι διακριτοί μεταξύ τους αλλά υπερπεπερασμένοι (hyper-finite) «αριθμοί», αφού βρίσκονται στην διάταξη αυτή πέρα από τους πεπερασμένους ΦΑ. Έτσι αποτελούν διαφορετικά, διακριτά μεταξύ τους και στατικά είδη απείρου. Ο όρος «άπειρο» χαρακτηρίζει δηλαδή, διαφόρων ειδών μαθηματικά μεγέθη.

Πρέπει να προσέξουμε εδώ ότι οι αριθμοί αυτοί δεν προκύπτουν άμεσα από τα δοσμένα αξιώματα, αλλά ούτε αντίκεινται σε αυτά. Με βάση την εξωφορμαλιστική ερμηνεία αυτού του συμβολισμού μπορούμε επίσης να <u>ορίσουμε</u> το άθροισμα και το γινόμενο τέτοιων μεγεθών με τον εξής τρόπο:

$$f(x)+g(x):=f(x)+g(x)\ ,\ \ f(x)*g(x):=f(x)*g(x)$$

Για παράδειγμα, έτσι θα είναι: $2x+x=3x$ και $x*x=x^2$

Πρέπει να προσέξουμε όμως ότι αυτοί οι κανόνες είναι δικές μας επιλογές, δηλαδή ορισμοί, γιατί ΔΕΝ υπάρχει τρόπος να πάει κανείς x θέσεις πέρα από τον 2x βήμα-βήμα προσθέτοντας κάθε φορά μία μονάδα και να φθάσει το 3x. Αυτό είναι δυνατό μόνο για τους κλασσικούς πεπερασμένους ΦΑ. Π.χ. για να προσθέσουμε 2 στο 3 γράφουμε:

$$3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$$

Πηγαίνουμε έτσι δύο θέσεις πέρα από το 3 και βρισκόμαστε στο 5.

Ο αξιωματικό ορισμός της πρόσθεσης προβλέπει την συνέχιση της ακολουθίας των ΦΑ με προσθήκη κάθε φορά μίας μονάδας. Όμως τα νέα μεγέθη που εισάγουμε στην ακολουθία των ΦΑ μεθερμηνεύοντας το σύμβολο «<» είναι υπερ-πεπερασμένα. Δεν μπορούμε να τα φθάσουμε με διαδοχικές προσθέσεις, αλλά ούτε αντίκεινται στα παραπάνω αξιώματα.

Πρέπει να προσέξουμε ότι η ερμηνεία που μας επιτρέπει την παραπάνω επέκταση γίνεται εξωφορμαλιστικά! Ο φορμαλισμός αποτελεί έναν τυφλό

μηχανισμό που ακολουθεί απλά τους κανόνες που υπαγορεύουν τα αξιώματα χωρίς να τους ερμηνεύει. Λειτουργεί, δηλαδή, σαν το εσωτερικό ενός οχήματος με κλειστά παράθυρα: Μπορεί να ξέρουμε τα πάντα για το τι συμβαίνει μέσα στο όχημα, αλλά αν δεν κοιτάξουμε έξω, δεν ξέρουμε που βρισκόμαστε και τι υπάρχει γύρω από το όχημα.

Έτσι και ο φορμαλισμός μας επιτρέπει να παράγουμε όσες φορμαλιστικές προτάσεις θέλουμε, αλλά αδυνατεί να αντιδιαστείλει τα μεγέθη που χρησιμοποιεί. Μόνο αν ανέβουμε κατά ένα επίπεδο και εξετάσουμε τα αντικείμενα του φορμαλισμού ως «σύνολα» μπορούμε να διαπιστώσουμε, όπως έκανε ο Skolem, βλέπουμε ότι υπάρχουν ριζικά διαφορετικά σύνολα που ικανοποιούν τα ίδια αξιώματα και αληθεύουν για όλες τις προτάσεις που παράγει ο φορμαλισμός.

Είναι επίσης προφανές ότι δεν αλλάζει τίποτα ακόμα και αν στο αρχικό σύστημα αξιωμάτων (θεμελιωδών παραδοχών) για τους ΦΑ προσθέσουμε και άλλα, γιατί τα μεγέθη που κατασκευάσθηκαν έχουν μόνο ΦΑ ως τιμές και θα επαληθεύουν οποιαδήποτε πρόταση ισχύει για ΦΑ. Ότι κάνουν οι ΦΑ το κάνουν και τα Διατεταγμένα Πολυώνυμα Φυσικών Αριθμών (ΔΠ), γιατί τελικά οι τιμές τους είναι μόνο φυσικοί αριθμοί. Όμως, ότι κάνουν τα διατεταγμένα πολυώνυμα δεν είναι δεδομένο ότι θα το κάνουν και οι ΦΑ γιατί είναι άλλη η δομή τους. Υπάρχουν, όπως είδαμε, ιδιότητες των ΔΠ που δεν τις έχουν οι ΦΑ.
Ο Skolem έδειξε μάλιστα ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε και πολύ ευρύτερα σύνολα μεγεθών που να ικανοποιούν τα ίδια αξιώματα. Σύμφωνα με ένα θεώρημα του Skolem από το 1935, ακόμα και ένα (αριθμήσιμα) άπειρο σύστημα αξιωμάτων δεν μπορεί να ορίσει μονοσήμαντα τους φυσικούς αριθμούς.

Εδώ πρέπει όμως να σημειώσουμε και μίαν ιδιότητα που διακρίνει το παραδοσιακό σύνολο των πεπερασμένων ΦΑ από άλλα σύνολα που ικανοποιούν τα αξιώματα του Peano: Σύμφωνα με ένα θεώρημα του Stanley Tennenbaum (1959) στα μη συμβατικά μοντέλα της Αριθμητικής δεν είναι πάντα δυνατός ο υπολογισμός αθροισμάτων και γινομένων μεταξύ δύο μεγεθών ενός τέτοιου συνόλου [3]. Έτσι οι παραδοσιακοί ΦΑ ξεχωρίζουν ως το μόνο σύνολο που επιτρέπει την εκτέλεση τέτοιων πράξεων πάντοτε. Στους παραπάνω ορισμούς αθροίσματος και γινομένου πολυωνύμων οι πράξεις γίνονται μόνο στους συντελεστές. Δεν μπορούμε να προσθέσουμε x στο x+1 πηγαίνοντας x θέσεις πιο πέρα, όπως κάνουμε για τους συνήθεις ΦΑ.

Η διαπίστωση της φορμαλιστικής πολυσημαντότητας των Φυσικών Αριθμών προβληματίζει πολλούς γιατί είναι αντίθετη στην επιδίωξη να ξέρουμε γιατί μιλάμε. Ενδόμυχα θέλουμε να πιστεύουμε ότι οι έννοιες είναι μονοσήμαντες, ώστε η επικοινωνία μεταξύ μας να είναι ξεκάθαρη. Κατά βάθος αναζητούμε κάτι που το λέμε «απόλυτη αλήθεια».

Επιδιώκοντας την μονοσημαντότητα στο προκείμενο σύνολο των Φυσικών αριθμών κάποιοι ερευνητές της Λογικής οδηγήθηκαν στην αποδοχή μίας, πιο γενικής από την συνήθη, φορμαλιστικής Λογικής που λέγεται «Κατηγορηματική Λογική Δεύτερης Βαθμίδας» (ΛΔΒ) ή «Δευτεροβάθμια Κατηγορηματική Λογική». Αυτή εγγυάται, πράγματι, την φορμαλιστική μονοσημαντότητα του συνόλου των Φυσικών Αριθμών και αποκαθιστά έτσι το αίσθημα ασφαλούς καθορισμού των νοημάτων τουλάχιστον στο πεδίο των ακεραίων αριθμών. Όμως η λογική αυτή είναι, όπως θα δείξουμε στο

Παράρτημα 2, «παράλογη», γιατί αδυνατεί να εκπληρώσει τον βασικό προορισμό κάθε λογικής, την δυνατότητα λογικού ελέγχου της ισχύος των προτάσεων που υποβάλλονται στην κρίση της.

Η απόδειξη τέτοιων αποτελεσμάτων γίνεται, βέβαια, φορμαλιστικά και με μεγάλη προσοχή. Όμως εδώ θα υιοθετήσουμε μίαν πιο εποπτική τεκμηρίωσή τους που βασίζεται στην Θεωρία Συνόλων. Θα περιγράψουμε, λοιπόν, στο Παράρτημα 1 κάποια στοιχειώδη αποτελέσματα της θεωρίας αυτής σχετικά με Απειροσύνολα. Με βάση αυτά θα επιδιώξουμε μετά να εξηγήσουμε στο Παράρτημα 2 γιατί η φορμαλιστική επέκταση της λογικής καταλήγει σε ερμηνευτικά αδιέξοδα.

