# Σχετικά με την Μη-Χαρακτηρισιμότητα της Ακολουθίας των Αριθμών μέσω πεπερασμένου ή αριθμήσιμα άπειρου Πλήθους προτάσεων με αποκλειστικά αριθμητικές μεταβλητές

**Thoralf Skolem (Bergen, Norwegen)**

Über die nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen.

*Fundamenta mathematicae*, 23, 1934, 150-161.

Μία σχολιασμένη μετάφραση από τον Ι.Β.Κιουστελίδη με εκσυγχρονισμό του λογικού συμβολισμού. [1]

Η ακολουθία των ακεραίων θετικών αριθμών θα ονομάζεται **N**. Ας είναι δεδομένο ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο σύνολο **Π** αληθών προτάσεων σχετικά με τους όρους της **N**. Αυτές οι προτάσεις έχουν έναν *«πυρήνα»,* που σχηματίζεται με σύζευξη [συμβολικά A&B], διάζευξη [A¤B], και άρνηση [~A] εξισώσεων [f=g] ή σχέσεων μικρότερου [f<g] μεταξύ αριθμητικών συναρτήσεων. Εδώ *«αριθμητική συνάρτηση»* σημαίνει μία συνάρτηση πεπερασμένου πλήθους μεταβλητών, τέτοια ώστε η **N** είναι το σύνολο τιμών τόσο των μεταβλητών όσο και της συνάρτησης. Στην πλέον γενική περίπτωση προκύπτει η πλήρης πρόταση από τον πυρήνα με ποσοτικοποίηση των μεταβλητών, δηλ. με εφαρμογή των «όλα» (**"**) ή «υπάρχει» (**$**).

Κατ' αρχήν θα εξετάσω, όμως, την ιδιαίτερα απλή περίπτωση όπου πριν από τον πυρήνα υπάρχουν μόνο καθολικοί ποσοδείκτες. Τότε μπορεί κανείς παραλείποντας τους καθολικούς ποσοδείκτες να γράψει την πρόταση με «πραγματικές» ή «ελεύθερες» μεταβλητές, με το να πει ότι ο πυρήνας ισχύει για *τυχαίες* τιμές των μεταβλητών. Μία τέτοια πρόταση με ελεύθερες μεταβλητές την ονομάζω *τύπο* και θεωρώ κατ' αρχήν ότι το **Π** είναι ένα σύνολο μόνο από τύπους. Παραδείγματα τύπων είναι:

x¤y=y¤x, x¤(y¤z)=(x¤y)¤z, x&y=y&x, x&(y&z)=(x&y)&z,
x&(y¤z)=x&y¤x&z, (x<y) ¤(x=y) ¤(x>y), (x∫y)¤(x¤z=y¤z)&(x&z=y&z)
(x∫y)¤(z∫u)¤(x¤z=y¤u)&(x&z=y&u)

[Schr] Οι δύο τελευταίοι τύποι μπορούν να γραφτούν με την βοήθεια του συμβόλου συνεπαγωγής '**Ø**' και ως εξής:

(x=y) **Ø** (x¤z=y¤z)&(x&z=y&z)
(x=y)&(z=u) **Ø** (x¤z=y¤u)&(x&z=y&u)

[Schr].

Οι αριθμητικές συναρτήσεις, που εμφανίζονται στις προτάσεις που ανήκουν στο **Π** αποτελούν ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο σύνολο M.

Αν τα μη εκ ταυτότητος μηδενικά πολυώνυμα πεπερασμένου πλήθους μεταβλητών με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές δεν εμφανίζονται ήδη

[1] [Η μετάφραση έγινε για ιδία χρήση και κυρίως για εκσυγχρονισμό του λογικού συμβολισμού. Φράσεις μέσα σε αγκύλες '[ ]' είναι ερμηνευτικά σχόλια του μεταφραστή. Με έγχρωμο φόντο έχουν τονισθεί ουσιώδη σημεία. '[Schr]' σημαίνει παράλειψη κειμένου που αναφέρεται σε επεξήγηση του διφορούμενου συμβολισμού του Schröder, που καταργείται εδώ.]

στο M μπορούν να προστεθούν. Έτσι παίρνει κανείς ένα σύνολο συναρτήσεων M′, που είναι αριθμήσιμα άπειρο.

Αν το M′ δεν είναι ήδη κλειστό ως προς παντοειδείς αντικαταστάσεις μπορεί με σταδιακή διεξαγωγή όλων των δυνατών αντικαταστάσεων να επεκταθεί σε ένα σύνολο **M** που είναι κατ' αυτόν τον τρόπο κλειστό.

Όπως διαπιστώνεται εύκολα, θα είναι και το **M** αριθμήσιμα άπειρο. Οι συναρτήσεις μίας μεταβλητής που υπάρχουν στο **M** σχηματίζουν ένα σύνολο $\mathbf{M_1}$ .[2] Τα στοιχεία του $\mathbf{M_1}$ έστω ότι είναι:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

Όπως έχω αποδείξει παλαιότερα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

*Θεώρημα1. Αν είναι $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... μία τυχαία ακολουθία συναρτήσεων, τότε υπάρχει μία μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση g(x), τέτοια ώστε, για κάθε ζεύγος (i, j) υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $t_{i,j}$ τέτοιος ώστε για όλα τα t> $t_{i,j}$ είτε παραμένει είναι πάντα:*

$$f_i(g(t))<f_j(g(t)),\ \text{είτε}\ f_i(g(t))=f_j(g(t)),\ \text{είτε}\ f_i(g(t))>f_j(g(t)).$$

*Απόδειξη:* Θα αποδείξω εδώ το θεώρημα με έναν, ίσως πιο εποπτικό, ελαφρά αλλαγμένο τρόπο.

Προτάσσω την παρατήρηση ότι, αν είναι $f_1(t)$ και $f_2(t)$ δύο τυχαίες αριθμητικές συναρτήσεις, τότε υπάρχει μία μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση g(t) τέτοια ώστε για όλα τα t ισχύει μεταξύ $f_1g(t)$ και $f_2g(t)$ η ίδια σχέση, <, =, ή >. Γιατί τα στοιχεία t του **N** μοιράζονται σε τρεις κατηγορίες αναλόγως του αν είναι $f_1(t) < f_2(t)$, $f_1(t) = f_2(t)$, ή $f_1(t) > f_2(t)$ και σε τουλάχιστον μία από αυτές τις κατηγορίες πρέπει να υπάρχει άπειρο πλήθος αριθμών. Αυτοί οι άπειροι αριθμοί μπορούν όμως να παρασταθούν ως τιμές μίας μονοτόνως αύξουσας συνάρτησης g(t), για t=1,2,3,....

Εξετάζουμε τώρα τις άπειρες συναρτήσεις $f_1$ , $f_2$, ... του $\mathbf{M_1}$. Εδώ μπορούμε να διατάξουμε τα ζεύγη (i,j), i<j, όλων των δεικτών σε μίαν απλά άπειρη ακολουθία, για παράδειγμα, έτσι ώστε να τα διατάξουμε πρώτα κατά αύξουσες τιμές των i+j και αυτούς με το ίδιο άθροισμα i+j κατά αύξουσες τιμές του i. Έτσι παίρνουμε την ακολουθία:

---

[2] Το ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων $\mathbf{M_1}$ μπορεί να επεκταθεί με την εκτέλεση όλων των δυνατών αντικαταστάσεων σε ένα αριθμήσιμο σύνολο $\mathbf{M_\omega}$ που είναι κλειστό ως προς αντικαταστάσεις αποδεικνύεται εύκολα ως εξής: Για κάθε συνάρτηση στο $\mathbf{M_1}$ υπάρχει προφανώς μόνο ένα αριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων που προκύπτουν από συναρτήσεις στο $\mathbf{M_1}$ με μία μόνο αντικατάσταση μέσα σε αυτές. Επομένως, σχηματίζουν όλες οι νέες συναρτήσεις μαζί με αυτές του $\mathbf{M_1}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων $\mathbf{M_2}$. Αν σχηματισθούν από αυτό πάλι όλες οι συναρτήσεις που σχηματίζονται με μία μοναδική αντικατάσταση τότε δίνουν οι όλες οι νέες συναρτήσεις που υπάρχουν μεταξύ τους μαζί με τις συναρτήσεις στο $\mathbf{M_2}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο $\mathbf{M_3}$. Κατά τον ίδιο τρόπο παίρνει κανείς παραπέρα τα αριθμήσιμα σύνολα $\mathbf{M_4}$, $\mathbf{M_5}$, .... Έστω ότι $\mathbf{M_\omega}$ είναι η ένωση όλως των $\mathbf{M_n}$. Τότε είναι, ως γνωστό, και το $\mathbf{M_\omega}$ αριθμήσιμο. Από την άλλη πλευρά είναι το $\mathbf{M_\omega}$ ένα κλειστό σύνολο σε σχέση με αντικαταστάσεις. Έστω, δηλαδή, ότι $F(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ είναι μία συνάρτηση από το $\mathbf{M_\omega}$ και ας αντικατασταθούν στην θέση μερικών από τα x ή και όλων συναρτήσεις $F_1$, $F_2$, ... που ανήκουν στο $\mathbf{M_\omega}$. Τότε εμφανίζονται οι F, $F_1$, $F_2$, ... ήδη στα $\mathbf{M_n}$ , $\mathbf{M_{n1}}$ , $\mathbf{M_{n2}}$, και επομένως όλες στο $\mathbf{M_m}$ , όπου είναι m = max(n,n1,n2, ...). Τότε εμφανίζεται όμως η συνάρτηση που προκύπτει από την αντικατάσταση ήδη στο $\mathbf{M_{m+1}}$ άρα σίγουρα στο $\mathbf{M_\omega}$.

(1) (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(1,5),(2,4),(1,6),(2,5),(3,4),(1,7),…

Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, υπάρχει μία μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση $g_1(t)$ τέτοια ώστε για όλα τα t ισχύει

$$f_1g_1(t)\ B_1\ f_2g_1(t),$$

όπου $B_1$ σημαίνει ένα από τα σύμβολα <, =, >. Παρομοίως υπάρχει, σύμφωνα με την ίδια παρατήρηση, αν αντικαταστήσουμε σε αυτήν τις $f_1$ και $f_2$ με $f_1g_1$ και $f_3g_1$, μία μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση $g_2(t)$ τέτοια, ώστε για όλα τα t ισχύει

$$f_1g_1g_2(t)\ B_2\ f_3g_1g_2(t)$$

όπου $B_2$ σημαίνει πάλι ένα από τα σύμβολα <, =, >. Στην συνέχεια παίρνουμε, σύμφωνα με την ίδια παρατήρηση, αν αντικατασταθούν σε αυτήν οι $f_1$ και $f_2$ με $f_1g_1g_2$ και $f_4g_1g_2$, ότι υπάρχει μία μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση $g_3(t)$ τέτοια, ώστε για όλα τα t ισχύει

$$f_1g_1g_2g_3(t)\ B_3\ f_4g_1g_2g_3(t)$$

όπου $B_3$ σημαίνει ένα από τα σύμβολα <, =, >. Την επόμενη φορά παίρνουμε με τον ίδιο τρόπο

$$f_2g_1g_2g_3g_4(t)\ B_4\ f_3g_1g_2g_3g_4(t)$$

κ.ο.κ. Τώρα βάζω για όλα τα n

$$g_1\ g_2\ \ldots g_n(n) = g(n)$$

και ισχυρίζομαι ότι, αν είναι (i,j) το ζεύγος τάξεως n στην ακολουθία (1), τότε ισχύει για όλα τα $t \geq n$ η σχέση:

(2) $$f_ig(t)\ B_n\ f_jg(t)$$

Γιατί για όλα τα t είναι

(3) $$f_ig_1g_2 \ldots g_n(t)\ B_n\ f_jg_1g_2 \ldots g_n(t)$$

Αν βάλουμε εδώ ειδικά t=n, παίρνει

(4) $$f_ig(n)\ B_n\ f_jg(n)$$

Αν βάλουμε στην (3) $g_{n+1}\ g_{n+2}\ \ldots g_{n+h}(t)$ στην θέση του t αναγνωρίζουμε ότι για όλα τα t ισχύει

$$f_ig_1g_2 \ldots g_{n+h}(t)\ B_n\ f_jg_1g_2 \ldots g_{n+h}(t)$$

και αν βάλουμε ειδικά t=n+h παίρνουμε

(5) $$f_ig(n+h)\ B_n\ f_jg(n+h)$$

Λόγω των (4) και (5) ισχύει η (2) για όλα τα $t \geq n$, όπως ισχυρισθήκαμε. Φυσικά είναι η g(t) μονοτόνως αύξουσα, γιατί ισχύει

$$g(n+1)= g_1g_2 \ldots g_ng_{n+1}(n+1) > g_1g_2 \ldots g_n(n) = g(n)$$

αν παρατηρήσουμε ότι πρέπει να είναι $g_{n+1}(n+1)>n$ αφού η $g_{n+1}$ αυξάνεται μονοτόνως. Έτσι αποδείχθηκε το θεώρημα 1. ■