## Πως σχετίζονται αυτά με την λεγόμενη Τεχνητή Ευφυία;

Παρά τις αντιρρήσεις σημαντικών διανοητών όπως ο Friedrich Nietzsche και ο Ludwig Wittgenstein (στην ύστερη περίοδό του)[2] υπάρχει ακόμα σε πολλούς η αντίληψη ότι το εννοιακό μας σύστημα μπορεί να καθοριστεί πλήρως φορμαλιστικά και έτσι να γίνει κατανοητό από έναν Η/Υ. Μυθιστορήματα ή κινηματογραφικά έργα που θεωρούν ότι η μνήμη ενός ανθρώπου μπορεί να αποθηκευτεί ψηφιακά στην μνήμη ενός Η/Υ βασίζονται ουσιαστικά σε αυτήν την πλάνη. Όμως, ο μόνος τρόπος να καταγράψει και να επεξεργαστεί κανείς πληροφορίες σε έναν Η/Υ είναι συμβολικά, δηλαδή φορμαλιστικά. Η εντύπωση ότι οι έννοιες καθορίζονται από κατάλληλους ορισμούς και επομένως μπορούν να καταχωρηθούν φορμαλιστικά δημιουργείται, προφανώς, από την ύπαρξη Εννοιολογικών και Εγκυκλοπαιδικών Λεξικών. Όμως, η εμπειρική γνώση που καταγράφουμε στην μνήμη μας όσο ζούμε είναι συνήθως άγραφη και μη λεκτικά μεταφράσιμη γιατί βασίζεται σε άμεση εμπειρία. Προσπαθήστε για παράδειγμα, να περιγράψετε όλες τις κινήσεις ενός ποδηλάτη, καθώς και την εκάστοτε στάση με την οποία ισορροπεί σε δύο ρόδες. Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο. Γι' αυτό μαθαίνουμε την χρήση ποδηλάτου με άμεση εμπειρία και όχι διαβάζοντας κατάλληλα εγχειρίδια ποδηλασίας. Ακόμα πιο στοιχειωδώς, ξέρουμε ασυνείδητα ότι μία πατάτα ή ένα πιάτο μπορεί να χρησιμεύσουν και ως βλήματα, ενώ ένα σπασμένο πιάτο για να κόψουμε ή να ξύσουμε. Αυτά δεν αναφέρονται πουθενά στον ορισμό της πατάτας και του πιάτου. Πέρα από το λεξικογραφικό υπάρχει

---

[2] Nietzsche: «Περί Αλήθειας και Ψεύδους ως προς το Εξω-Ηθικό τους Νόημα» ('On Truth and Falsity in their Extra-Moral Sense', 1873) p.4/9: "Τι είναι λοιπόν η αλήθεια; Μία κινητή στρατιά μεταφορών, μετωνυμιών, και ανθρωπομορφισμών— εν ολίγοις, ένα άθροισμα ανθρωπίνων σχέσεων που έχουν αναβαθμιστεί, μετατεθεί, και εξωραϊσθεί ποιητικά και ρητορικά και οι οποίες μετά από μακρά χρήση φαίνονται στους ανθρώπους σταθερές, κανονικές και υποχρεωτικές. Οι αλήθειες είναι αυταπάτες για τις οποίες έχει ξεχάσει κανείς τι είναι, μεταφορές που έχουν παραφορεθεί και δεν έχουν αισθητική αξία, νομίσματα που έχουν χάσει τις εικόνες τους και μετρούν τώρα μόνο ως μέταλλο και όχι πια ως νομίσματα»
Wikipedia: Wittgenstein: Στις *Φιλοσοφικές Έρευνες (Philosophical Investigations),* δημοσιευμένες σε δύο μέρη το 1953, ο Wittgenstein προτρέπει τον αναγνώστη να σκέπτεται την γλώσσα ως μία πολλαπλότητα γλωσσικών παιχνιδιών μέσα στα οποία τμήματα της γλώσσας αναπτύσσονται και λειτουργούν. Επιχειρηματολογεί ότι τα φιλοσοφικά προβλήματα είναι σαγηνεύσεις που προκύπτουν από τις πεπλανημένες προσπάθειες των φιλοσόφων να θεωρούν το νόημα των εννοιών ανεξάρτητα από τα συμφραζόμενα, την χρήση, και την γραμματική, κάτι που ονόμαζε «γλώσσα που έχει πάει για διακοπές».

και ένα συνειρμικό περιεχόμενο της έννοιας κάθε αντικειμένου. Αυτό σχετίζεται με όλες τις δυνατές αλληλουχίες που μπορεί να έχει το αντικείμενο με όλα τα άλλα αντικείμενα του περιβάλλοντός μας και μαθαίνεται μόνο εμπειρικά.

Ας εξετάσουμε, όμως την εμβέλεια και τις δυνατότητες των φορμαλιστικών συστημάτων που αναφέροται στους Φυσικούς Αριθμούς (ΦΑ), τους μη αρνητικούς ακεραίους.

Η μελέτη αυτών των συστημάτων έδειξε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών ΔΕΝ είναι δυνατό να καθοριστεί φορμαλιστικά με μονοσήμαντο τρόπο παρά μόνο με μίαν απαίτηση που βρίσκεται εκτός του αξιωματικού συστήματος: το να είναι πάντα εκτελέσιμες (να έχουν συγκεκριμένο αποτέλεσμα) η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός (Tennenbaum).

Αν η γνώση του Η/Υ περιορίζεται στα καθιερωμένα αξιώματα τότε δεν ξέρει τι μεγέθη παράγει. Η γνώση ότι οι αριθμητικές πράξεις του είναι πάντα δυνατές δεν προκύπτει από αυτά τα αξιώματα αλλά από την εξω-αριθμητική μελέτη της δομής του των μοντέλων, των συνόλων μεγεθών που ικανοποιούν αυτά τα αξιώματα. Έτσι απέδειξε ο Tennenbaum το θεώρημά του. Ένας Η/Υ δεν έχει, δηλαδή, βαθύτερη κατανόηση του τι κάνει εκτός αν του δοθούν προγραμματιστικά εξω-αριθμητικοί κανόνες αξιολόγησης δομών.

Εδώ υπάρχει ίσως μία αντίρρηση:

Ο Η/Υ παράγει ούτως ή άλλως μόνο «κλασσικούς ΦΑ»! ΔΕΝ τον απασχολεί το τι άλλο σύστημα αριθμών είναι φορμαλιστικά εφικτό!

Αν, όμως, θέλουμε ο Η/Υ να εξετάζει την δομή τέτοιων συστημάτων τότε πρέπει να τον εφοδιάσουμε με το κατάλληλο φορμαλιστικό εργαλείο για να μελετά ιδιότητες του φορμαλιστικού συστήματος που παράγει τους ΦΑ και όχι μόνο ίδιους τους ΦΑ. Αυτό το εργαλείο λέγεται Δευτεροβάθμια Κατηγορηματική Λογική, και μελετάει ιδιότητες ιδιοτήτων, δηλαδή κατηγορίες ιδιοτήτων. Αυτή η Λογική θα πρέπει να συνδυαστεί με ένα αξιωματικό σύστημα που να τυποποιεί την μελέτη αλγεβρικών δομών ώστε να κάνει παρόμοιες διαπιστώσεις σαν αυτές που κάναμε παραπάνω. Θα κάνει τότε αυτό που ονομάσθηκε «Μεταμαθηματικά». Ένα πλήρες τέτοιο σύστημα αξιωμάτων δεν έχει ακόμα κατασκευασθεί.

Τι δυνατότητες και αδυναμίες έχει η Δευτεροβάθμια Αριθμητική, δηλαδή η Αριθμητική που βασίζεται σε Δευτεροβάθμια Λογική;

## Τα θεωρήματα των Löwenheim - Skolem, και Gödel

Τα θεωρήματα του Skolem, που αναφέραμε, θεωρούν ότι η Αριθμητική «χτίζεται» με την πιο περιορισμένης εμβέλειας Κατηγορηματική Λογική Πρώτης Βαθμίδας. Εντούτοις, όπως αναφέραμε ήδη, η Λογικής Δεύτερης βαθμίδας δεν είναι τόσο αποδεκτή ως εργαλείο, γιατί δεν έχει την βασική ιδιότητα που απαιτούμε από κάθε Λογική: την δυνατότητα ελέγχου προτάσεων που θα υποβάλλουμε στην κρίση της.

Υπάρχει όμως και ένα άλλο θεώρημα της μαθηματικής λογικής, που ανατρέπει την αίσθηση ότι ξέρουμε τι είναι ΦΑ είναι το Θεώρημα Μη Πληρότητας του Kurt Gödel, που ισχύει για όλα τα είδη φορμαλιστικής λογικής.

Το θεώρημα αυτό λέει ότι, όσες θεμελιώδεις παραδοχές (αξιώματα) και αν κάνουμε για τους φυσικούς αριθμούς, υπάρχουν πάντοτε προτάσεις της

Αριθμητικής που ούτε να αποδείξουμε ούτε να απορρίψουμε μπορούμε. Μας δείχνει μάλιστα πώς να κατασκευάζουμε τέτοιες προτάσεις, που ονομάζονται «μη αποκρίσιμες» ή «μη αποφάνσιμες»

Τι είδους είναι αυτές οι προτάσεις;

Για παράδειγμα, μία τέτοια μη αποκρίσιμη πρόταση μπορεί να είναι του τύπου: Κάποιο συγκεκριμένο πολυώνυμο πολλών μεταβλητών p(x,y,…) με ακέραιους συντελεστές *δεν* μηδενίζεται για καμία ακέραιη τιμή των x,y,….. [4].

Το θεώρημα όμως αυτό του Gödel αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο οι ΦΑ να είναι ένα μονοσήμαντο σύνολο έστω και με άπειρες μη αποδείξιμες ιδιότητες. Οι ΦΑ ίσως υπάρχουν κάπως σε έναν Πλατωνικό κόσμο των ιδεών.

Δεν ξέρουμε, λοιπόν, τελικά τι είναι ΦΑ ή δεν μπορούμε να το καθορίσουμε με βάση έναν πεπερασμένο αριθμό από θεμελιακές τους ιδιότητές τους (αξιώματα).

Θα πείτε τώρα, βέβαια:

Ούτε ο άνθρωπος δεν καταλαβαίνει, επομένως, γιατί μιλάει και βρίσκεται στην ίδια μοίρα με τον Η/Υ.

Αυτό είναι εν μέρει αλήθεια! Ούτε ο άνθρωπος διαθέτει λογικές ιδιότητες των εννοιών που να τις καθορίζουν μονοσήμαντα. Όμως ο άνθρωπος καθορίζει τις έννοιες όχι λογικά, αλλά χρηστικά (αισθησεοκινητικά), δηλαδή μέσα από την συνήθως άδηλη (δηλαδή υποσυνείδητη) συνειρμική γνώση του για το πώς μπορεί να χρησιμοποιεί τα διάφορα αντικείμενα. Για παράδειγμα, οι πρώτοι δέκα φυσικοί αριθμοί καθορίζονται, ουσιαστικά, από την αντιστοιχία τους με τα δάκτυλα των χεριών. Με αυτόν τον τρόπο μαθαίνουμε να μετράμε και όχι αποστηθίζοντας κάποιες ιδιότητες των ΦΑ.

Συνήθως ο άνθρωπος ισχυρίζεται ότι κατανοεί αυτές τις έννοιες με μίαν παράξενη ιδιότητα του νου, που την αποκαλεί «διαίσθηση». Έτσι, ακόμα και πολλοί λογικο-θεωρητικοί θεωρούν ότι οι ΦΑ 1, 2, 3, … είναι «διαισθητικά» καθορισμένοι έστω και αν αποδεικνύεται ότι αυτοί δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν μονοσήμαντα με φορμαλιστικά αξιώματα (Αυτό πίστευε μάλιστα και ο ίδιος ο Gödel).

Ο άνθρωπος δεν διαθέτει καλύτερους λογικούς ορισμούς των εννοιών και ειδικότερα των ΦΑ, αλλά εγγράφει και χειρίζεται, δηλαδή κατανοεί, τις έννοιες εμπειρικά ως διαδικασίες. Ελάχιστοι γνωρίζουν ακριβώς τα αξιώματα της Αριθμοθεωρίας που ανάγονται στον Peano (1889). Όμως αυτό δεν μας δυσκολεύει στο να κάνουμε κάθε είδους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας αυτόματα και υποσυνείδητα εμπειρικά συλλογιστικά σχήματα συμβατά με αυτά τα αξιώματα, αλλά και με πολλές άλλες ιδιότητες των φυσικών αριθμών που θεωρούμε δεδομένες.

Η μονοσημαντότητα των ΦΑ <u>δεν</u> μας χρειάζεται για να αποδείξουμε οποιαδήποτε θεωρήματα της Αριθμοθεωρίας. Όλα τα γνωστά θεωρήματά της ισχύουν μάλιστα και για τα νέα συστήματα μεγεθών που εφευρίσκουμε προσθέτοντας και νέα αξιώματα στα ήδη καθιερωμένα. <u>Δεν</u> υπάρχει εμπόδιο στην διεξαγωγή φορμαλιστικών αποδείξεων!!!

Όμως οι φορμαλιστικές αποδείξεις είναι σε δεύτερο στάδιο σηματικές για μας. Ο τρόπος με τον οποίο «ανακαλύπτουμε» νέες ιδιότητες των ΦΑ πριν τις αποδείξουμε δεν είναι φορμαλιστικός. Είναι μάλλον «διαισθητικός» (ότι και αν είναι αυτό). Για παράδειγμα, κανένας φορμαλισμός δεν υπαγορεύει την εικασία του Goldbach (1742), μία φαινομενικά απλή ιδιότητα των ΦΑ που είναι ακόμα

μετά από 275 χρόνια αναπόδεικτη. Η εικασία αυτή λέει ότι κάθε άρτιος αριθμός: 2, 4, 6, 8, … είναι άθροισμα δύο «πρώτων» αριθμών, δηλαδή κάποιων από τους: 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … , που δεν έχουν άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό τους και την μονάδα.

Πως ανακαλύπτουμε νέες ιδιότητες των ΦΑ;

Συχνά με παρατήρηση γεωμετρικών ή συμβολικών - αλγεβρικών μορφών. Π.χ. η γεωμετρική παρατήρηση της τριγωνικής διάταξης σημείων δίδαξε ήδη τους Πυθαγόρειους ότι το άθροισμα της αριθμητικής προόδου «περιττών αριθμών» είναι πάντα τέλειο τετράγωνο. Περιττοί αριθμοί λέγονται όσοι δεν διαιρούνται δια 2, δηλαδή έχουν την μορφή 2ν+1, όπου ν φυσικός αριθμός. Έτσι έχουμε:

$1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$, $1+3+5+7+9=25=5^2$, …[3]

Εξάλλου, καθαρά εποπτική (οπτικο-κινητική) είναι και η αποδιδόμενη στον Πυθαγόρα απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Βλέπε [5].

Ο φορμαλισμός μας δίνει μεν την δυνατότητα αυστηρής λογικής διατύπωσης μίας απόδειξης αλλά δεν μας δείχνει πως να την βρούμε. Αυτό είναι κάτι που ενδέχεται να το καταφέρουμε εκμεταλλευόμενοι κυρίως την αίσθησή μας για συμμετρία διαφόρων αλγεβρικών ή γεωμετρικών μορφών και την εποπτική ή και κινητική μας αντίληψη για διάφορα μεγέθη. Π.χ., σε γεωμετρικές αποδείξεις είναι σχεδόν πάντα απαραίτητο να φανταστούμε βοηθητικές ευθείες ή κύκλους που μας αποκαλύπτουν διάφορες αρχικά αφανείς ιδιότητες του σχήματος που μελετούμε.[4]

## Σε τι διαφέρει η ανθρώπινη σκέψη από την επεξεργασία συμβόλων που κάνει ο Η/Υ. Γιατί ένα ρομπότ δεν μπορεί να σκεφθεί σαν άνθρωπος;

Υπάρχουν πράγματι εντυπωσιακές επιτυχίες της Τεχνητής Ευφυίας σε πλήρως ελεγχόμενα περιβάλλοντα, δηλαδή περιβάλλοντα διαμορφωμένα έτσι ώστε να περιγράφονται επαρκώς για τις ανάγκες μας σε μία συμβολική γλώσσα χρησιμοποιούμενη από τον υπολογιστή. Όμως, καμία μαθηματική τεχνική επεξεργασίας πληροφοριών δεν θα παραγάγει ποτέ ένα «ευφυές» ρομπότ ικανό να συλλάβει τις εγγενείς αλλά άδηλες αφανείς και απροσδόκητες δυνατότητες που ενυπάρχουν σε ένα μη ελεγχόμενο περιβάλλον και στα αντικείμενα που βρίσκονται σ' αυτό (Non-declarative, latent, imperceptible, unconventional properties of objects).