Αυτό το θεώρημα το εφαρμόζουμε τώρα στο σύνολο $\mathbf{M_1}$. Έστω, λοιπόν, ότι η μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση g(t) είναι τέτοια, ώστε, αν είναι $f_i(t)$ και $f_j(t)$ δύο τυχαία στοιχεία του $\mathbf{M_1}$, τότε ισχύει για όλα τα $t>t_{i,j}$ πάντοτε μία σταθερή σχέση μεγέθους μεταξύ των $f_ig(t)$ και $f_jg(t)$. Αυτό το χρησιμοποιώ για να ορίσω μίαν γραμμική διάταξη όλων των στοιχείων του $\mathbf{M_1}$. Αν, δηλαδή, ισχύει για όλα τα $t>t_{i,j}$ η σχέση $f_ig(t)\ B\ f_jg(t)$, όπου B σημαίνει είτε <, είτε =, είτε >, βάζω για τα στοιχεία $f_i$ και $f_j$ του $\mathbf{M_1}$,

$$f_i\ B\ f_j.$$

Το ότι με αυτόν τον τρόπο ορίζεται μία γραμμική διάταξη του $\mathbf{M_1}$, είναι εύκολο να αναγνωρισθεί. Γιατί, σύμφωνα με το αποδειχθέν θεώρημα, ισχύει για κάθε ζεύγος (i ,j) μία και μόνο μία από τις σχέσεις

$$f_i < f_j,\ f_i = f_j,\ f_i > f_j$$

και αναγνωρίζουμε ότι από τις $f_i < f_j$ και $f_j < f_h$ προκύπτει $f_i < f_h$, και παρομοίως προκύπτει $f_i = f_h$, από τις $f_i = f_j$, και $f_i = f_h$ , ενώ οι $f_i > f_j$, και $f_j < f_i$ είναι ταυτόσημες. Όταν έχουμε, για παράδειγμα, $f_i < f_j$ και $f_j < f_h$, αυτό σημαίνει ότι για όλα τα $t>t_{i,j}$ και αντιστοίχως $t>t_{j,h}$ ισχύει

$$f_ig(t) < f_jg(t) \text{ και } f_jg(t) < f_hg(t)$$

και από αυτά προκύπτει ότι για $t> \max(t_{i,j}, t_{j,h})$ είναι

$$f_ig(t) < f_hg(t).$$

Η σταθερή σχέση που προκύπτει για όλα τα $t>t_{i,h}$ μεταξύ $f_ig(t)$ και $f_hg(t)$ είναι, λοιπόν, η σχέση <.

Αυτήν την ακολουθία των στοιχείων του $\mathbf{M_1}$ την ονομάζω $\mathbf{N}^*$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η **N** αποτελεί ένα γνήσια αρχικό κομμάτι της $\mathbf{N}^*$. Γιατί μεταξύ των στοιχείων του $\mathbf{N}^*$ εμφανίζονται επίσης οι «σταθερές», δηλαδή τα στοιχεία του **N**. εκτός τούτου είναι προφανώς $1 \leqq f$, όπου f είναι ένα τυχόν στοιχείο του $\mathbf{N}^*$, και για κάθε στοιχείο f(t) του $\mathbf{N}^*$ υπάρχει ένα αμέσως μεγαλύτερο, δηλαδή το f(t)+1. το ότι είναι f<f+1 στο $\mathbf{N}^*$ είναι άμεσα εμφανές. Αλλά δεν μπορεί κανείς να έχει επίσης f<h<f+1, γιατί αυτό θα σήμαινε, ότι για αρκετά μεγάλα t θα είχαμε fg(t)<hg(t)<fg(t)+1, πράγμα που είναι αδύνατο. Ως εκ τούτου αρχίζει η ακολουθία $\mathbf{N}^*$με τα στοιχεία 1,2,3,... της **N**. Από την άλλη πλευρά είναι το στοιχείο t του $\mathbf{N}^*$, δηλαδή η συνάρτηση f(t)=t προφανώς μεγαλύτερη από κάθε σταθερά, δηλαδή από κάθε στοιχείο του **N**, γιατί η fg(t) = g(t) αυξάνεται, βέβαια, με το t μέχρι το άπειρο. Άρα αποτελεί πράγματι το **N** ένα γνήσιο αρχικό κομμάτι του $\mathbf{N}^*$.

Τώρα μπορούν τα στοιχεία του **M**, που είναι, βέβαια, συναρτήσεις στο **N**, να ορισθούν και ως συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$, και μάλιστα έτσι, ώστε να διατηρούν το νόημά τους στο **N**. Αυτή η διεύρυνση του νοήματος εκείνων των συναρτήσεων προκύπτει, πράγματι, αφ' εαυτής. Δηλαδή, έστω ότι:

(6) $$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

είναι μία τέτοια συνάρτηση. Έστω ότι $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ είναι μεταβλητά στοιχεία του $\mathbf{N}^*$. Κάθε φορά που κάνουμε μίαν ειδική επιλογή για τα $\varphi_1, \ldots,\varphi_n$, έστω $f_1, f_2, \ldots,f_n$, παίρνουμε με αντικατάσταση των $f_1(t), \ldots,f_n(t)$ στην θέση των $x_1,\ldots,x_n$ την συνάρτηση $F(f_1(t), \ldots,f_n(t))$, η οποία ανήκει πάλι στο **M** λόγω της κλειστότητας ως προς αντικαταστάσεις, άρα επίσης στο $\mathbf{M_1}$ αφού εμφανίζεται μόνο μία μεταβλητή t. Αυτό σημαίνει όμως:

Για κάθε επιλογή των τιμών των μεταβλητών $\varphi_1, \ldots,\varphi_n$ από το $\mathbf{N}^*$ παριστάνει η $F(\varphi_1, \ldots,\varphi_n)$ πάλι ένα στοιχείο του $\mathbf{N}^*$. Με αυτόν τον τρόπο έχει ορισθεί η F ως συνάρτηση n μεταβλητών μέσα στο $\mathbf{N}^*$.

Επίσης είναι φανερό ότι αν διαλέξουμε ως $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ n σταθερές, π. χ. τις $a_1, \ldots, a_n$, η $F(a_1, \ldots, a_n)$ παριστάνει πάλι μίαν σταθερά και αυτή η σταθερά είναι η τιμή στο **N** της συνάρτησης $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ για τις τιμές $a_1, \ldots, a_n$ στο **N** των μεταβλητών $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν λοιπόν πράγματι να θεωρηθούν οι συναρτήσεις $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ στο **N** και ως συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$, με διατήρηση του νοήματός τους στο **N**.

*<u>Θεώρημα 2.</u> Αν οι συναρτήσεις του συνόλου* **M** *θεωρηθούν ως συναρτήσεις στο* $\mathbf{N}^*$ *, κάθε τύπος του συνόλου* ***Π*** *παραμένει σε ισχύ μέσα στο* $\mathbf{N}^*$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω ότι δίνεται ένας τυχαίος τύπος *A του συνόλου* **Π**. Είναι κατασκευασμένος με σύζευξη (&), διάζευξη (¤), και άρνηση (~) από σχέσεις

'=' ή '<' [μεταξύ αριθμητικών συναρτήσεων]. Τώρα όμως ισχύει τόσο στο **N** όσο και στο $\mathbf{N}^*$, ότι η άρνηση του x=y μπορεί να γραφτεί ως διάζευξη (x<y)¤(y<x) και η άρνηση του x<y ως η διάζευξη (x=y)¤(y<x). Ως εκ τούτου μπορεί ο δοσμένος τύπος να κατασκευασθεί μέσω σύζευξης και διάζευξης αποκλειστικά σχέσεων με '=' ή '<' και μάλιστα με τον ίδιο τρόπο τόσο στο $\mathbf{N}^*$, όσο και στο **N**. Ως γνωστόν μπορεί τότε να γραφτεί ο *A* στην μορφή

(7) $A_1 ¤ A_2 ¤ \ldots ¤ A_n$

όπου κάθε $A_i$ σχηματίζεται μόνο με σύζευξη, περίπου ως εξής:

$(F_{1i}(x_1,\ldots, x_n)\ B_{1i}\ G_{1i}(x_1,\ldots, x_n))\&\ldots\&\ (F_{m(i),i}(x_1,\ldots, x_n)\ B_{m(i),i}\ G_{m(i),i}(x_1,\ldots, x_n))$

όπου κάθε $B_{j,i}$ σημαίνει το σύμβολο '=' ή το σύμβολο '<'.

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι, λοιπόν, ο *A* αληθής για μίαν τυχαία επιλογή των τιμών των μεταβλητών $x_1,\ldots, x_n$ στο **N**. Πρέπει να αποδειχθεί ότι αν οι $x_1,\ldots, x_n$ αντικατασταθούν με n μεταβλητά στοιχεία $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ του $\mathbf{N}^*$, τότε είναι ο *A* αληθής για μίαν τυχαία επιλογή αυτών των συναρτήσεων φ στο $\mathbf{N}^*$.

Έστω τώρα ότι $f_1(t), \ldots,f_n(t)$ είναι μία τυχαία ειδική επιλογή των μεταβλητών συναρτήσεων $\varphi_1, \ldots,\varphi_n$. Τότε παριστάνει κάθε $F_{r,i}(f_1(t), \ldots,f_n(t))$ ένα ειδικό στοιχείο του $\mathbf{N}^*$, που θα το ονομάσω συντομότερα $f_{r,i}(t)$. Παρομοίως ονομάζω το $G_{r,i}(f_1(t), \ldots,f_n(t))$ συντομότερα $g_{r,i}(t)$. Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις υπάρχει τώρα ένα στοιχείο $t_{r,i}$ του **N** τέτοιο, ώστε για $t> t_{r,i}$ παραμένει μία σταθερή σχέση <,=, ή > μεταξύ $f_{r,i}g(t)$ και $g_{r,i}g(t)$. Έστω τώρα ότι T είναι το μέγιστο των πεπερασμένου πλήθους αριθμών $t_{r,i}$ . Αν τώρα μπει ειδικά t=g(T+1), δηλαδή $x_k=f_kg(T+1)$, k=1,2,…,n , στις (7) και (8), τότε είναι ο *A* αληθής. Δηλαδή, τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα $A_i$ αληθεύει. Έστω, λοιπόν ότι αληθεύει ο $A_a$ .

Τότε είναι λοιπόν όλες οι σχέσεις

$$f_{r,a}g(T+1)\ B_{r,a}\ g_{r,a}g(T+1) \quad r=1,2,.., m_a$$

αληθείς. Αφού όμως η σχέση $B_{r,a}$ μεταξύ των $f_{r,a}g(t)$ και $g_{r,a}g(t)$ παραμένει σταθερή για όλα τα t>T έχει το στοιχείο $f_{r,a}$ του $\mathbf{M_1}$ στην ακολουθία $\mathbf{N}^*$, την σχέση $B_{r,a}$ προς το $g_{r,a}$. Με άλλα λόγια, για r = 1,2,…,n έχουμε

$$F_{r,a}(f_1(t), \ldots,f_n(t))\ B_{r,a}\ G_{r,a}(f_1(t), \ldots,f_n(t))$$

Δηλαδή ο $A_a$ είναι αληθής για την ειδική επιλογή n στοιχείων $f_1, \ldots,f_n$ του $\mathbf{N}^*$. Άρα είναι και ο *A* αληθής γι' αυτήν την επιλογή στοιχείων. Επειδή όμως αυτή η επιλογή ήταν τυχαία, είναι ο *A* πράγματι ένας αληθής τύπος στο $\mathbf{N}^*$. Έτσι αποδείχθηκε το θεώρημα 2.

*<u>Θεώρημα3.</u> Έστω ότι **Π** είναι ένα σύνολο από πεπερασμένες ή αριθμήσιμα άπειρες προτάσεις σχετικά με τα στοιχεία του **N**, όπου τώρα εμφανίζεται και ο ποσοδείκτης «υπάρχει»* (**$**). *Επί πλέον ας έχει το M' την προηγούμενη σημασία του. Τότε είναι δυνατόν να επεκτείνει κανείς το M' με προσθήκη νέων στοιχείων σε ένα σύνολο M'' έτσι, ώστε κάθε πρόταση στο **Π** μπορεί να γραφτεί ως τύπος μέσω των συναρτήσεων στο M''.*

*<u>Απόδειξη:</u>* Κάθε πρόταση στο **Π** μπορεί να γραφτεί στην μορφή

(9) $\$x_1\ldots\$x_m"y_1\ldots"y_n\$z_1\ldots\$z_p"u_1\ldots"u_q\$v_1\ldots\$v_r \ldots A(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots)$

όπου μπορούν να λείπουν τα πρώτα σύμβολα '$' (δηλαδή m=0), έτσι ώστε η παράσταση να αρχίζει με '"'. Αυτή η πρόταση είναι όμως ισοδύναμη με την ακόλουθη:

Υπάρχουν κάποιοι αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$ και κάποιες συναρτήσεις $f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_p(y_1, \ldots, y_n), g_1(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q), \ldots, g_r(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q), \ldots$ τέτοιες ώστε [η παράσταση]

$$(10)\quad A(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n, f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_p(y_1, \ldots, y_n), u_1, \ldots, u_q, g_1(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q), \ldots, g_r(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q), \ldots)$$

να είναι ένας τύπος, δηλαδή αληθής για τυχαίες τιμές των $y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q, \ldots$. Μπορεί κανείς τώρα να θεωρήσει ότι έχουν επιλεγεί τέτοιοι ειδικοί αριθμοί και τέτοιες αριθμητικές συναρτήσεις για κάθε πρόταση στο *M*.