Ο λόγος είναι απλός. Δεν καταγράφουμε στην μνήμη μας έννοιες και ιδιότητες των αντικειμένων ως λογικές ιδιότητες αλλά ως διαδικασίες αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον μας. Για παράδειγμα, όταν μας λείπει ένα σφυρί αναζητούμε σχεδόν άμεσα και χωρίς εκτενή λογική ανάλυση ένα βαρύ, συμπαγές αντικείμενο, π.χ. μία πέτρα, ή και ένα σταχτοδοχείο για να το

---

[3] Αυτό αποδεικνύεται στην συνέχεια με την βοήθεια του αξιώματος επαγωγής και της σχέσης:

$$v^2+(2v+1)=(v+1)^2$$

[4] Εξάλλου, η οπτικοκινητική μας αντίληψη των μορφών και φορμαλιστικών εκφράσεων μπορεί να μας αποκαλύψει ακόμα και την δυνατότητα δημιουργίας νέων μεγεθών πέρα από αυτά που περιγράφει ο φορμαλισμός μας. Π.χ. τους αρνητικούς ακεραίους, τα κλάσματα, τους άρρητους και τους μιγαδικούς αριθμούς. Η περιγραφή και μελέτη αυτών των μεγεθών πηγαίνει πολύ πέρα από ότι επιτρέπει ο αρχικός μας φορμαλισμός. Δεν ανακαλύπτουμε μόνο νέες αποδείξεις αλλά ακόμα και ολόκληρες νέες περιοχές φορμαλισμών.

χρησιμοποιήσουμε ως υποκατάστατο, και όταν μας λείπει ένα σκουπάκι μπορεί να χρησιμοποιήσουμε μίαν εφημερίδα ή ένα περιοδικό για να διώξουμε ψίχουλα από την επιφάνεια ενός τραπεζιού. Από ποιόν λογικό ορισμό της πέτρας ή της εφημερίδας προκύπτουν τέτοιες χρήσεις; Ένα σπασμένο πιάτο μπορεί να χρησιμεύσει, όπως είπαμε, για να κόψουμε ή να ξύσουμε. Προκύπτει αυτό από τον λογικό ορισμό του πιάτου ή από την εμπειρία;

Στην πραγματικότητα, όλα τα αντικείμενα καταγράφονται νοερά ως ιεραρχίες διαδικασιών αλληλεπίδρασης, που προοδεύουν από το συνειρμικά πιο ανειδίκευτο σχήμα αλληλεπίδρασης προς ειδικότερα. Κάτι συνειρμικά γενικό, δηλ. ανειδίκευτο, δεν είναι όμως οπωσδήποτε και λογικά γενικότερο. Έτσι οι έννοιες «καρυδότσουφλο», «δαχτυλήθρα» και «ποτήρι» έχουν εν μέρει κοινό συνειρμικό περιεχόμενο αν και είναι ασύνδετες λογικά. Τόσο το καρυδότσουφλο όσο και το ποτήρι χαρακτηρίζονται από μία αισθησεοκινητική διαδικασία που αναγνωρίζει κατά προσέγγιση κοίλα αντικείμενα, αντικείμενα που μπορούμε να βάλουμε μέσα τους το δάχτυλό μας. Η διαφοροποίηση αυτών των αντικειμένων έρχεται στην συνέχεια με πρόσθετες τέτοιες διαδικασίες που διακρίνουν το ένα από το άλλο. Έτσι, ένα πολύ μικρό παιδί μπορεί χωρίς πολλή σκέψη να χρησιμοποιήσει παίζοντας ένα καρυδότσουφλο ως υποκατάστατο ποτηριού.

Για να αντιληφθούμε τα πράγματα με τον τρόπο που το κάνουμε πρέπει να συγκεντρώσουμε σταδιακά και για μία μεγάλη περίοδο χρόνου όλο και πιο εξειδικευμένες εμπειρίες αλληλεπίδρασης με τα αντικείμενα. Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά μαθαίνουν να χειρίζονται αντικείμενα.

Ειδικότερα, όπως τεκμηρίωσαν πειραματικά οι Peter Wasson και Phillip Johnson-Laird, για να αξιολογήσουμε μίαν κατάσταση, πρέπει να δημιουργήσουμε στον νου μας ένα Νοερό Μοντέλο ή ένα σενάριο αυτής της κατάστασης, και να το «παίξουμε» για να ιδούμε που οδηγεί. Έτσι, οι εγγενείς και άδηλες ιδιότητες όλων των αντικειμένων εγγράφονται στον νου μας συνειρμικά.

## Κατά πόσο μπορεί αυτού του είδους η σκέψη να αναπαραχθεί από Η/Υ;

Αν θεωρούμε αφελώς ότι όλα τα αντικείμενα του περιβάλλοντος και όλες οι ενέργειές μας αντιστοιχούν με λέξεις ή λεκτικές περιγραφές, τότε για κάθε λέξη μπορούμε να ορίσουμε ως κωδικό έναν φυσικό αριθμό.

Αν διδάξουμε, λοιπόν, έναν Η/Υ ή καλύτερα ένα ρομπότ γραμματική και συντακτική ανάλυση των προτάσεων μπορούμε ίσως να τους διδάξουμε και το πως να αξιολογούν καταστάσεις όπως εμείς;

Όχι! Μπορούμε να τους διδάξουμε το πως να ακολουθούν εντολές με βάση μίαν στοιχειώδη απεικόνιση του περιβάλλοντος αλλά δεν μπορούμε να τα διδάξουμε τις εγγενείς, άδηλες και όχι άμεσα εμφανείς ιδιότητες των αντικειμένων που τα περιβάλλουν. Κάθε νέο και μη αναγνωρίσιμο αντικείμενο που θα μπαίνει στο οπτικό τους πεδίο θα τα φέρνει σε σύγχυση. Ακόμα και η αναγνώριση ήδη γνωστών τους αντικειμένων από άλλην οπτική γωνία θα τους είναι εξαιρετικά δύσκολη. Καμίας έκτασης φορμαλιστική κωδικοποίηση δεν

μπορεί να συλλάβει τις ιδιότητες των αντικειμένων (και διαδικασιών) σε σχέση μεταξύ τους, δηλαδή τις ιδιότητες καθενός σε σχέση με όλα τα άλλα.[5]

Η αδυναμία απομίμησης της ανθρώπινης σκέψης από ρομπότ δεν έχει σχέση, λοιπόν με την μονοσημαντότητα ή μη του αριθμητικού κώδικα που χρησιμοποιούν για την γλώσσα, αλλά με την έλλειψη εξοικείωσης με τις άδηλες ιδιότητες των αντικειμένων, ιδιαίτερα κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ τους και με το περιβάλλον τους.[6]

Τα «ευφυή ρομπότ» ή «σκεπτόμενα ρομπότ» θα πρέπει, λοιπόν, να μάθουν να περιεργάζονται το περιβάλλον δημιουργώντας κατάλληλους συνειρμούς, και να τους εγγράφουν στην μνήμη τους ως ιεραρχίες αισθησεοκινητικών διαδικασιών. Σε δεύτερο στάδιο θα πρέπει να διδαχθούν και ονόματα για τα συνειρμικά σχήματα που έχουν διαμορφώσει, δηλαδή, μία γλώσσα απομνημόνευσης και επικοινωνίας.

Θα πρέπει, λοιπόν, να εκπαιδεύουμε το ρομπότ όπως εκπαιδεύουμε ένα μικρό παιδί. Υπάρχει όμως εδώ μία θεμελιώδης δυσκολία. Η εξερεύνηση του περιβάλλοντος από τον άνθρωπο δεν γίνεται με χαώδη και άναρχο τρόπο, αλλά κατευθύνεται από κίνητρα, π.χ., το ένστικτο επιβίωσης. Τα «σκεπτόμενα ρομπότ» πρέπει λοιπόν να αποκτήσουν κίνητρα παρόμοια με των ανθρώπων. Δεν αρκεί μία εντολή «δοκίμασέ τα όλα», γιατί πρέπει και να αξιολογούνται οι εμπειρίες που αποκτώνται. Ο άνθρωπος δεν συσσωρεύει τυχαία εμπειρίες, αλλά τις αξιολογεί και τις κατατάσσει ανάλογα με την αξία τους για την βιολογική επιβίωση και τον έλεγχο του περιβάλλοντος που του επιτρέπουν. Γι' αυτό, όπως και όλα τα θηλαστικά, έχει και μία στενή σχέση με τους γονείς του από τους οποίους διδάσκεται πως να διακρίνει και το ουσιώδες από το επουσιώδες μαζί με την γλώσσα που διευκολύνει την επικοινωνία του με αυτούς. Το ρομπότ δεν έχει κατ' αρχήν κίνητρα αξιολόγησης και ιεράρχησης των εμπειριών. Τα «σκεπτόμενα ρομπότ» πρέπει λοιπόν να αποκτήσουν κίνητρα παρόμοια με των ανθρώπων και ίσως να έχουν και στενή σχέση με κάποιον εκπαιδευτή. Τότε όμως θα είναι τελικά ανεξάρτητα από τις επιθυμίες μας και η συμπεριφορά τους θα είναι τόσο απρόβλεπτη όσο και η συμπεριφορά, οι αντιδράσεις των συνανθρώπων μας.

## Παράρτημα 1 : Τι είναι μη αριθμήσιμο σύνολο; Υπάρχουν διαφορετικά είδη απείρου;

Η επαναστατική ανακάλυψη που έκανε το 1874 ο Georg Cantor είναι ότι *υπάρχουν διαφορετικά είδη απείρου*. Συγκεκριμένα, απέδειξε με έναν απλό και ιδιοφυή τρόπο, ότι οι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος από 0 ως 1 υπερβαίνουν σε πλήθος τους φυσικούς αριθμούς.

Αυτό το κατάφερε με «εις άτοπον απαγωγή»:

Έστω ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό από το διάστημα μεταξύ 0 και 1, δηλαδή σε κάθε δεκαδικό αριθμό με ακέραιο μέρος 0, όπως ο 0,3241597683…, αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός. Τότε μπορούμε να γράψουμε όλους τους

[5] No amount of formal encoding can capture the properties of objects (and processes) relative to each other.

[6]

αυτούς τους πραγματικούς σε έναν πίνακα με την σειρά της αντιστοιχίας τους προς του ΦΑ:

$1 \leftrightarrow 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots.$

$2 \leftrightarrow 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots.$

…

$v \leftrightarrow 0,a_{v1}a_{v2}a_{v3}\ldots.$

…

όπου $a_{vκ}$ είναι το κ δεκαδικό ψηφίο του νιοστού πραγματικού αριθμού (ο $a_{vκ}$ είναι, δηλαδή, ένας ακέραιος από 0 ως 9).

Υποτίθεται ότι όλοι οι πραγματικοί του διαστήματος από το 0 ως το 1 θα έπρεπε να βρίσκονται σε αυτόν τον πίνακα. Εντούτοις, υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος αυτού που δεν περιλαμβάνονται σε αυτόν.

Κάθε αριθμός β της μορφής: $0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ όπου $\beta_1 \neq a_{11}$, $\beta_2 \neq a_{22}$, $\beta_3 \neq a_{33},\ldots$, δηλαδή $\beta_κ \neq a_{κκ}$, <u>δεν</u> ανήκει στον πίνακα, γιατί διαφέρει ως προς κάποιο ψηφίο του από κάθε δεκαδικό αριθμό που βρίσκεται στον πίνακα. Διαφέρει από τον πρώτο στο πρώτο του ψηφίο, από τον δεύτερο στο δεύτερό του ψηφίο, και γενικά από τον κ δεκαδικό του πίνακα διαφέρει στο κ ψηφίο του.

Για παράδειγμα, έστω ότι ο παραπάνω πίνακας αντιστοιχίας έχει την μορφή

$1 \leftrightarrow 0,\underline{1}35791113\ldots.$

$2 \leftrightarrow 0,2\underline{4}68101214\ldots.$

$3 \leftrightarrow 0,32\underline{8}2131415\ldots.$

$4 \leftrightarrow 0,432\underline{7}2531415\ldots.$

…

Ο αριθμός β θα μπορούσε εδώ να έχει αρχικά ψηφία 0,2546... που διαφέρουν από αυτά που υπογραμμίζονται στον παραπάνω πίνακα. Το πρώτο διαφέρει από το πρώτο ψηφίο του 0,135... Το δεύτερο διαφέρει από το δεύτερο ψηφίο του 0,246... Το τρίτο διαφέρει από το τρίτο ψηφίο του 0,328... κ.ο.κ. Είναι, δηλαδή, $\beta_1 \neq 1$, $\beta_2 \neq 4$, $\beta_3 \neq 3$, $\beta_4 \neq 7,\ldots$. Κάθε τέτοιος πραγματικός αριθμός *δεν* μπορεί να ανήκει στον παραπάνω πίνακα.

Έτσι, το σύνολο των πραγματικών αριθμών του διαστήματος από 0 ως 1 έχει οπωσδήποτε πολύ μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από το σύνολο **N** των φυσικών αριθμών.

Η απόδειξη ότι το σύνολο **Δ** των υποσυνόλων των ΦΑ είναι μη αριθμήσιμο είναι παρόμοια:

Έστω ότι σε κάθε υποσύνολο των ΦΑ όπως το {0, 3, 24, 15, 9, 176, 283…}, αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός. Τότε μπορούμε να γράψουμε όλα αυτά τα σύνολα σε έναν πίνακα με την σειρά της αντιστοιχίας τους προς του ΦΑ:

$1 \leftrightarrow \{a_{11}, a_{12}, a_{13},\ldots\}$

$2 \leftrightarrow \{a_{21}, a_{22}, a_{23},\ldots\}$

…

$v \leftrightarrow \{a_{v1}, a_{v2}, a_{v3},\ldots.\}$

…

όπου $a_{vκ}$ είναι ο κ όρος του νιοστού υποσυνόλου (ο $a_{vκ}$ είναι, δηλαδή, κάποιος ακέραιος θετικός αριθμός).

Υποτίθεται ότι όλα τα σύνολα φυσικών αριθμών θα έπρεπε να βρίσκονται σε αυτόν τον πίνακα. Εντούτοις, υπάρχουν άπειρα τέτοια σύνολα, που δεν περιλαμβάνονται σε αυτόν.

Κάθε σύνολο της μορφής: $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\}$ όπου $\beta_1 \neq a_{11}$, $\beta_2 \neq a_{22}$, $\beta_3 \neq a_{33}, \ldots$, δηλαδή $\beta_k \neq a_{kk}$, δεν ανήκει στον πίνακα, γιατί διαφέρει ως προς κάποιο στοιχείο (δηλ. όρο) του από κάθε σύνολο που βρίσκεται στον πίνακα. Διαφέρει από το πρώτο σύνολο κατά το πρώτο του στοιχείο, από το δεύτερο κατά το δεύτερό του στοιχείο, και γενικά από το k σύνολο του πίνακα διαφέρει κατά το κ στοιχείο του. Έτσι, το σύνολο **Δ** των υποσυνόλων των ΦΑ, το λεγόμενο Δυναμοσύνολο των ΦΑ, έχει οπωσδήποτε μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από το σύνολο **N** των φυσικών αριθμών.

## Γιατί το πλήθος των ιδιοτήτων των Φυσικών Αριθμών είναι μη αριθμήσιμο

Τώρα μπορούμε να ιδούμε και γιατί το πλήθος των ιδιοτήτων των ΦΑ είναι μη αριθμήσιμο:

Από την άποψη της Συνολοθεωρίας μπορούμε να αντιστοιχήσουμε κάθε ιδιότητα κάποιων ΦΑ με το πλήθος των ΦΑ που έχουν αυτήν την ιδιότητα. Έτσι, π.χ. η ιδιότητα «τετράγωνο ενός ΦΑ» αντιστοιχεί με το σύνολο των τετραγώνων των ΦΑ: {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, …}. Το ίδιο σύνολο αντιστοιχεί, όμως, και στην ιδιότητα (κατηγόρημα) «άθροισμα διαδοχικών περιττών ΦΑ» (Βλ. σελ.8).[7]

Αυτό σημαίνει, βέβαια, ότι κάθε υποσύνολο των ΦΑ αντιστοιχεί σε τουλάχιστον μίαν ιδιότητά τους. Έτσι το σύνολο των ιδιοτήτων τους είναι τουλάχιστον ισοπληθές με το σύνολο **Δ** των υποσυνόλων τους, που είναι μη αριθμήσιμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Τα Διατεταγμένα Πολυώνυμα του Skolem αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο έστω και αν δεν ταυτίζονται με τους κλασσικούς ΦΑ.