Εδώ δεν είναι ανάγκη να χρησιμοποιηθεί η Αρχή Επιλογής, γιατί είναι εύκολο να ορισθεί για όλες τις αληθείς προτάσεις μία μονοσήμαντα ορισμένη επιλογή αυτών των αριθμών και αριθμητικών συναρτήσεων. Θέτουμε, δηλαδή, αρχικά

$$"y_1 \ldots "y_n \$z_1 \ldots \$z_p "u_1 \ldots "u_q \$v_1 \ldots \$v_r \ldots A(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots) = B(x_1, \ldots, x_m)$$

και διατάσσουμε όλες τις m-αδες $x_1, \ldots, x_m$ λεξικογραφικά. Έπειτα επιλέγουμε την m-αδα $a_1, \ldots, a_m$ ως την πρώτη (μικρότερη) για την οποία ισχύει η B. Έπειτα θέτουμε

$$\$z_1 \ldots \$z_p "u_1 \ldots "u_q \$v_1 \ldots \$v_r \ldots A(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots) = C_1(y_1, \ldots, y_n, z_1)$$

Τότε είναι, λοιπόν, η $"y_1 \ldots "y_n\ C_1(y_1, \ldots, y_n, z_1)$ αληθής. Εδώ μπορούμε να επιλέξουμε το $z_1$ για κάθε n-αδα $y_1, \ldots, y_n$, όσο πιο μικρό γίνεται έτσι ώστε να είναι η $C_1$ αληθής. Έτσι ορίζεται το $z_1$ μονοσήμαντα ως συνάρτηση $f_1(y_1, \ldots, y_n)$. Στην συνέχεια θέτουμε

$$\$z_2 \ldots \$z_p "u_1 \ldots "u_q \$v_1 \ldots \$v_r \ldots A(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n, f_1(y_1, \ldots, y_n), z_2, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots) = C_2(y_1, \ldots, y_n, z_2)$$

ώστε να είναι η $"y_1 \ldots "y_n\ \$z_2 C_2(y_1, \ldots, y_n, z_2)$ αληθής. Για κάθε n-αδα $y_1, \ldots, y_n$, μπορούμε τότε πάλι να επιλέξουμε το $z_2$ όσο πιο μικρό γίνεται έτσι, ώστε να είναι η $C_2(y_1, \ldots, y_n, z_2)$ αληθής. Έτσι ορίζεται η $z_2$ μονοσήμαντα ως συνάρτηση $f_2(y_1, \ldots, y_n)$. Την επόμενη φορά θέτουμε

$$\$z_3 \ldots \$z_p "u_1 \ldots "u_q \$v_1 \ldots \$v_r \ldots A(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n, f_1(y_1, \ldots, y_n), f_2(y_1, \ldots, y_n), z_3, \ldots, z_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots) = C_3(y_1, \ldots, y_n, z_3)$$

κ.ο.κ. Όταν έχουν ορισθεί όλα τα z ως συναρτήσεις των $y_1, \ldots, y_n$ τότε θέτουμε

$$\$v_2 \ldots \$v_r \ldots A(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n, f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_p(y_1, \ldots, y_n), u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r, \ldots) = D_1(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q, v_1)$$

Τότε αληθεύει η $"y_1 \ldots "y_n "u_1 \ldots "u_q \$v_1\ D_1(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q, v_1)$ και μπορούμε, για κάθε (n+q)-άδα $y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q$, να επιλέξουμε το $v_1$ όσο μικρότερο γίνεται, ώστε να αληθεύει η $D_1(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q, v_1)$. Έτσι ορίζεται το $v_1$ μονοσήμαντα ως συνάρτηση $g_1(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q)$. Μετά θέτουμε

$$\$v_3 \ldots \$v_r \ldots A(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n, f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_p(y_1, \ldots, y_n), u_1, \ldots, u_q, g_1(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q), v_2, \ldots, v_r, \ldots) = D_2(y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q, v_2)$$

κ.ο.κ. Είναι φανερό το πώς ορίζεται με αυτόν τον τρόπο για κάθε πρόταση στο **Π** μονοσήμαντα μία επιλογή αριθμών $a_1, \ldots, a_m$, και αριθμητικών συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_r, \ldots$ .

Αν προστεθούν οι συναρτήσεις που ορίσθηκαν με αυτόν τον τρόπο στο M′ μπορεί κάθε πρόταση (9) του **Π** να γραφτεί στην μορφή (10). Η παράσταση (10) αληθεύει τότε για τυχαίες τιμές των ελεύθερων μεταβλητών $y_1$, ..., $y_n$, $u_1$, ..., $u_q$, ... και παριστάνει, επομένως, έναν τύπο. Έτσι αποδείχθηκε το θεώρημα 3.

Ένα πολύ απλό ενδεικτικό παράδειγμα του θεωρήματος 3 είναι το ακόλουθο. Ως γνωστό είναι η Kongruenz

$$2y \equiv 1 \pmod{(2x+1)}$$

επιλύσιμη για όλα τα x. Με άλλα λόγια, η πρόταση

$$\forall x \exists y \exists z (2y=(2x+1)*z+1)$$

είναι αληθινή. Για κάθε x μπορούμε όμως να επιλέξουμε y=x+1 και z=1, δηλαδή έχουμε τον τύπο

$$2(x+1)=(2x+1)*1+1.$$

*<u>Θεώρημα 4</u> Έστω ότι τα* **Π** και M′ *έχουν το ίδιο νόημα όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Τότε υπάρχει ένα διατεταγμένο σύνολο* ***N***, του οποίου το **N** είναι ένα γνήσιο αρχικό κομμάτι τέτοιο, ώστε κάθε πρόταση του **Π** είναι επίσης πρόταση του **N***, με κάποια επέκταση του νοήματος των συναρτήσεων από το M′, έτσι ώστε να γίνουν συναρτήσεις στο **N*** με διατήρηση του νοήματός τους στο **N.***

*<u>Απόδειξη:</u>* Σύμφωνα με το θεώρημα 3 μπορούμε να επεκτείνουμε το M′ σε ένα σύνολο M″ τέτοιο, ώστε κάθε πρόταση του **Π** να μπορεί να γραφτεί ως τύπος με την βοήθεια των συναρτήσεων από το M″. Έστω ότι το σύνολο αυτών των τύπων είναι **Π′**. Σύμφωνα με τα προκαταρτικά του θεωρήματος 2 μπορούμε τότε να σχηματίσουμε μίαν ακολουθία **N***, που το **N** είναι γνήσιο αρχικό της τμήμα, και να ορίσουμε μίαν επέκταση του νοήματος όλων των συναρτήσεων από το M″ έτσι, ώστε οι τελευταίες να γίνουν συναρτήσεις στο **N*** διατηρώντας το νόημά τους στο **N**. Παράλληλα, σύμφωνα με το θεώρημα 2, παραμένουν ακόμα οι τύποι του **Π′** σε ισχύ στο **N***. Αν όμως ένας τύπος όπως ο (10) ισχύει στο **N***, προφανώς ισχύει τότε και η πρόταση (9), όπου στην (9) εμφανίζονται μόνο οι επεκτεταμένες συναρτήσεις από το M′. Προφανώς έχει έτσι αποδειχθεί το θεώρημα 4.

Από το θεώρημα 4 προκύπτει αμέσως ότι *ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο σύστημα αξιωμάτων, που τα αξιώματά του είναι προτάσεις μόνο με αριθμητικές μεταβλητές, δεν μπορεί να χαρακτηρίσει την ακολουθία των αριθμών.* Γιατί το περιεχόμενο του θεωρήματος 4 μπορεί να εκφρασθεί ως εξής: *Πεπερασμένες ή αριθμήσιμα άπειρες προτάσεις με μόνο ατομικές μεταβλητές, που ισχύουν για μίαν ακολουθία τύπου ω, δεν μπορούν να διακρίνουν αυτήν την ακολουθία από ορισμένες ακολουθίες ανωτέρου διατακτικού τύπου.* Αλλά, αν θεωρήσουμε ένα πεπερασμένο σύστημα αξιωμάτων, όπου εμφανίζονται ανώτερες μεταβλητές, όπως «προτασιακή συνάρτηση» ή «σύνολο», τότε μπορούν, σύμφωνα με το θεώρημα του Löwenheim ή αντίστοιχα μίαν γενίκευσή του[3], να παραχθούν μόνο αριθμήσιμα άπειρες προτάσεις για τους αριθμούς από αυτά. *Ένας πλήρης χαρακτηρισμός της ακολουθίας των αριθμών δεν είναι ως εκ τούτου με κανέναν τρόπο δυνατός.*

---

[3] Βλέπε Th. Skolem: Logisch-kombinatorische Untersuchungen etc. Oslo Vid. Akademis skrifter, I, 1920, No 4.

Ιδιαίτερα εύκολα το αναγνωρίζουμε αυτό για τα συνηθισμένα συστήματα αξιωμάτων που παρατίθενται. Συνήθως παραθέτουμε αναδρομικά αξιώματα προς κατασκευήν αριθμητικών συναρτήσεων. Επί πλέον έχουμε τα αξιώματα της σχέσης <. Σε όλα αυτά τα αξιώματα εμφανίζονται μόνο αριθμητικές μεταβλητές. Εκτός τούτου παραθέτουμε δύο αξιώματα όπου εμφανίζεται μία μεταβλητή προτασιακή συνάρτηση, δηλαδή:

Αρχή της ισότητας:

$$(x=y)\text{Ø}(S(x) \text{ ¨ } S(y))$$

Αρχή της πλήρους επαγωγής:

$$S(1)\& \text{ "}x(S(x) \text{ Ø} S(x+1)) \text{ Ø} S(y)$$

Όμως, οι κατασκευάσιμες προτασιακές συναρτήσεις σχηματίζονται με τις πέντε λογικές πράξεις από σχέσεις < και = μεταξύ αριθμητικών συναρτήσεων. Επειδή οι κατασκευάσιμες αριθμητικές συναρτήσεις είναι, φυσικά, αριθμήσιμες, το ίδιο θα ισχύει και για τα διάφορα S(x). Ως εκ τούτου μπορεί κάθε ένα από τα τελευταία αξιώματα να θεωρηθεί ως ένα αριθμήσιμο σύνολο αξιωμάτων, όπου σε καθένα εμφανίζεται ένα ειδικό S(x). αυτά τα αξιώματα έχουν τότε πάλι αποκλειστικά αριθμητικές μεταβλητές. Σύμφωνα με το θεώρημα 4 χαρακτηρίζεται, λοιπόν, η ακολουθία των αριθμών μόνο ελλειπώς με αυτά τα αξιώματα.

Διαφορετικό είναι, όμως, το γεγονός ότι η ακολουθία των αριθμών χαρακτηρίζεται πλήρως, π. χ. από τα αξιώματα του Peano, αν θεωρήσουμε την έννοια «σύνολο» ή «προτασιακή συνάρτηση» ως κάτι δοσμένο εκ των προτέρων με ένα νόημα απόλυτο ανεξάρτητο από όλες τις αρχές παραγωγής ή αξιώματα. Αν όμως θέλουμε να κάνουμε την αξιωματική θεμελίωση με συνέπεια, έτσι ώστε να αναχθεί σε αξιώματα επίσης η συλλογιστική με σύνολα ή προτασιακές συναρτήσεις, τότε δεν είναι, όπως είδαμε, δυνατός ο μονοσήμαντος ή πλήρης χαρακτηρισμός της ακολουθίας των αριθμών.

Παρατηρούμε ότι οι αποδείξεις μου βασίζονται εδώ σε κλασσικά μαθηματικό-λογικό έδαφος. Ειδικά προϋποθέτει η απόδειξη του θεωρήματος 1 την αρχή αποκλεισμού τρίτου ενδεχομένου. Θα μπορούσαμε, τώρα να επιδιώξουμε να διαμορφώσουμε έτσι τους συλλογισμούς ώστε να απαλλαχθούμε από την αρχή αποκλεισμού τρίτου. Ίσως και να επιτύχει αυτό. Έχω μίαν ιδέα για το πώς να το προσπαθήσω. Εντούτοις δεν υπεισέρχομαι εδώ σε αυτό αλλά επιφυλάσσομαι να επανέλθω αργότερα.

## Παρατήρηση της Συντακτικής Επιτροπής

Τα ακόλουθα (ειδικότερα και ανεξάρτητα) αποτελέσματα, τα οποία προέκυψαν το έτος 1927/28 στο σεμινάριο του κ. A. Tarski (Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας) έχουν άμεση σχέση με το παραπάνω αποτέλεσμα του κ. Th. Skolem.