## Γιατί τα Διατεταγμένα Πολυώνυμα του Skolem αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο

Το σύνολο των διατεταγμένων πολυωνύμων του Skolem, αν και δεν είναι ισόμορφο με τους ΦΑ, είναι εντούτοις αριθμήσιμο, γιατί μπορούμε να το γράψουμε στην μορφή:

$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$

$< x < x+1 < x+2 < \ldots$

$< x^2 < x^2+1 < x^2+2 < \ldots$

$< x^3 < x^3+1 < x^3+2 < \ldots$

[7] Άλλο παράδειγμα για το πως κατηγορήματα καθορίζονται από ένα σύνολο ΦΑ είναι το ακόλουθο: Η σχέση «μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου» ικανοποιείται από το σύνολο (3,4,5). Όμως, (3,4,5) είναι και οι διαιρέτες του 60 ή γενικότερα διαιρέτες του 120, του 180, … Είναι επίσης διαδοχικοί ΦΑ. Υπάρχουν, λοιπόν, περισσότερες από μία ιδιότητες ή σχέσεις (relations) ή κατηγορήματα που χαρακτηρίζουν το ίδιο σύνολο αριθμών. Από την άλλη πλευρά, έκτος από την ιδιότητα «διαιρέτες του 60», οι υπόλοιπες σχέσεις του παραδείγματος ικανοποιούνται και από άλλους ΦΑ. Υπάρχουν, λοιπόν, πολλαπλές αντιστοιχίες μεταξύ συνόλων αριθμητικών σχέσεων (δηλαδή αριθμητικών ιδιοτήτων ή αριθμητικών κατηγορημάτων) και υποσυνόλων των ΦΑ.

$<x^4<x^4+1<x^4+2<\ldots$
και να το αναδιατάξουμε στην διάταξη: (1),(2, x),(3, x+1, $x^2$),(4, x+2, $x^2$+1, $x^3$),… που ακολουθεί τις διαδοχικές αντιδιαγώνιες (τις διαγώνιες που πηγαίνουν από πάνω δεξιά προς κάτω αριστερά). Σε αυτήν την τελευταία διάταξη μπορούμε να αντιστοιχήσουμε τους όρους αυτού του συνόλου αμφι-μονοσήμαντα προς τους φυσικούς αριθμούς.
Εντούτοις, μπορεί να δειχτεί ότι στα πλαίσια του ίδιου φορμαλισμού (δηλαδή της Αριθμοθεωρίας με Κατηγορηματική Λογική Πρώτης Βαθμίδος) υπάρχουν και ΜΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΑ σύνολα μεγεθών που ικανοποιούν τα ίδια αξιώματα αλλά και όλες τις δυνατές επεκτάσεις αυτού του αξιωματικού συστήματος.

## Παράρτημα 2: Η Λογική Δεύτερης Βαθμίδας και οι αδυναμίες της

Τα θεωρήματα των Löwenheim, Skolem και Gödel, προβλημάτισαν πολύ όσους θέλουν να αναγάγουν την σκέψη σε κάποιο φορμαλισμό, είτε είναι λογικο-θεωρητικοί είτε ερευνητές της Τεχνητής Ευφυΐας. Κατανοούν, βέβαια, ότι η πολυσημαντότητα των φορμαλιστικών αξιωματικών συστημάτων ισχύει εξίσου για τον ανθρώπινο, όσο και για έναν τεχνητό εγκέφαλο. Δεν τους απασχολεί, όμως, το ερώτημα αν και γιατί ο ανθρώπινος νους έχει μίαν πιο σαφή «διαισθητική» αντίληψη των φυσικών αριθμών. Δεν μπορούν να δεχθούν την ύπαρξη νοημάτων που δεν επιδέχονται πλήρη φορμαλιστική περιγραφή. Σύστημα εννοιών, που να είναι ενδεχομένως μη μηχανικά αναπαράξιμο, δεν μπορούν να διανοηθούν ίσως γιατί ονειρεύονται έναν μελλοντικό θρίαμβο της μηχανικής αναπαραγωγής της σκέψης, της λεγόμενης «Τεχνητής Νοημοσύνης».

Έτσι, πολλοί από αυτούς οδηγήθηκαν στην χρήση ενός συστήματος φορμαλιστικής λογικής, που πράγματι αποκλείει την πολυσημαντότητα των φυσικών αριθμών. Αυτή η λογική, η λεγόμενη Κατηγορηματική Λογική Δευτέρας Βαθμίδας, έχει, όμως, πολλές και μεγάλες εγγενείς αδυναμίες που θα τις περιγράψουμε παρακάτω.
Είναι μία «παράλογη» λογική!

Ας δούμε, λοιπόν, σύντομα τι επιδιώκει και τι προσφέρει η Φορμαλιστική (ή Συμβολική) Λογική. Αρχικός στόχος της Φορμαλιστικής Λογικής ήταν η απαλλαγή των συλλογισμών μας από τις εγγενείς αμφισημίες της γλώσσας. Η αντικατάσταση των λέξεων με σύμβολα θα επέτρεπε την επίλυση όλων των διαφωνιών, όπως ήλπιζε ήδη ο Leibniz τον 17ο αιώνα. Η επιδίωξη αναγωγής όλης της Λογικής σε φορμαλισμό προωθήθηκε πολύ κατά τον 19ο αιώνα από τους George Boole και Gotlob Frege.

Η παραπέρα πρόοδος της Μαθηματικής Λογικής κατά τον 20ο αιώνα οδήγησε όμως σε μίαν παράξενη κατάσταση: Οι φορμαλιστικές διατυπώσεις της λογικής δεν συμπίπτουν με αυτό που θα ονομάζαμε κοινή λογική. Ειδικότερα, καμία παραλλαγή της καθιερωμένης κατηγορηματικής λογικής δεν έχει όλες τις ιδιότητες που θα επιθυμούσαμε να έχει ένα ασφαλές σύστημα συμπερασματολογίας. Επί πλέον, δεν φαίνεται να υπάρχει ένα τέτοιο σύστημα. Έτσι, είμαστε αναγκασμένοι να συμβιβασθούμε με φορμαλιστικά συστήματα που είτε μας οδηγούν σε απροσδόκητους νέους κόσμους αντικειμένων της σκέψης (όπως είναι τα λεγόμενα «Μη Συμβατικά Συστήματα

Αριθμών», non-standard number systems), είτε καθορίζουν μεν ακριβώς αυτό που εννοούμε, αλλά μας οδηγούν σε έναν κόσμο ανασφαλών συμπερασμάτων και αβεβαιότητας ως προς την ισχύ των προτάσεών της. Ειδικότερα, τα θεωρήματα των Löwenheim και Skolem μας λένε ότι, αν χρησιμοποιήσουμε το βασικό πλήρες[8] σύστημα λογικής, την πρωτοβάθμια (κατηγορηματική) λογική, τότε δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς τι είναι οι φυσικοί αριθμοί. Υπάρχουν άπειρα ριζικά διαφορετικά μεταξύ τους συστήματα μεγεθών που ικανοποιούν όλες τις θεμελιώδεις παραδοχές της Αριθμητικής (διαφέρουν είτε κατά το πλήθος είτε κατά την διάταξη των στοιχείων τους). Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει μάλιστα ακόμα και όταν στα γνωστά αξιώματα της Αριθμοθεωρίας προσθέσουμε οσαδήποτε άλλα θελήσουμε.

Αυτό το συμπέρασμα μπορούμε, λοιπόν, να το αποφύγουμε μόνο αν πάρουμε ως θεμέλιο μία πιο απαιτητική λογική, την λεγόμενη δευτεροβάθμια λογική (ΛΔΒ). Όμως, η λογική αυτή έχει την «παράλογη» ιδιότητα ότι, αντίθετα με την πρωτοβάθμια λογική, δεν διαθέτει τρόπο απόρριψης των εσφαλμένων προτάσεων που θα υποβληθούν στην κρίση της. Πέρα από αυτό, όμως, παράγει τύπους που δεν έχουν νόημα. Δεν ισχύουν για κανένα σύστημα μεγεθών, δηλαδή για καμία ερμηνεία (επονομαζόμενη «μοντέλο») των φορμαλιστικών εκφράσεων. Αυτές τις αδυναμίες της τις εκφράζουμε συγκεκαλυμμένα και πιο κομψά λέγοντας ότι «για την Λογική Δευτέρας Βαθμίδος η συντακτική (=φορμαλιστική) και η σημασιολογική αλήθεια δεν συμπίπτουν».

## Η σχέση της Αριθμοθεωρίας 2ης Βαθμίδας (ΑΔΒ) με την σημασιολογία

Για να διεξαγάγουμε φορμαλιστικές αποδείξεις αριθμητικών προτάσεων είναι απαραίτητο να συμπεριλάβουμε στα φορμαλιστικά αξιώματα της Αριθμητικής και τα αξιώματα μίας κατάλληλης Φορμαλιστικής Λογικής, που θα επιτρέπει την παραγωγή νέων προτάσεων «χωρίς λόγια», δηλαδή μόνο με σύμβολα. Έτσι θα αποφύγουμε, όπως είπαμε, διφορούμενες λεκτικές εκφράσεις.