(1) Ο κ. A. Tarski παρατήρησε ότι το σύνολο των αριθμητικών προτάσεων (= προτάσεων με μόνο ατομικές μεταβλητές) στις οποίες εμφανίζεται (εκτός από τα λογικά σύμβολα, π.χ. το σύμβολο ταυτότητας) ως σταθερό σύμβολο το σύμβολο της διατακτικής σχέσης '<', και οι οποίες ικανοποιούνται για τον διατακτικό τύπο ω, ταυτίζεται με το αντίστοιχο σύνολο για τον τύπο $\omega+(\omega^*+\omega)\tau\alpha$, όπου τ είναι ένας τυχαίος διατακτικός τύπος.

(2) Ο κ. S. Jaskowski απέδειξε (ως συνέχεια μίας εργασίας του κ. M. Pressburger: C. R. du Congres des Math. Des Pays Slaves, 1929, σελ. 92 και 395), ότι το σύνολο των αριθμητικών προτάσεων όπου ως σταθερά σύμβολα (εκτός από τα λογικά σύμβολα) εμφανίζονται τα σύμβολα '1' και '+' , και οι οποίες ικανοποιούνται για την περιοχή των ακεραίων αριθμών, ταυτίζεται με το αντίστοιχο σύνολο για την περιοχή των αριθμών α +βi , όπου το α διατρέχει ακεραίους και το β ρητούς αριθμούς.

(3) Ο κ. A. Tarski απέδειξε ως συμπλήρωμα του γνωστού θεωρήματος των Löwenheim-Skolem ότι για κάθε χωρίς αντιφάσεις σύνολο αριθμητικών προτάσεων, που δεν έχει καμία πεπερασμένη, ερμηνεία υπάρχει μία ερμηνεία, όχι μόνο στο αριθμήσιμα άπειρο, αλλά και στο μη αριθμήσιμα άπειρο. Από αυτό προκύπτει ότι τέτοια σύνολα δεν μπορεί να είναι κατηγορικά [να έχουν μόνο ισόμορφα μεταξύ τους μοντέλα].

## Σχόλια

**1.** Ερώτηση: Γιατί επεκτείνει και συμπληρώνει ο Skolem το σύνολο M των αριθμητικών συναρτήσεων του **Π** για να συμπεριλάβει τα αριθμητικά πολυώνυμα και όλες τις συναρτήσεις που προκύπτουν με αντικαταστάσεις;

Δημιουργεί έτσι το υπερσύνολο M' που περιλαμβάνει και τα πολυώνυμα και το υπερσύνολο αυτού το **M**, που περιλαμβάνει και όλες τις συναρτήσεις που προκύπτουν με αντικαταστάσεις. Μετά επιλέγει το υποσύνολο $\mathbf{M_1}$, των συναρτήσεων μίας μεταβλητής στο **M** και το διατάσσει κατά σειρά μεγέθους των συναρτήσεων αυτών δημιουργώντας έτσι την ακολουθία $\mathbf{N}^*$.

Απάντηση: Αυτά όλα γίνονται για να ισχύει τελικά $F:(\mathbf{N}^*)^n \mathbf{Ø} \mathbf{N}^*$ για τις συναρτήσεις n μεταβλητών F**œM**, όπως ισχύει και $F:\mathbf{N}^n \mathbf{Ø} \mathbf{N}$ (βλ. σελ.4).

**2**. Ο Skolem δεν κατασκευάζει πολλαπλά μοντέλα για κάθε σύστημα αξιωμάτων. Χρησιμοποιεί μόνο το $\mathbf{N}^*$. Η ύπαρξη πολλαπλών μη ισόμορφων μοντέλων (διαφορετικού πληθικού τύπου) για κάθε σύστημα αξιωμάτων φαίνεται να αποδείχθηκε από τον Alfred Tarski. Στις εργασίες του 1933 και 1934 ο Skolem αποδεικνύει απλά την ύπαρξη ενός μόνο μη ισόμορφου προς τους φυσικούς αριθμούς μοντέλου, είτε περιγράφονται με ένα πεπερασμένο σύστημα αξιωμάτων είτε με ένα άπειρο αλλά αριθμήσιμο!

## Δομή της εργασίας του Skolem του έτους 1934

1. Εξετάζει συναρτήσεις ακεραίων θετικών μεταβλητών που έχουν ακέραιες θετικές τιμές. Αν f(x) και g(x) είναι δύο τέτοιες συναρτήσεις, τότε υπάρχουν πάντοτε είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) < g(x), είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) = g(x) είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) > g(x). Για κάθε τέτοιο ζεύγος συναρτήσεων ορίζεται μία διάταξη αναλόγως του ποιο από τα τρία ενδεχόμενα ισχύει, όπου αν ισχύουν περισσότερα από ένα τέτοια ενδεχόμενα επιλέγουμε αυθαίρετα μία από τις προσφερόμενες δυνατότητες διάταξης. Για να δημιουργηθεί μία διάταξη συγκεκριμένων συναρτήσεων αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα:

*Θεώρημα1. Έστω ότι $f_r(x)$, r=1,2,3,... είναι μία ακολουθία συναρτήσεων. Τότε υπάρχει πάντα μία συνάρτηση g(x), που αυξάνεται μονότονα, τέτοια ώστε, αν είναι i<j δύο δείκτες, ισχύει πάντα συνεχώς μία από τις τρεις περιπτώσεις:*

$$f_i(g(x))<f_j(g(x)),\ f_i(g(x))=f_j(g(x)),\ f_i(g(x))>f_j(g(x))$$

*όταν $x>x_0$ όπου $x_0$ ορισμένος αριθμός.*

2. Εξετάζει τώρα ένα απλό σύστημα αξιωμάτων της Αριθμητικής αποτελούμενο από τις ακόλουθες προτάσεις που ισχύουν για τους φυσικούς αριθμούς **N**:

(1) Οι αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης <. Αυτή η σχέση είναι ασύμμετρη και μεταβατική.

(2) Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός 1.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος x+1, δηλαδή x<y  x+1≦y.

(4) Υπάρχει μία πράξη +, που λέγεται πρόσθεση, όπου ισχύει η αναδρομική σχέση

$$x+(y+1)=(x+y)+1.$$

(5) Υπάρχει μία πράξη που λέγεται πολλαπλασιασμός, [δοσμένη] με την [αναδρομική] σχέση

$$x(y+1)=xy+x.$$

(6) Για μία οποιαδήποτε *προτασιακή συνάρτηση* [δηλ. *κατηγόρημα*] U(x) ισχύει η αρχή της επαγωγής:

$$U(1)\&\text{"}x(U(x)\text{Ø}U(x+1))\ \text{Ø}\ \text{"}yU(y)$$

(7) Για μία τυχαία προτασιακή συνάρτηση U(x) ισχύει <η αρχή της αντικαταστάσεως>:

$$(x=y)\ \text{Ø}(U(x)\quad U(y)).$$

3. Ως «προτασιακές συναρτήσεις» ονομάζει κάθε είδους προτάσεις που κατασκευάζονται μέσω των 5 λογικών πράξεων με βάση εξισώσεις, ή σχέσεις μεγαλυτέρου ή μικροτέρου μεταξύ *πολυωνύμων*

4. Αποδεικνύει ότι όλες οι προτάσεις που μπορούν να παραχθούν με βάση τις προϋποθέσεις (1)-(7) με προσθήκη της αρχής της του τρίτου αποκλείσεως ισχύουν επίσης για γραμμικά διατεταγμένα σύνολα άλλης, ευρύτερης φύσης από τους φυσικούς αριθμούς.

5. Από την γενική φύση της απόδειξης προκύπτει ότι αυτό θα ισχύει πάντοτε, ακόμα και αν προστεθούν ως αξιώματα άλλες ιδιότητες της ακολουθίας των αριθμών ανεξάρτητες από τα δοθέντα αξιώματα.

6. Αποδεικνύει κατ' αρχήν την ακόλουθη επέκταση της επαγωγικής συναγωγής:

*Έστω ότι ισχύει U(1) και επίσης U(z+1) αν ισχύει U(z) για όλα τα u ≤ z. Τότε ισχύει U(x) για όλα τα x. Πρόκειται, λοιπόν, να δειχθεί ότι*

U(1)& "y["x((x≤y) Ø U(x)) Ø U(y+1)] Ø U(z).

7. Παρατηρεί ότι σε *κάθε μη κενό σύνολο αριθμών υπάρχει ένας ελάχιστος, όπου* εδώ «σύνολο» σημαίνει μία συλλογή δοσμένη μέσω των προτασιακών συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

8. Στοχεύει τώρα στο να αποδείξει ότι όλες οι προτάσεις που ισχύουν για τους ΦΑ, δηλαδή την ακολουθία **N**, ισχύουν και για το διατεταγμένο σύνολο συναρτήσεων μίας μεταβλητής των ΦΑ.

Για να το πετύχει αυτό κατασκευάζει για κάθε πρόταση που αληθεύει για ΦΑ μίαν συνάρτηση ΦΑ που να ικανοποιεί την πρόταση αυτήν.

Αυτό γίνεται με εξέταση όλων των δυνατών περιπτώσεων:

α. Αν η πρόταση "x $yA(x,y) είναι αληθής έτσι, ώστε για κάθε x υπάρχει μόνο ένα y τέτοιο ώστε να ισχύει A(x,y). Τότε μπορεί κανείς να πει ότι με την A(x,y) ορίζεται μία συνάρτηση y=f(x) με την συνηθισμένη μαθηματική έννοια. Η εξίσωση y=f(x) είναι μία μεταγραφή της A(x,y), και αντί για "x$yA(x,y) έχει κανείς τότε "x A(x,f(x)), {δηλαδή "x $fA(x,f) με fœ**N**$^*$}.

β. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει "x$yA(x,y) αλλά για κάθε x υπάρχουν περισσότερες τιμές y που την ικανοποιούν διαλέγει ως f(x) την ελάχιστη από αυτές τις τιμές.

Σύμφωνα με ότι ήδη απέδειξε, υπάρχει μεταξύ όλων των y για τα οποία ισχύει A(x,y) για ένα τυχαίο x, ένας ελάχιστος αριθμός, που μπορεί να ονομασθεί f(x) και προσδιορίζεται από το x (και φυσικά από την προτασιακή συνάρτηση A).

Τότε είναι, επομένως, η y=f(x) ισοδύναμη με A(x,y)& "z(A(x,z) Ø(y≤z)), και έχουμε "xA(x,f(x)).

γ. Παρόμοια, αν είναι δοσμένη μία προτασιακή συνάρτηση A(x,y,z), μπορεί κανείς να σχηματίσει την προτασιακή συνάρτηση A(x,u,v)&"u"v(A(x,u,v) Ø(y<u)¤(y=u)&(y≤v)), μέσω της οποίας είναι δοσμένα τα y και z ως συναρτήσεις y=f(x) και z=g(x) του x.

Ο y=f(x) είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η A(x,y,z) για οποιοδήποτε z, και z=g(x) είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η A(x,f(x),z). Αν η "x$y$zA(x,y,z) είναι αληθής, τότε υπάρχουν οι συναρτήσεις f(x) και g(x) για όλα τα x, και έχουμε "xA(x,f(x),g(x)).

δ. Παρόμοια, αν αληθεύει η "x"y$zA(x,y,z), μπορεί κανείς να σχηματίσει την προτασιακή συνάρτηση A(x,y,z)&"u(A(x,y,u)Ø(z≤u)), μέσω της οποίας δίνεται το z ως συνάρτηση f(x,y). Η τελευταία πρόταση μπορεί τότε να γραφτεί στην μορφή "x"yA(x,y,f(x,y)).

ε. Με παρόμοιο τρόπο εργάζεται και αν τα σύμβολα " και $ εμφανίζονται εναλλάξ. Έστω, π.χ., η πρόταση "x$y"z$uA(x,y,z,u).

Για συντομία βάζουμε προσωρινά, "z$uA(x,y,z,u)=B(x,y) και σχηματίζουμε την "x$yB(x,y)&"v(B(x,v)Ø(y≤v)), που είναι μία αληθής πρόταση.

Αυτή ορίζει το y ως συνάρτηση f(x), οπότε ισχύει "xB(x,f(x)), δηλαδή, "x"z$uA(x,f(x),z,u).

Τότε ισχύει επίσης η "x"z$uA(x,f(x),z,u)& "w(A(x,f(x),z,w)Ø(u≦w)), με την οποία προσδιορίζεται η u=g(x,z).

Έτσι, αντί για "x$y"z$uA(x,y,z,u) μπορούμε να γράψουμε "x"zA(x,f(x),z,g(x,z)).

ζ. Αν έχει κανείς μία πρόταση, που αρχίζει με ένα σύμβολο '$', όπως π. χ. $x"y$zA(x,y,z), μπορεί να πει ότι έχει "yA(a,y,f(y)) για έναν ορισμένο αριθμό a και μία συνάρτηση f(y).

9. Οι συναρτήσεις που προκύπτουν έτσι μέσω των αληθών γενικών υπαρξιακών προτάσεων σχηματίζουν μία κλειστή ολότητα σε σχέση με αντικαταστάσεις τέτοιων συναρτήσεων στην θέση μεταβλητών.