Μιλούμε για Αριθμοθεωρία Πρώτης Βαθμίδας όταν ενσωματώνουμε το σύνηθες  το σύστημα αξιωμάτων της Αριθμοθεωρίας στα αξιώματα της Λογικής Πρώτης Βαθμίδας που αναφέρεται σε ιδιότητες (κατηγορήματα) νοερών αντικειμένων, ενώ αν το ενσωματώσουμε (κατάλληλα προσαρμοσμένο) στο σύστημα  αξιωμάτων της Λογικής Δεύτερης Βαθμίδας που αναφέρεται σε ιδιότητες ιδιοτήτων (σε σύνολα ιδιοτήτων) μιλούμε για Αριθμοθεωρία Δεύτερης Βαθμίδας.

Η επιδίωξη δημιουργίας μίας φορμαλιστικής θεωρίας του νοήματος των φυσικών αριθμών (ΦΑ), που θα μπορούσε να είναι μέρος μίας γενικότερης θεωρίας νοήματος, έχει, λοιπόν, καταλήξει ύστερα από έρευνες ενός αιώνα στο ακόλουθο αδιέξοδο:

Η ΑΠΒ (Αριθμοθεωρία Πρώτης Βαθμίδας) είναι μεν ένα σύστημα διεξαγωγής και επαλήθευσης αποδείξεων, αλλά δεν προσδιορίζει μονοσήμαντα

[8] Πλήρες σύστημα αξιωμάτων ονομάζεται ένα σύστημα το οποίο επιτρέπει την φορμαλιστική απόρριψη μη εκπληρώσιμων προτάσεων.

τα αντικείμενα στα οποία αναφέρεται. Υπάρχουν ριζικά διαφορετικές ερμηνείες, ριζικά διαφορετικά μοντέλα, που ικανοποιούν αυτό το φορμαλιστικό σύστημα. Αυτό ισχύει, μάλιστα, ακόμα και αν προσθέσουμε οσεσδήποτε θελήσουμε πρόσθετες θεμελιώδεις παραδοχές (αξιώματα).

Αυτήν την πολυσημαντότητα την αποφεύγει η ΑΔΒ, που ορίζει μονοσήμαντα (μέχρι ισομορφίας) τα αντικείμενα στα οποία αναφέρεται. Όμως η ΑΔΒ δεν διαθέτει αποτελεσματικά αποδεικτικά εργαλεία πέρα από αυτά της ΑΠΒ και δεν μπορεί γενικά να ελέγξει την ορθότητα μίας δοσμένης απόδειξης.

Απώτερος σκοπός της χρήσης της ΑΔΒ ήταν να θεμελιωθεί μία φορμαλιστική σημασιολογία των ΦΑ, δηλαδή να ορισθούν μονοσήμαντα τα αντικείμενα των αριθμητικών συλλογισμών, άρα τουλάχιστον της αριθμητικής σκέψης. Όμως αυτό εξαγοράζεται με αδυναμία ελέγχου των αποδείξεων και με αναντιστοιχία συντακτικά παραγόμενων τύπων με το σημασιολογικά αληθείς προτάσεις δηλαδή προτάσεις που επαληθεύονται για κάποιο είδος (ή «μοντέλο») αριθμητικών μεγεθών.

Η σημασιολογία βασίζεται εδώ στην ύπαρξη ή μη κάποιου νοερού μοντέλου που να ικανοποιεί, να εκπληρώνει, έναν τύπο που παράγεται στα πλαίσια του φορμαλισμού. Ένα τέτοιο μοντέλο συνήθως αναφέρεται σε αριθμητικές ή ποσοτικές εκφράσεις ή σε σύνολα αντικειμένων.

## Γιατί συμβαίνουν αυτά;

Η βασικότερη διαφορά μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας φορμαλιστικής Αριθμητικής είναι η μορφή που παίρνει το λεγόμενο «Αξίωμα Επαγωγής». Το αξίωμα αυτό είναι το βασικό εργαλείο για την απόδειξη κάποιας σχέσης για όλους τους φυσικούς αριθμούς (ΦΑ). Με απλά λόγια, λέει ότι αν κάποια σχέση ισχύει για το 1 και από την ισχύ της για τον τυχόντα αριθμό k έπεται η ισχύς της και για τον επόμενό του, k+1, τότε η σχέση αυτή ισχύει για όλους τους ΦΑ.

Στην Αριθμητική 1$^{ης}$ βαθμίδας το αξίωμα επαγωγής δεν είναι ένας τύπος, αλλά στην πραγματικότητα ένας τύπος για κάθε φορμαλιστική πρόταση, φ, που μπορούμε να κατασκευάσουμε, δηλαδή να την εκφράσουμε συμβολικά με τέτοιον τρόπο ώστε να μπορεί να υπολογιστεί για κάθε δοσμένο φυσικό αριθμό. Γι' αυτό λέγεται, όχι αξίωμα, αλλά «αξιωματικό σχήμα». Αντίθετα, στην δευτεροβάθμια φορμαλιστική Αριθμητική αναφέρεται σε οποιαδήποτε κατηγορήματα (ιδιότητες), P, *άσχετα* με το αν μπορούμε να τα κατασκευάσουμε με τον φορμαλισμό μας ή όχι!

Αυτό όμως έχει σημαντικές συνέπειες για το όλο σύστημα. Όταν προσπαθούμε να ερμηνεύσουμε το δευτεροβάθμιο αξίωμα επαγωγής, πρέπει να προσδιορίσουμε σε ποια κατηγορήματα P αναφέρεται ο όρος «Για όλα τα P», που υπάρχει εκεί (όπου το P συμβολίζει κάποια ιδιότητα των ΦΑ). Δηλαδή, πρέπει να ορίσουμε το σύμπαν των κατηγορημάτων, P, που αναφέρονται σε ΦΑ. Αν επιλέξουμε το σύμπαν αυτό να αποτελείται από όλα τα δυνατά κατηγορήματα (όλες τις δυνατές σχέσεις), τότε σύμφωνα με την συνολοθεωρητική ερμηνεία του τι είναι ιδιότητες (κατηγορήματα) των ΦΑ, το πλήθος τους είναι «μη αριθμήσιμο» όπως οι πραγματικοί αριθμοί μεταξύ 0 και 1 (βλέπε παράρτημα 1).

Δεν υπάρχει τρόπος να τους γράψουμε όλους με κάποια σειρά. Αλλά ένα μη αριθμήσιμο σύνολο ιδιοτήτων των ΦΑ είναι εξαιρετικά προβληματικό. Δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος να ελέγξουμε αν ένας τύπος ισχύει ή όχι. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν μπορούμε να διατάξουμε το σύνολο αυτό σε μίαν σειρά και να την διατρέξουμε ελέγχοντας αν υπάρχει π.χ. ιδιότητα (κατηγόρημα) των ΦΑ που να επαληθεύει μίαν εξεταζόμενη φορμαλιστική πρόταση. Πρέπει να διατρέξω όλες τις ιδιότητες P των ΦΑ. Αλλά αυτό δεν μπορώ να το κάνω συστηματικά, γιατί το πλήθος τους είναι μη αριθμήσιμο. Είμαι στην ίδια θέση όπως αν ήθελα να διατρέξω (π.χ., να γράψω) *όλους* τους πραγματικούς αριθμούς (ΠΑ) μεταξύ 0 και 1. Δεν υπάρχει τρόπος να το κάνω αυτό γιατί, αν τους γράψω ή διατρέξω με κάποια σειρά αυτομάτως δημιουργώ μία αντιστοιχία τους ένα-προς-ένα με τους φυσικούς αριθμούς. Ο πρώτος ΠΑ θα αντιστοιχεί στο 1, ο δεύτερος ΠΑ θα αντιστοιχεί στο 2, κ.ο.κ. Όμως, το πλήθος των πραγματικών αριθμών μεταξύ 0 και 1 είναι πολύ μεγαλύτερο από το πλήθος των φυσικών αριθμών (βλέπε παράρτημα 1).
Όταν γράφω φορμαλιστικά ότι υπάρχει ιδιότητα (κατηγόρημα) P των ΦΑ για την οποία ισχύει κάποια πρόταση G, τότε πρέπει πάλι να διατρέξω όλα τα κατηγορήματα P για να βρω αν υπάρχει κατηγόρημα με την ιδιότητα G ή όχι. Και πάλι δεν μπορώ να κάνω την αναζήτηση συστηματικά.