Ας θεωρήσουμε, π.χ., τις z=f(x,y) και y=g(u), όπου η z=f(x,y) ισοδυναμεί με την ισχύ μίας πρότασης A(x,y,z) και η y=g(u) με την ισχύ της πρότασης B(y,u).[4]

Τότε για την πρόταση C(x,u,z)= $yA(x,y,z)&B(y,u), προκύπτει ότι είναι αληθής η "x"u$zC(x,u,z) και το z προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα x και u, δηλ. η z είναι συνάρτηση των x και u. Αυτή η συνάρτηση προκύπτει με αντικατάσταση του y=g(u) στην z=f(x,y), δηλ. z=f(x,g(u)).

Παρόμοια, αν σχηματίσει κανείς την πρόταση $zA(x,y,z)&B(u,z)=D(x,y,u), αναγνωρίζει ότι η πρόταση "x"y$uD(x,y,u) αληθεύει και μάλιστα έτσι ώστε η μεταβλητή u να προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις x, y. Αυτή η συνάρτηση είναι τότε η u=g(f(x,y)). Είναι ξεκάθαρο ότι αυτή η αναπαραγωγή ισχύει γενικά.

Ας ονομάσουμε την ολότητα αυτών των συναρτήσεων $\mathbf{N}^*$.

{Προφανώς, ο Skolem εννοεί εδώ ότι, με κατάλληλες αντικαταστάσεις, όλες οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών θα γίνουν συναρτήσεις μίας (το πολύ) μεταβλητής. Αυτήν την παράλειψη προσπαθεί να διευκρινίσει με τα θεωρήματα 3 και 4 στην εργασία του 1935.}

10. Επειδή προϋποτίθεται ότι ισχύει η αρχή αποκλείσεως τρίτου για τις προτάσεις που κατασκευάζονται με βάση τα δοθέντα αξιώματα, δεν είναι δύσκολο να αναγνωρίσουμε ότι, αν $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι δύο τυχόντα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$, ή θα υπάρχουν άπειρα x τέτοια ώστε είναι $f_1(x)<f_2(x)$, ή άπειρα τέτοια ώστε $f_1(x)=f_2(x)$, ή άπειρα τέτοια ώστε $f_1(x)>f_2(x)$. Ως εκ τούτου μπορούν τα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$ σύμφωνα με το θεώρημα 1 να διαταχθούν γραμμικά σύμφωνα με τον ρυθμό αυξήσεώς τους προς το άπειρο, αν βάλει κανείς μίαν κατάλληλη συνάρτηση g(x) στην θέση του x.

11. Το ότι ισχύουν και οι ιδιότητες (2) και (3) του **N** φαίνεται εύκολα. Γιατί στα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$ ανήκουν και οι «σταθερές», δηλαδή τα στοιχεία του **N**. Ειδικότερα ανήκει, λοιπόν το 1 στο $\mathbf{N}^*$ και προφανώς είναι στο $\mathbf{N}^*$ 1≦f, όπου f είναι ένα τυχαίο στοιχείο του $\mathbf{N}^*$, αφού είναι 1≦f(g(x)) για όλα τα x. Παρομοίως είναι το $1+f_1(x)$ ένα στοιχείο του **N** αν είναι τέτοιο το $f_1(x)$, και αν ισχύει $f_1g(x)<f_2g(x)$ για όλα τα x, τότε ισχύει $f_1g(x)+1\leqq f_2g(x)$ για όλα τα x, δηλαδή η (3) είναι σωστή.

[4] (Συνήθως αυτή η συνάρτηση A είναι κατασκευασμένη έτσι, ώστε εμφανίζονται μέσα σε αυτήν φαινομενικές μεταβλητές, όπως φαίνεται από τα παραπάνω παραδείγματα).

12. Παρατηρούμε, τώρα, ότι το $\mathbf{N}^*$ είναι διατεταγμένο κατά έναν πολύ ευρύτερο τρόπο από ότι το **N**. *Συνολοθεωρητικά, έχει το $\mathbf{N}^*$ έναν σημαντικά ανώτερο διατακτικό τύπο από ότι το **N**,* γιατί ήδη το στοιχείο x του $\mathbf{N}^*$ είναι > από οποιαδήποτε σταθερά n.[5] Παραπέρα είναι x+1>x, x+2>x+1, ..., 2x>x+n, όπου n μία τυχούσα σταθερά κ.ο.κ.

Κατά τα άλλα υπάρχει στο **N***, ακριβώς όπως και στο **N**, ένα αμέσως μικρότερο στοιχείο για κάθε στοιχείο που είναι >1. Έστω, δηλαδή, ότι η y=δ(x) είναι δοσμένη με την πρόταση (y+1≥x)&"z(z+1≥xØ(y≤z)) [σωστό είναι να μπει εδώ (z>y)][6]. Επειδή προφανώς στο **N** αληθεύει η πρόταση "x$y(y+1≥x), υπάρχει η δ(x) για όλα τα x και είναι επομένως ένα στοιχείο του $\mathbf{N}^*$. Είναι, όμως, εύκολο να δούμε ότι η δf(x) είναι το αμέσως προηγούμενο της f στοιχείο[7] του $\mathbf{N}^*$, αν είναι f>1, γιατί f>1 σημαίνει ότι είναι fg(x)>1 για όλα τα x, και επειδή δ(x)+1=x για x>1, θα είναι δfg(x)+1=fg(x). Δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε στενότερα τον τύπο του $\mathbf{N}^*$.

13. Αν $F(x_1,x_2,\ldots)$ είναι μία συνάρτηση ορισμένη πάνω στο **N**, τότε, αν $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... παριστάνουν μεταβλητά στοιχεία του $\mathbf{N}^*$, είναι $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots)$ μία συνάρτηση στο $\mathbf{N}^*$, δηλαδή κάθε συνάρτηση στο **N** παριστάνει κατ' αυτόν τον τρόπο μίαν τέτοια συνάρτηση και στο $\mathbf{N}^*$. Το $\mathbf{N}^*$ έχει επομένως τις ιδιότητες (1), (2), (3), (4), (5), γιατί προφανώς παραμένουν και στο $\mathbf{N}^*$ σε ισχύ οι αναδρομικοί τύποι για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Παρόμοια έχουν ένα νόημα και στο $\mathbf{N}^*$ όλες οι προτάσεις και προτασιακές συναρτήσεις, που μπορούν να συντεθούν με βάση τα αξιώματα, γιατί κάθε τέτοια πρόταση ή προτασιακή συνάρτηση έχει την μορφή

$$Qx_1Qx_2\ldots U(x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2,\ldots),$$

όπου τα Q παριστάνουν ποσοτικοποιήσεις ["$ ή $], ενώ η U σχηματίζεται με Σύζευξη , Διάζευξη ή Άρνηση (και, αν θέλει κανείς, συνεπαγωγή) από σχέσεις με '<' ή '=' μεταξύ *πολυωνύμων*[8] με ακέραιους συντελεστές. Αυτές οι σχέσεις διατηρούν, όμως ένα νόημα, αν βάλει κανείς στην θέση των μεταβλητών τυχαίες συναρτήσεις μίας μεταβλητής x από το **N** ή, με άλλα λόγια, τυχόντα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$.

14. Το ότι για το $\mathbf{N}^*$ ισχύουν επίσης τα αξιώματα επαγωγής, (6), και αντικατάστασης, (7), προκύπτει ως ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 2.

Προηγείται μία απλουστευτική παρατήρηση:

Τόσο στο **N** όσο και στο $\mathbf{N}^*$ έχουμε

$$(x>y) = \$z(x=y+z)$$

Ως εκ τούτου, μπορεί κανείς να γράψει τις προτάσεις με τέτοιον τρόπο, ώστε στο στοιχειώδες μέρος τους [τον τύπο χωρίς τους ποσοδείκτες] να εμφανίζονται μόνο εξισώσεις και όχι ανισότητες. Περαιτέρω, έχουμε

$$(x=y)¤(z=u) = (xz+yu=xu+yz)$$

---

[5] {Δεν υπάρχει όρος του **N** που να αντιστοιχεί στον xœ$\mathbf{N}^*$, γιατί οι όροι του **N** είναι ήδη σε αντιστοιχία ένας-προς-έναν προς τις σταθερές συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$.}

[6] {Ο τύπος (y+1≥x)&"z(z+1≥xØ(z>y)) ισοδυναμεί με (y≥x-1)&"z(z≥x-1Ø(z>y)). Δηλαδή είναι y≥x-1 και αν για τυχόν είναι επίσης z≥x-1, τότε οφείλει να είναι z>y. Ειδικότερα, αφού x>x-1, πρέπει να είναι x>y, δηλαδή, x>y≥x-1, άρα y=x-1.}

[7] {Δηλαδή δf(x)=f(x)-1, αλλά αυτό ισχύει μόνο όταν ορισθεί η πράξη της αφαίρεσης!}

[8] {24.10.03: Οι συναρτήσεις $x^n$, και $n^x$ είναι *και οι δύο* πολυώνυμα ως προς κατάλληλες μεταβλητές, επειδή x και n είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί}.{19.7.04: **ΛΑΘΟΣ!:** Η συνάρτηση $n^x$ δεν είναι άμεσα ορισμένη για κάθε x. Ορίζεται μόνο αναδρομικά: $n^{x+1}=n^xn$}.

ώστε μπορούν να απαλειφθούν οι διαζεύξεις[9].

Άρα μπορεί κάθε πρόταση ή προτασιακή συνάρτηση να γραφτεί έτσι ώστε το στοιχειώδες μέρος της να είναι σύζευξη εξισώσεων.

*<u>Θεώρημα 2:</u> Κάθε πρόταση που μπορεί να παραχθεί με βάση τα παρατεθέντα αξιώματα, η οποία είναι αληθής στο **N** είναι αληθής και στο **N***.*

*<u>Απόδειξη:</u>*

Όπως εξηγήσαμε τώρα μόλις, μπορεί κανείς να γράψει την δοσμένη πρόταση έτσι ώστε το στοιχειώδες μέρος της να είναι σύζευξη εξισώσεων, τόσο όταν θεωρείται στο **N** όσο και όταν θεωρείται στο **N***.

Η ισχύς της πρότασης στο **N** μπορεί, με αντικατάσταση μερικών μεταβλητών με ορισμένες συναρτήσεις των άλλων, και επί πλέον με εισαγωγή ειδικών αριθμών για ορισμένες μεταβλητές, να εκφρασθεί έτσι ώστε αυτή η σύζευξη να ισχύει για τυχαίες τιμές στο **N** των μεταβλητών που απομένουν (Βλέπε §8 εδώ).

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2 αρκεί τότε προφανώς να δείξουμε το ακόλουθο: Δίνεται μία εξίσωση

$$F(a_1, a_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots, f_1(x_1, x_2, \ldots), f_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots) =$$
$$G(a_1, a_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots, f_1(x_1, x_2, \ldots), f_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots)$$

που είναι αληθής στο **N** για τυχούσες τιμές των $x_1$, $x_2$,..., όπου $a_1$, $a_2$,... είναι ορισμένα ειδικά στοιχεία του **N** και $f_1$, $f_2$, ..., ορισμένες συναρτήσεις, δηλαδή στοιχεία του **N*** ενώ F και G σχηματίζονται με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό σε πεπερασμένη επανάληψη, δηλαδή είναι πολυώνυμα.

Πρέπει να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παραμένει αληθής στο **N***, δηλαδή, αν αντί $x_1$, $x_2$,... εισαχθούν τυχαίες συναρτήσεις $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, .... Αυτό όμως το αναγνωρίζει κανείς σχεδόν αμέσως. Γιατί τόσο το F, όσο και το G γίνονται με εισαγωγή μία τυχαίας σειράς από φ στην θέση των x δύο συναρτήσεις της μεταβλητής x και έχουν για κάθε x από το **N** την ίδια τιμή [που ανήκει] στο **N**.

Είναι επομένως επίσης πάντα ίσες αν εισαχθεί g(x) αντί για x [βλ. Θεώρημα 1], δηλαδή είναι σύμφωνα με τον ορισμό της σχέσης '=' μεταξύ των συναρτήσεων πράγματι «ίδιες /ίσες» συναρτήσεις ή, με άλλα λόγια, για κάθε επιλογή των στοιχείων $\varphi_1$, $\varphi_2$, ... στο **N***, παριστάνουν το ίδιο στοιχείο του **N***. Με αυτό έχει αποδειχθεί το θεώρημα 2. **É**

15. Προφανώς βασίζεται η αποδειξιμότητα του θεωρήματος 2 μόνο στο ότι έχει προϋποτεθεί ο αποκλεισμός τρίτου [ενδεχομένου], ενώ οι εν γένει κατασκευάσιμες συναρτήσεις μπορούν να απαριθμηθούν. Το τελευταίο, όμως, ισχύει πάντα αν έχει δοθεί ένα συγκεκριμένο πλαίσιο παραγωγής προτάσεων και συναρτήσεων, δηλαδή αν έχει κανείς εν γένει ένα ακριβώς διατυπωμένο σύστημα αξιωμάτων. Επομένως:

*Ένα πεπερασμένο σύστημα αξιωμάτων δεν μπορεί ποτέ να χαρακτηρίσει την ακολουθία των [φυσικών] αριθμών, δηλαδή, να την διαχωρίσει από όλες τις άλλες ακολουθίες, τουλάχιστον αν περιλαμβάνει την αρχή του αποκλεισμού τρίτου ενδεχομένου.*

16. Θα ήταν τώρα όμως πολύ ενδιαφέρον να δώσουμε μίαν πρόταση που θα ίσχυε στο **N***, όχι όμως στο **N** και μάλιστα έτσι, που να μην είναι

[9] {Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με (x-y)*(z-u)=0 όταν ορισθεί η πράξη της αφαίρεσης}.

κοινότυπη, όπως [είναι] η ακόλουθη: Στο $\mathbf{N}^*$ υπάρχουν στοιχεία που δεν υπάρχουν στο **N**, ενώ φυσικά στο **N** δεν υπάρχουν στοιχεία που να μην ανήκουν στο $\mathbf{N}^*$.

Για να κατασκευάσουμε μίαν τέτοια πρόταση αντιστοιχούμε σε κάθε πρόταση σχετικά με το **N,** που κατασκευάζεται με βάση τα αξιώματα, έναν αριθμό που τον ονομάζουμε «ύψος» της.

Οι προτασιακές συναρτήσεις μπορούν να γραφτούν, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, ως εξής:

$$Qx_1Qx_2\ldots Qx_n(P_1(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,y_2,\ldots,y_m)=P_2(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,y_2,\ldots,y_m))\&$$
$$(P_3(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,y_2,\ldots,y_m)=P_4(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,y_2,\ldots,y_m))\&\ldots$$

όπου τα P είναι πολυώνυμα και κάθε Q είναι ένα σύμβολο ολότητας, **"**, ή ένα σύμβολο ύπαρξης, **$**.

Φυσικά τα πολυώνυμα είναι έτσι γραμμένα ώστε να εμφανίζονται σε αυτά μόνο θετικοί συντελεστές, γιατί αυτές οι συναρτήσεις υποτίθεται ότι σχηματίζονται μόνο με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό.

Αν K είναι το άθροισμα των συντελεστών [των πολυωνύμων] τότε θα ονομάζεται «ύψος» της πρότασης ο αριθμός

$$K+n+m+\max(g_1,g_2,\ldots,g_m)+ \max(y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

όπου $g_r$ είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P_r$.

Προφανώς υπάρχουν τότε μόνο πεπερασμένο πλήθος προτάσεων με ένα δοσμένο ύψος στο **N**.

Παρατηρεί κανείς, ότι η παραπάνω παράσταση είναι μόνο μία προτασιακή συνάρτηση όσο οι $y_1,y_2,\ldots,y_m$ είναι αόριστες. Γίνεται πρόταση τότε μόνον όταν δοθούν για τα $y_1,y_2,\ldots,y_m$ συγκεκριμένες τιμές.

Μέσα στο **N** ισχύει τότε η ακόλουθη πρόταση:

*<u>Πρόταση:</u> Αν σε συναρτήσεις μίας μεταβλητής, που ορίζονται μέσω προτάσεων ύψους ≤x αντικαταστήσουμε την μεταβλητή με την τιμή x, τότε μεταξύ των αριθμών που προκύπτουν υπάρχει ένας μέγιστος.*

Αντιθέτως, αυτό δεν ισχύει στο $\mathbf{N}^*$!

Αν θεωρήσει κανείς όλες τις προτάσεις με ύψος ≤t, που ορίζουν συναρτήσεις μίας μεταβλητής, με το να παρασταθούν όλα τα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$ ως συναρτήσεις της μεταβλητής t**œN** εμφανίζονται ανάμεσά τους όλες όσες έχουν ύψος έναν αριθμό από το **N**.

Οι συναρτήσεις μίας μεταβλητής που ορίζονται έτσι αποτελούν όμως όλα τα στοιχεία f του $\mathbf{N}^*$, και δεν μπορεί μεταξύ των διαφόρων f(t) να εμφανισθεί καμία μέγιστη.

17. Αν ονομάζει κανείς τις ως τώρα κατασκευάσιμες συναρτήσεις, συναρτήσεις με την στενότερη έννοια [δηλαδή στο **N** ], μπορεί κανείς να πει ότι για το $\mathbf{N}^*$ ισχύει επί πλέον το ακόλουθο αξίωμα:

*<u>Αξίωμα:</u> Υπάρχει μία προτασιακή συνάρτηση A(x) υπό την ευρύτερη έννοια [δηλαδή στο* $\mathbf{N}^*$*] τέτοια, ώστε αληθεύει:*

***$**xA(x)& **"**x**$**y(A(x)**Ø**A(y)&(x>y)).*

18. Ο Skolem παρατηρεί ότι δεν μπορεί να ονομάσει κανείς μίαν τέτοια ακολουθία σαν την $\mathbf{N}^*$ την «ακολουθία των φυσικών αριθμών», γιατί όποια περιοχή προτασιακών συναρτήσεων και να μας δίνουν τα παρατιθέμενα αξιώματα, θα πρέπει μάλλον να απαιτήσουμε και την ισχύ του αξιώματος πλήρους επαγωγής, (6).

## Στοιχεία και Δομή της εργασίας του Skolem του έτους 1935

### 1. Τα διάφορα σύνολα που ορίζονται:

**N**: Η ακολουθία των ακεραίων θετικών αριθμών θα ονομάζεται **N**.

**Π**: Ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο σύνολο αληθών προτάσεων σχετικά με τους όρους της **N**.

M: Οι αριθμητικές συναρτήσεις, που εμφανίζονται στις προτάσεις που ανήκουν στο **Π**. Αποτελούν ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο σύνολο.

M′: Ένωση του M με τα μη εκ ταυτότητος μηδενικά πολυώνυμα πεπερασμένου πλήθους μεταβλητών με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές (αν δεν εμφανίζονται ήδη στο M). Το σύνολο συναρτήσεων M′, είναι αριθμήσιμα άπειρο.

**M**: Προκύπτει από το M′ με σταδιακή διεξαγωγή όλων των δυνατών αντικαταστάσεων (αν το M′ δεν είναι ήδη κλειστό ως προς παντοειδείς αντικαταστάσεις) Το **M** είναι κατ′ αυτόν τον τρόπο κλειστό. επίσης είναι αριθμήσιμα άπειρο.

$\mathbf{M_1}$: Οι συναρτήσεις μίας μεταβλητής $f_1(x)$, $f_2(x)$, … που υπάρχουν στο **M**.

Το αριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων $\mathbf{M_1}$ μπορεί να επεκταθεί με την εκτέλεση όλων των δυνατών αντικαταστάσεων σε ένα αριθμήσιμο σύνολο $\mathbf{M_\omega}$ που είναι κλειστό ως προς αντικαταστάσεις.

$\mathbf{N}^*$:Η διατεταγμένη ακολουθία των στοιχείων του $\mathbf{M_1}$.

Η **N** αποτελεί ένα γνήσια αρχικό κομμάτι της $\mathbf{N}^*$, γιατί μεταξύ των στοιχείων του $\mathbf{N}^*$ εμφανίζονται επίσης οι «σταθερές», δηλαδή τα στοιχεία του **N**.

Εκτός τούτου είναι προφανώς $1 \leqq f$, όπου f είναι ένα τυχόν στοιχείο του $\mathbf{N}^*$, και για κάθε στοιχείο f(t) του $\mathbf{N}^*$ υπάρχει ένα αμέσως μεγαλύτερο, δηλαδή το f(t)+1. το ότι είναι f<f+1 στο $\mathbf{N}^*$ είναι άμεσα εμφανές. Αλλά δεν μπορεί κανείς να έχει επίσης f<h<f+1, γιατί αυτό θα σήμαινε, ότι για αρκετά μεγάλα t θα είχαμε fg(t)<hg(t)<fg(t)+1, πράγμα που είναι αδύνατο.

Ως εκ τούτου αρχίζει η ακολουθία $\mathbf{N}^*$ με τα στοιχεία 1,2,3,… της **N**.

Από την άλλη πλευρά είναι το στοιχείο t του $\mathbf{N}^*$, δηλαδή η συνάρτηση f(t)=t προφανώς μεγαλύτερη από κάθε σταθερά, δηλαδή από κάθε στοιχείο του **N**, γιατί η fg(t) = g(t) αυξάνεται, βέβαια, με το t μέχρι το άπειρο. Άρα αποτελεί πράγματι το **N** ένα γνήσιο αρχικό κομμάτι του $\mathbf{N}^*$.

Τα στοιχεία του **M**, που είναι συναρτήσεις στο **N**, μπορούν να ορισθούν και ως συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$, και μάλιστα έτσι, ώστε να διατηρούν το νόημά τους στο **N**:

Έστω ότι $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ είναι μία τέτοια συνάρτηση και έστω ότι $\varphi_1(t)$, …, $\varphi_n(t)$ είναι μεταβλητά στοιχεία του $\mathbf{N}^*$. Κάθε φορά που κάνουμε μίαν ειδική επιλογή για τα $\varphi_1$, …,$\varphi_n$, έστω $f_1$, $f_2$, …,$f_n$, παίρνουμε με αντικατάσταση των $f_1(t)$, …,$f_n(t)$ στην θέση των $x_1,\ldots,x_n$ την συνάρτηση $F(f_1(t), \ldots,f_n(t))$, η οποία ανήκει πάλι στο **M** λόγω της κλειστότητας ως προς αντικαταστάσεις, άρα επίσης στο $\mathbf{M_1}$ αφού εμφανίζεται μόνο μία μεταβλητή t. Αυτό σημαίνει όμως:

Για κάθε επιλογή των τιμών των μεταβλητών $\varphi_1$, …,$\varphi_n$ από το $\mathbf{N}^*$ παριστάνει η $F(\varphi_1, \ldots,\varphi_n)$ πάλι ένα στοιχείο του $\mathbf{N}^*$. Με αυτόν τον τρόπο έχει ορισθεί η F ως συνάρτηση n μεταβλητών μέσα στο $\mathbf{N}^*$.

Επίσης είναι φανερό ότι αν διαλέξουμε ως $\varphi_1(t)$, …, $\varphi_n(t)$ n σταθερές, π. χ. τις $a_1$, …, $a_n$, η $F(a_1, \ldots, a_n)$ παριστάνει πάλι μίαν σταθερά και αυτή η σταθερά είναι η τιμή στο **N** της συνάρτησης $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ για τις τιμές $a_1$, …, $a_n$ στο **N** των μεταβλητών $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν λοιπόν πράγματι να θεωρηθούν οι συναρτήσεις $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ στο **N** και ως συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$, με διατήρηση του νοήματός τους στο **N**.

M", **Π'** : Κάθε πρόταση στο **Π** μπορεί να γραφτεί στην μορφή

(9) **$**x"y$z"u$v** …A(x, y, z, u, v …)

όπου

**$**x=**$**$x_1$…**$**$x_m$, **"**y=**"**$y_1$…**"**$y_n$ , **$**z=**$**$z_1$…**$**$z_p$, **"**u=**"**$u_1$…**"**$u_q$, **$**v= **$**$v_1$…**$**$v_r$

ενώ $x=x_{[1,m]}=(x_1, \ldots,x_m)$, κ.ο.κ.

Εδώ μπορούν να λείπουν τα πρώτα σύμβολα '**$**' (δηλαδή m=0), έτσι ώστε η παράσταση να αρχίζει με '**"**'. Αυτή η πρόταση είναι όμως ισοδύναμη με την ακόλουθη:

Υπάρχουν κάποιοι αριθμοί $a_k$, k=1(1)m και κάποιες συναρτήσεις $f_j(y)$, j=[1,p]=1(1)p , $g_s(y, u)$, s=[1,r], … {δηλαδή x=a, z=f(y), v=g(y, u)} τέτοιες ώστε [η παράσταση]

(10) A(a , y, f(y), u, g(y, u), … )

να είναι ένας τύπος, δηλαδή αληθής για τυχαίες τιμές των y, u, ….

Μπορούμε, δηλαδή, να επεκτείνουμε το M' σε ένα σύνολο M" τέτοιο, ώστε κάθε πρόταση του **Π** να μπορεί να γραφτεί ως {πάντοτε αληθής} τύπος με την βοήθεια των συναρτήσεων από το M".

$\mathbf{N}^*$: Έστω ότι το σύνολο αυτών των τύπων {δηλαδή των τύπων **"**y**"**u …A(a, y, f(y), u, g(y,u) …)} είναι **Π'**. Σύμφωνα με το γενικό κριτήριο διάταξης συναρτήσεων ΦΑ, μπορούμε τότε να σχηματίσουμε μίαν ακολουθία $\mathbf{N}^*$, που το **N** είναι γνήσιο αρχικό της τμήμα, και να ορίσουμε μίαν επέκταση του νοήματος όλων των συναρτήσεων {f(y), g(y,u) κ.ο.κ.} από το M" έτσι, ώστε οι τελευταίες να γίνουν συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$ διατηρώντας το νόημά τους στο **N**.