Εδώ είναι κατά βάθος η βασική αδυναμία της δευτεροβάθμιας λογικής και της Αριθμοθεωρίας που θεμελιώνεται πάνω σε αυτήν. Έτσι έχουμε μονοσημαντότητα των ΦΑ στην Αριθμητική 2ης βαθμίδας, αλλά μόνο με αντιστάθμισμα την παραδοχή ενός ασύλληπτου και μη κατασκευάσιμου συνόλου ιδιοτήτων τους. Αν περιορίσουμε το σύμπαν των κατηγορημάτων σε ένα αριθμήσιμο και κατασκευάσιμο σύνολο, τότε έχουμε πάλι μη συμβατικά μοντέλα.

Η Αριθμητική 2ης Βαθμίδας είναι, δηλαδή, αναγκαστικά μη πλήρης, όχι απλά γιατί ο φορμαλισμός της αδυνατεί να συντάξει κατάλληλες φορμαλιστικές αποδείξεις, αλλά γιατί οι περισσότερες από τις σχέσεις της δεν είναι κατασκευάσιμες. Δεν υπάρχει συστηματικά (αλγοριθμικά) κατασκευάσιμο σύνολο που να τις ορίζει.

### Η βαθύτερη αιτία της φορμαλιστικής απροσδιοριστίας των φυσικών αριθμών

Αυτή είναι ότι όλα τα δυνατά αριθμητικά κατηγορήματα (ιδιότητες) είναι σύμφωνα με την συνολοθεωρητική τους ερμηνεία ΜΗ ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΑ. Επομένως είναι μη αριθμήσιμες και οι προτάσεις που αναφέρονται σε σχέσεις αυτών των κατηγορημάτων (ιδιοτήτων). Αντιθέτως, όλες οι δυνατές πεπερασμένου μήκους συμβολικές παραστάσεις που παράγονται από αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων είναι ΜΟΝΟ ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΕΣ, γιατί μπορούν να διαταχθούν «λεξικογραφικά»[9] Έτσι, όλες οι στοιχειώδεις παραστάσεις που

[9] Πολύ απλά, μπορούμε να δώσουμε σε όλα τα σύμβολα ενιαίο συμβολισμό σ1, σ2, σ3, σ4, … Στην συνέχεια, μπορούμε να απαριθμήσουμε όλες τις αλυσίδες ορισμένου μήκους (με ορισμένο πλήθος συμβόλων) διατάσσοντάς τες κατά την σειρά μεγέθους της αλυσίδας των δεικτών τους, όπου για διαχωρισμό των δεικτών χρησιμοποιούμε το ψηφίο 0 που παραλείψαμε στον ενιαίο συμβολισμό. Π.χ. η συμβολοσειρά σ1σ3σ15σ1σ2 θα έχει τον σύνθετο δείκτη 1030150102. Έτσι όλες οι συμβολοσειρές συγκεκριμένου μήκους, n, θα διαταχθούν με την σειρά μεγέθους των συνθέτων δεικτών τους.

προκύπτουν από μίαν φορμαλιστική πρόταση σε συνδυασμό με τα δοσμένα αξιώματα μπορούν να παραχθούν συστηματικά μία προς μία και να εξετασθεί εκάστοτε αν κάθε μία είναι συμβατή με τις προγενέστερές της ή όχι.

### Τι πρόσθεσαν οι Skolem και Gödel σε αυτήν την παρατήρηση;

Ο Gödel λέει κάτι πιο ειδικό: Ότι για κάθε πεπερασμένο σύστημα φορμαλιστικών αξιωμάτων υπάρχουν ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ φορμαλιστικές εκφράσεις που ούτε να αποδειχθούν, ούτε να απορριφθούν μπορούν!

Από την άλλη πλευρά, ο Skolem λέει κάτι άλλο: Ότι κανένα πεπερασμένο (ή αριθμήσιμα άπειρο) σύστημα αξιωμάτων δεν επαρκεί για να χαρακτηρίσει μονοσήμαντα το σύνολο των ΦΑ. Υπάρχουν πάντα και άλλα σύνολα *Υπερακέραιων* (τόσο αριθμήσιμα όσο και μη αριθμήσιμα) που ικανοποιούν αυτά τα αξιώματα. Αυτό αφήνει ανοικτή την δυνατότητα να διακριθούν μεταξύ τους τέτοια σύνολα αριθμών με προσθήκη αξιωμάτων που ισχύουν για το ένα αλλά όχι για το άλλο!

### Συνοψίζοντας μπορούμε, λοιπόν, να πούμε τα εξής:

**<u>Ερώτηση</u>**: Γιατί δεν μπορεί η Αριθμητική 2ης Βαθμίδας να ελέγξει τις προτάσεις που υποβάλλονται στην κρίση της;

**<u>Απάντηση</u>**: Γιατί το πλήθος των δυνατών κατηγορημάτων είναι ΜΗ αριθμήσιμο. Δεν μπορεί να τα διατρέξει όλα συστηματικά ελέγχοντας αν υπάρχει κάποιο που να ικανοποιεί μία πρόταση του τύπου ∃P[…] (υπάρχει κατηγόρημα P τέτοιο ώστε…) ή αν ενδεχομένως όλα ικανοποιούν μία πρόταση του τύπου ∀P[…] (για όλα τα κατηγορήματα P ισχύει …).

**<u>Ερώτηση</u>**: Γιατί αποκλείει η ΑΔΒ όλα τα μοντέλα αριθμητικού συστήματος εκτός από το κλασσικό;

**<u>Απάντηση</u>**: Γιατί απαιτεί να ισχύουν οι τύποι και για το κλασσικό μοντέλο, δηλαδή για το κατηγόρημα Φ που αντιστοιχεί στο σύνολο **N**={0,1,2,3,4,…,∞} μόνο των κλασσικών Φυσικών Αριθμών. Αυτό προκύπτει από το διευρυμένο αξίωμα επαγωγής:

$$\forall P\big(\big(0 \in P \& \forall \mathrm{k}(\mathrm{k} \in \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{k}+1 \in \mathrm{P})\big) \rightarrow \forall \mathrm{n}(\mathrm{n} \in \mathrm{P})\big)$$

Αν το εφαρμόσουμε αρχικά στο σύνολο S των διατεταγμένων πολυωνύμων του Skolem (δηλ. με P+S) βλέπουμε ότι όλα τα επιτρεπόμενα από τον φορμαλισμό στοιχεία («αριθμοί») είναι στοιχεία του S. Αν όμως το εφαρμόσουμε ειδικά στο κατηγόρημα Φ, δηλαδή για P=Φ. Μας λέει τότε ότι για όλα τα n ισχύει ότι $\mathrm{n} \in \Phi$, δηλαδή ότι από τον φορμαλισμό επιτρέπονται μόνο οι κλασικοί ΦΑ. Εφαρμογή σε πεπερασμένα σύνολα π.χ. το {1,2,3} δεν είναι δυνατή, γιατί προϋποθέτει μίαν ατέρμονα διαδοχή μεγεθών.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι αποκλείονται όλες οι επεκτάσεις του αριθμητικού συστήματος που επιτρέπει η Αριθμητικής 1ης βαθμίδας. Για παράδειγμα, με βάση το αξίωμα θα πρέπει όλα τα στοιχεία του συνόλου S του Skolem να ανήκουν στο Φ, πράγμα που καταφανώς δεν ισχύει. Προσέξτε ότι και το σύνολο S του Skolem παράγεται εξω-φορμαλιστικά.

**<u>Ερώτηση</u>**: Που χωλαίνει το υπερ-πεπερασμένο μοντέλο αριθμητικού συστήματος της Αριθμητικής Πρώτης Βαθμίδας που δημιουργεί ο Skolem;

<u>Απάντηση</u>: Στο ότι η μαθηματική επαγωγή ΔΕΝ μπορεί να υπερβεί το φράγμα απροσδιοριστίας της αρχής των υπερπεπερασμένων αριθμών. Μόλις φθάσουμε στα x, x+1, x+2,… δεν ισχύει η διαιρετότητα (παρά μόνο ως διαιρετότητα πολυωνύμων). Δεν μπορούμε καν να πούμε ότι οι x, x+1, x+2 είναι είτε άρτιοι είτε περιττοί αριθμοί. Εδώ εννοείται, βέβαια, ότι κατ' αρχήν θα επεκτείνουμε το αριθμητικό σύστημα ορίζοντας πράξεις όπως η αφαίρεση και η διαίρεση.