{M" είναι το σύνολο των ελαχιστότιμων συναρτήσεων (minimal-value functions) που η κατασκευή τους περιγράφεται κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 3 ενώ το $\mathbf{N}^*$ προκύπτει με αντικατάσταση συναρτήσεων μίας μεταβλητής στην θέση των παραμέτρων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών}.

## 2. Συμβολισμός

Στα παρακάτω η t είναι απλή μεταβλητή Φυσικών Αριθμών t**œN**, ενώ x,y,z,u,v είναι πολλαπλότητες μεταβλητών:

$x=x_{[1,m]}=(x_1, \ldots,x_m)$**œ**$\mathbf{N}^m$, $y=y_{[1,n]}=(y_1, \ldots,y_n)$**œ**$\mathbf{N}^n$, $z=z_{[1,p]}=(z_1, \ldots,z_p)$**œ**$\mathbf{N}^p$,

$u=u_{[1,q]}=(u_1, \ldots,u_q)$**œ**$\mathbf{N}^q$, $v=v_{[1,r]}=(v_1, \ldots,v_r)$**œ**$\mathbf{N}^r$, κ.ο.κ.

Επίσης f(t) είναι μία πολλαπλότητα συναρτήσεων του t:

$$f(t)=f_{[1,n]}(t)=(f_1(t), \ldots,f_n(t))$$

Παρόμοια, η F(x) είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών:

$F(x)=F(x_{[1,m]})=F(x_1, \ldots,x_m)$, και $F(f(t))=F(f_{[1,n]}(t))=F(f_1(t), \ldots,f_n(t))$

Η χρήση ενός διαστήματος ΦΑ ως δείκτη εισάγεται για να μπορούν να παρασταθούν συνοπτικά διαφορετικά τμήματα μίας πολλαπλότητας μεταβλητών. Π.χ.:

$$F(a_1, x_{[2,m]})=F(a_1, x_2, \ldots,x_m)$$

Κατ' αναλογία χρησιμοποιούμε τους συνοπτικούς συμβολισμούς:

$\$x = \$x_{[1,m]} = \$x_1\ldots\$x_m$, $"y = "y_{[1,n]} = "y_1\ldots"y_n$, ενώ $\$z_{[2,p]} =\$z_2\ldots\$z_p$ , κ.ο.κ.[10]

Επίσης:

$$¤A_{[1,n]} = A_1¤A_2¤\ldots¤A_n$$

ενώ $A_k$ είναι η σύζευξη των παραστάσεων $(F_{k,j}(x)\ B_{k,j}\ G_{k,j}(x))$ για j=[1,n]:

$$A_k =\&(F_{k,j}(x)\ B_{k,j}\ G_{k,j}(x))_{j=[1,m(k)]}=(F_{1k}(x)B_{1k}G_{1k}(x))\&\ldots\&(F_{m(k),k}(x)B_{m(k),k}G_{m(k),k}(x))$$

### 3. Τα βασικά θεωρήματα σε συνοπτική γραφή

*Θεώρημα 2. Αν οι συναρτήσεις του συνόλου* **M** *θεωρηθούν ως συναρτήσεις στο* $\mathbf{N}^*$ *, κάθε τύπος του συνόλου* **Π** *παραμένει σε ισχύ μέσα στο* $\mathbf{N}^*$.

Απόδειξη: Έστω ότι δίνεται ένας τυχαίος τύπος A {δηλαδή το αντίστοιχο μίας καθολικής ισχύος πρότασης} *του συνόλου* **Π**. Είναι κατασκευασμένος με σύζευξη (&), διάζευξη (¤), και άρνηση (~) από σχέσεις '=' ή '<' [μεταξύ αριθμητικών συναρτήσεων].

Τώρα όμως ισχύει τόσο στο **N** όσο και στο $\mathbf{N}^*$, ότι η άρνηση του x=y μπορεί να γραφτεί ως διάζευξη (x<y)¤(y<x) και η άρνηση του x<y ως η διάζευξη (x=y)¤(y<x). Ως εκ τούτου μπορεί ο δοσμένος τύπος να κατασκευασθεί μέσω σύζευξης και διάζευξης αποκλειστικά σχέσεων με '=' ή '<' και μάλιστα με τον ίδιο τρόπο τόσο στο $\mathbf{N}^*$, όσο και στο **N**[11].

Ως γνωστόν μπορεί τότε να γραφτεί ο A στην μορφή

(7) $$A_1¤A_2¤\ldots¤A_n$$

όπου κάθε $A_i$ σχηματίζεται μόνο με σύζευξη, περίπου ως εξής:

$$(F_{1i}(x)\ B_{1i}\ G_{1i}(x))\&\ldots\&\ (F_{m(i),i}(x)\ B_{m(i),i}\ G_{m(i),i}(x))$$

όπου $x= (x_1,\ldots, x_n)$ και κάθε $B_{j,i}$ σημαίνει το σύμβολο '=' ή το σύμβολο '<'.

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι, λοιπόν, ο A αληθής για μίαν τυχαία επιλογή των τιμών των n μεταβλητών x στο **N**. Πρέπει να αποδειχθεί ότι αν οι $x_k$, k=1(1)n αντικατασταθούν με n μεταβλητά στοιχεία $\varphi_k(t)$ του $\mathbf{N}^*$, τότε είναι ο *A* αληθής για μίαν τυχαία επιλογή αυτών των συναρτήσεων φ στο $\mathbf{N}^*$.

Έστω τώρα ότι $f_k(t)$ είναι μία τυχαία ειδική επιλογή των μεταβλητών συναρτήσεων $\varphi_k$. Τότε παριστάνει κάθε $F_{r,i}(f(t))$ ένα ειδικό στοιχείο του $\mathbf{N}^*$, που θα το ονομάσω συντομότερα $f_{r,i}(t)$. Παρομοίως ονομάζω το $G_{r,i}(f(t))$ συντομότερα $g_{r,i}(t)$. Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις υπάρχει τώρα ένα στοιχείο $t_{r,i}$ του **N** τέτοιο, ώστε για $t> t_{r,i}$ παραμένει μία σταθερή σχέση

[10] Θα μπορούσαμε επίσης να γράψουμε:

$$\$z_{[2,p]} =\$_{k=[2,p]}\ z_k = \$z_2\ldots\$z_p \text{ ή } "y_{[2,n]} ="_{k=[2,n]}\ y_k = "y_2\ldots"y_n,$$

[11] Μπορεί κανείς επίσης να απαλείψει τις διαζεύξεις και ανισώσεις. Βλέπε σελ.13 παρ.14.

<,=, ή > μεταξύ $f_{r,i}g(t)$ και $g_{r,i}g(t)$. {Όπου g(t) μία διατάσσουσα συνάρτηση, που υπάρχει με βεβαιότητα κατά το Θεώρημα 1}.

Έστω τώρα ότι T είναι το μέγιστο των πεπερασμένου πλήθους αριθμών $t_{r,i}$ . Αν τώρα μπει ειδικά t=g(T+1), δηλαδή $x_k=f_kg(T+1)$, k=1,2,…,n , στις (7) και (8), τότε είναι ο A αληθής. Δηλαδή, τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα $A_i$ αληθεύει. Έστω, λοιπόν ότι αληθεύει ο $A_a$ .

Τότε είναι λοιπόν όλες οι σχέσεις

$$f_{r,a}g(T+1)\ B_{r,a}\ g_{r,a}g(T+1) \quad r=1,2,..,m_a$$

αληθείς. Αφού όμως η σχέση $B_{r,a}$ μεταξύ των $f_{r,a}g(t)$ και $g_{r,a}g(t)$ παραμένει σταθερή για όλα τα t>T έχει το στοιχείο $f_{r,a}$ του $\mathbf{M_1}$ στην ακολουθία $\mathbf{N}^*$, την σχέση $B_{r,a}$ προς το $g_{r,a}$. Με άλλα λόγια, για r = 1,2,…,n έχουμε

$$F_{r,a}(f(t))\ B_{r,a}\ G_{r,a}(f(t))$$

Δηλαδή ο $A_a$ είναι αληθής για την ειδική επιλογή n στοιχείων $f_1$, …,$f_n$ του $\mathbf{N}^*$. Άρα είναι και ο A αληθής γι' αυτήν την επιλογή στοιχείων. Επειδή όμως αυτή η επιλογή ήταν τυχαία, είναι ο A πράγματι ένας αληθής τύπος στο $\mathbf{N}^*$.

{Δηλαδή ο A ισχύει για κάθε n-αδα $f_1(t)$, …,$f_n(t)$ όρων του $\mathbf{N}^*$}.

*<u>Θεωρημα3:</u> Έστω ότι **Π** είναι ένα σύνολο από πεπερασμένες ή αριθμήσιμα άπειρες προτάσεις σχετικά με τα στοιχεία του **N**, όπου τώρα εμφανίζεται και ο ποσοδείκτης «υπάρχει»* (**$**). *Επί πλέον ας έχει το M΄ την προηγούμενη σημασία του. Τότε:*

*Είναι δυνατόν να επεκτείνει κανείς το M΄ με προσθήκη νέων στοιχείων σε ένα σύνολο M΄΄ έτσι, ώστε κάθε πρόταση στο **Π** μπορεί να γραφτεί ως τύπος μέσω των συναρτήσεων στο M΄΄.*

*<u>Απόδειξη:</u>* Κάθε πρόταση στο **Π** μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$(9) \qquad \$x"y\$z"u\$v\ \ldots A(x, y, z, u, v\ \ldots)$$

όπου

$$\$x=\$x_1\ldots\$x_m,\ "y="y_1\ldots"y_n\ ,\ \$z=\$z_1\ldots\$z_p,\ "u="u_1\ldots"u_q,\ \$v=\ \$v_1\ldots\$v_r$$

$$\text{ενώ } x=x_{[1,m]}=(x_1,\ \ldots,x_m),\ \text{κ.ο.κ.}$$

Εδώ μπορούν να λείπουν τα πρώτα σύμβολα '**$**' (δηλαδή m=0), έτσι ώστε η παράσταση να αρχίζει με '**"**'. Αυτή η πρόταση είναι όμως ισοδύναμη με την ακόλουθη:

Υπάρχουν κάποιοι αριθμοί $a_k$, k=1(1)m και κάποιες συναρτήσεις $f_j(y)$, j=[1,p]=1(1)p , $g_s(y, u)$, s=[1,r], … τέτοιες ώστε [η παράσταση]

$$(10) \qquad A(a\ ,\ y, f(y), u, g(y, u), \ldots\ )$$

να είναι ένας τύπος, δηλαδή αληθής για τυχαίες τιμές των y, u, ….

Μπορεί κανείς τώρα να θεωρήσει ότι έχουν επιλεγεί τέτοιοι ειδικοί αριθμοί και τέτοιες αριθμητικές συναρτήσεις για κάθε πρόταση στο *M*.

Είναι εύκολο να ορισθεί για όλες τις αληθείς προτάσεις μία μονοσήμαντα ορισμένη επιλογή αυτών των αριθμών και αριθμητικών συναρτήσεων:

Θέτουμε αρχικά

$$"y\$z"u\$v\ \ldots A(x, y, u, v, \ldots) = B(x)$$

και διατάσσουμε όλες τις m-αδες $x=x_{[1,m]}=(x_1,\ \ldots,\ x_m)$ λεξικογραφικά. Έπειτα επιλέγουμε την m-αδα $a=(a_1,\ \ldots,\ a_m)$ ως την πρώτη (μικρότερη) για την οποία ισχύει η B.

Έπειτα θέτουμε

$$\$z_{[1,p]}"u\$v \ldots A(a, y, z, u, v, \ldots)=C_1(y_{[1,n]},\ldots, z_1)$$

Τότε είναι, λοιπόν, η $"yC_1(y, z_1)$ αληθής.

Εδώ μπορούμε να επιλέξουμε το $z_1$ για κάθε n-αδα $y= (y_1, \ldots, y_n)$, όσο πιο μικρό γίνεται έτσι ώστε να είναι η $C_1$ αληθής. Έτσι ορίζεται το $z_1$ μονοσήμαντα ως συνάρτηση $f_1(y)=f_1(y_1, \ldots, y_n)$. Στην συνέχεια θέτουμε

$$\$z_{[2,p]}"u\$v \ldots A(a, y, f_1(y), z_{[2,p]}, u, v, \ldots)=C_2(y, z_2)$$

ώστε να είναι η $"y\$z_2C_2(y, z_2)$ αληθής.

Για κάθε n-αδα $y_{[1,n]}$, μπορούμε τότε πάλι να επιλέξουμε το $z_2$ όσο πιο μικρό γίνεται έτσι, ώστε να είναι η $C_2(y, z_2)$ αληθής. Έτσι ορίζεται η $z_2$ μονοσήμαντα ως συνάρτηση $f_2(y)$.

Την επόμενη φορά θέτουμε

$$\$z_{[3,p]}"u_{[1,q]}\$v_{[1,r]} \ldots A(a_{[1,m]}, y_{[1,n]}, f_1(y_{[1,n]}), f_2(y_{[1,n]}), z_{[3,p]}, u_{[1,q]}, v_{[1,r]r},\ldots) = C_3(y_{[1,n]}, z_3)$$

κ.ο.κ. Όταν έχουν ορισθεί όλα τα z ως συναρτήσεις των $y_1, \ldots, y_n$ τότε θέτουμε

$$\$v_{[2,r]} \ldots A(a_{[1,m]}, y_{[1,n]}, f_{[1,p]}(y_{[1,n]}), u_{[1,q]}, v_{[1,r]}, \ldots)=D_1(y_{[1,n]}, u_{[1,q]}, v_1)$$

Τότε αληθεύει η $"y_{[1,n]}"u_{[1,q]}\$v_1\ D_1(y_{[1,n]}, u_{[1,q]}, v_1)$ και μπορούμε, για κάθε (n+q)-άδα $y_{[1,n]}$, $u_{[1,q]}$ να επιλέξουμε το $v_1$ όσο μικρότερο γίνεται, ώστε να αληθεύει η $D_1(y_{[1,n]}, u_{[1,q]}, v_1)$. Έτσι ορίζεται το $v_1$ μονοσήμαντα ως συνάρτηση $g_1(y_{[1,n]}, u_{[1,q]})$. Μετά θέτουμε

$$\$v_{[3,r]} \ldots A(a_{[1,m]}, y_{[1,n]}, f_{[1,p]}(y_{[1,n]}), u_{[1,q]}, g_1(y_{[1,n]}, u_{[1,q]}), v_{[2,r]}, \ldots)=D_2(y_{[1,n]}, u_{[1,q]}, v_2)$$

κ.ο.κ.

Είναι φανερό το πώς ορίζεται με αυτόν τον τρόπο για κάθε πρόταση στο **Π** μονοσήμαντα μία επιλογή αριθμών $a_1, \ldots, a_m$, και αριθμητικών συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_r, \ldots$ .

Αν προστεθούν οι συναρτήσεις που ορίσθηκαν με αυτόν τον τρόπο στο M' μπορεί κάθε πρόταση (9) του **Π** να γραφτεί στην μορφή (10).

Η παράσταση (10) αληθεύει τότε για τυχαίες τιμές των ελεύθερων μεταβλητών $y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_q, \ldots$ και παριστάνει, επομένως, έναν τύπο. Έτσι αποδείχθηκε το θεώρημα 3.

*<u>Θεώρημα 4:</u> Έστω ότι τα* **Π** και M' *έχουν το ίδιο νόημα όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Τότε υπάρχει ένα διατεταγμένο σύνολο* ***N**** *, του οποίου το* ***N*** *είναι ένα γνήσιο αρχικό κομμάτι τέτοιο, ώστε κάθε πρόταση του* ***Π*** *είναι επίσης πρόταση του* ***N**** *, με κάποια επέκταση του νοήματος των συναρτήσεων από το M', έτσι ώστε να γίνουν συναρτήσεις στο* ***N**** *με διατήρηση του νοήματός τους στο* ***N.***

*<u>Απόδειξη:</u>* Σύμφωνα με το θεώρημα 3 μπορούμε να επεκτείνουμε το M' σε ένα σύνολο M'' τέτοιο, ώστε κάθε πρόταση του **Π** να μπορεί να γραφτεί ως {πάντοτε αληθής} τύπος με την βοήθεια των συναρτήσεων από το M''. {M'' είναι το σύνολο των ελαχιστότιμων συναρτήσεων (minimal-value functions) που κατασκευάσαμε κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 3}.

Έστω ότι το σύνολο αυτών των τύπων είναι **Π'**.

Σύμφωνα με τα προκαταρτικά του θεωρήματος 2, μπορούμε τότε να σχηματίσουμε μίαν ακολουθία $\mathbf{N}^*$, που το **N** είναι γνήσιο αρχικό της τμήμα, και να ορίσουμε μίαν επέκταση του νοήματος όλων των συναρτήσεων από το M'' έτσι, ώστε οι τελευταίες να γίνουν συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$ διατηρώντας το

νόημά τους στο **N**. Παράλληλα, σύμφωνα με το θεώρημα 2, παραμένουν ακόμα οι τύποι του **Π'** σε ισχύ στο $\mathbf{N}^*$. Αν όμως ένας τύπος όπως ο (10) ισχύει στο $\mathbf{N}^*$, προφανώς ισχύει τότε και η πρόταση (9), όπου στην (9) εμφανίζονται μόνο οι επεκτεταμένες συναρτήσεις από το M'.
Έτσι έχει αποδειχθεί το θεώρημα 4. Το περιεχόμενό του μπορεί να εκφρασθεί ως εξής:

*Πεπερασμένες ή αριθμήσιμα άπειρες προτάσεις με μόνο ατομικές μεταβλητές, που ισχύουν για μίαν ακολουθία τύπου ω, δεν μπορούν να διακρίνουν αυτήν την ακολουθία από ορισμένες ακολουθίες ανωτέρου διατακτικού τύπου.*

Από αυτό προκύπτει όμως αμέσως ότι:

*Ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο σύστημα αξιωμάτων, που τα αξιώματά του είναι προτάσεις μόνο με αριθμητικές μεταβλητές, δεν μπορεί να χαρακτηρίσει την ακολουθία των αριθμών. Ένας πλήρης χαρακτηρισμός της ακολουθίας των αριθμών δεν είναι ως εκ τούτου με κανέναν τρόπο δυνατός.*

{{**Προκαταρκτικά Θ2:** Έστω ότι η μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση g(t) είναι τέτοια, ώστε, αν είναι $f_i(t)$ και $f_j(t)$ δύο τυχαία στοιχεία του $\mathbf{M_1}$, τότε ισχύει για όλα τα $t>t_{i,j}$ πάντοτε μία σταθερή σχέση μεγέθους μεταξύ των $f_ig(t)$ και $f_jg(t)$. Αυτό το χρησιμοποιώ για να ορίσω μίαν γραμμική διάταξη όλων των στοιχείων του $\mathbf{M_1}$. Αν, δηλαδή, ισχύει για όλα τα $t>t_{i,j}$ η σχέση $f_ig(t)$ B $f_jg(t)$, όπου B σημαίνει είτε <, είτε =, είτε >, βάζω για τα στοιχεία $f_i$ και $f_j$ του $\mathbf{M_1}$,

$$f_i \text{ B } f_j.$$

Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται μία γραμμική διάταξη του $\mathbf{M_1}$.

Αυτήν την ακολουθία των στοιχείων του $\mathbf{M_1}$ την ονομάζω $\mathbf{N}^*$.

Η **N** αποτελεί ένα γνήσια αρχικό κομμάτι της $\mathbf{N}^*$, γιατί μεταξύ των στοιχείων του $\mathbf{N}^*$ εμφανίζονται επίσης οι «σταθερές», δηλαδή τα στοιχεία του **N**.

Εκτός τούτου είναι προφανώς $1 \leq f$, όπου f είναι ένα τυχόν στοιχείο του $\mathbf{N}^*$, και για κάθε στοιχείο f(t) του $\mathbf{N}^*$ υπάρχει ένα αμέσως μεγαλύτερο, δηλαδή το f(t)+1. Το ότι είναι f<f+1 στο $\mathbf{N}^*$ είναι άμεσα εμφανές. Αλλά δεν μπορεί κανείς να έχει επίσης f<h<f+1, γιατί αυτό θα σήμαινε, ότι για αρκετά μεγάλα t θα είχαμε fg(t)<hg(t)<fg(t)+1, πράγμα που είναι αδύνατο.

Ως εκ τούτου αρχίζει η ακολουθία $\mathbf{N}^*$με τα στοιχεία 1,2,3,... της **N**.

Από την άλλη πλευρά είναι το στοιχείο t του $\mathbf{N}^*$, δηλαδή η συνάρτηση f(t)=t προφανώς μεγαλύτερη από κάθε σταθερά, δηλαδή από κάθε στοιχείο του **N**, γιατί η fg(t) = g(t) αυξάνεται, βέβαια, με το t μέχρι το άπειρο. Άρα αποτελεί πράγματι το **N** ένα γνήσιο αρχικό κομμάτι του $\mathbf{N}^*$.

Τώρα μπορούν τα στοιχεία του **M**, που είναι κατ' αρχήν συναρτήσεις στο **N**, να ορισθούν και ως συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$, και μάλιστα έτσι, ώστε να διατηρούν το νόημά τους στο **N**.

Δηλαδή, έστω ότι:

(6) $$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

είναι μία τέτοια συνάρτηση και έστω ότι $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ είναι μεταβλητά στοιχεία του $\mathbf{N}^*$. Κάθε φορά που κάνουμε μίαν ειδική επιλογή για τα $\varphi_1$, ...,$\varphi_n$, έστω $f_1$, $f_2$, ...,$f_n$, παίρνουμε με αντικατάσταση των $f_1(t)$, ...,$f_n(t)$ στην θέση των $x_1$,...,$x_n$ την συνάρτηση $F(f_1(t), \ldots,f_n(t))$, η οποία ανήκει πάλι στο **M** λόγω

της κλειστότητας ως προς αντικαταστάσεις, άρα επίσης στο $\mathbf{M_1}$ αφού εμφανίζεται μόνο μία μεταβλητή t.

Αυτό σημαίνει όμως ότι για κάθε επιλογή των τιμών των μεταβλητών $\varphi_1$, ...,$\varphi_n$ από το $\mathbf{N}^*$ η $F(\varphi_1, ...,\varphi_n)$ παριστάνει πάλι ένα στοιχείο του $\mathbf{N}^*$. Με αυτόν τον τρόπο έχει ορισθεί η F ως συνάρτηση n μεταβλητών μέσα στο $\mathbf{N}^*$.

Επίσης είναι φανερό ότι αν διαλέξουμε ως $\varphi_1(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ n σταθερές, π. χ. τις $a_1$, ..., $a_n$, η $F(a_1, ..., a_n)$ παριστάνει πάλι μίαν σταθερά και αυτή η σταθερά είναι η τιμή στο **N** της συνάρτησης $F(x_1,x_2,...,x_n)$ για τις τιμές $a_1$, ..., $a_n$ στο **N** των μεταβλητών $x_1,x_2,...,x_n$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν λοιπόν πράγματι να θεωρηθούν οι συναρτήσεις $F(x_1,x_2,...,x_n)$ στο **N** και ως συναρτήσεις στο $\mathbf{N}^*$, με διατήρηση του νοήματός τους στο **N**. }}

**Παρατηρήσεις (βλ. 3α,3β στο Zahlenreihe34):**

**1.** Οι συναρτήσεις f(x) που αποτελούν στοιχεία του $\mathbf{N}^*$, <u>δεν</u> είναι οπωσδήποτε πολυώνυμα ως προς όλες τις παραμέτρους τους. Σύμφωνα με τα γραφόμενα στις σελίδες 3 και 4 ισχύει:

Σε κάθε περίπτωση που ισχύει **"x$yA(x,y)** μπορεί να εισαχθεί μία συνάρτηση f(x), έτσι ώστε να προκύψει ότι ισχύει A(x,f(x)) για κάθε x. Μεταξύ όλων των y για τα οποία ισχύει A(x,y) για ένα τυχαίο x, υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός, που μπορεί να ονομασθεί f(x) και προσδιορίζεται από το x (και την προτασιακή συνάρτηση A). Έτσι, η συνάρτηση y=f(x) είναι ισοδύναμη με A(x,y)&**"**z(A(x,z)**Ø**(y≦z)), {Δηλαδή, για κάποια x,y ισχύει A(x,y), και για κάθε z για το οποίο ισχύει A(x,z) ισχύει επίσης y≦z}, και έχουμε **"**xA(x,f(x)). Η A(x,y) αναφέρεται μεν σε σχέσεις μεταξύ πολυωνύμων των μεταβλητών x και y, αλλά η εξάρτηση του y από το x <u>δεν</u> είναι απαραίτητα πολυωνυμική. Παραδείγματα:

Π1. Η σχέση $x^2+y^2 \leqslant 25$ σημαίνει, με βάση τον κανόνα επιλογής για κάθε x του ελάχιστου y: (x,y) = (1,1), (2,1), (3,1), (4,1) μόνο. Άλλα ζεύγη δεν υπάρχουν. Άρα η σχέση αυτή <u>δεν</u> ορίζει μία προτασιακή συνάρτηση A(x,y), γιατί δεν ισχύει για <u>κάθε</u> x.

Π2. Η σχέση $x^2 \leqslant y$ έχει τις λύσεις (x,y)=(1,1), (2,4), (3,9), ... και γενικά, $y=x^2$.

Π3. Η σχέση $x^2 \leqslant 2y$ έχει τις λύσεις (x,y)=(1,1), (2,2), (3,5), (4,8), (5,13), ..., δηλαδή $y=[x^2/2]$ όπου [z] το ακέραιο μέρος του z. Η σχέση αυτή δεν είναι πολυωνυμική.

Π4. Η σχέση $x^2+1 \geqq 2y$ έχει τις λύσεις (x,y)=(1,1), (2,2), (3,5), (4,8), ... δηλαδή $y=[(x^2+1)/2]$.

Π5. Η σχέση $x^2 \leqslant 2y^3$ έχει τις λύσεις (x,y)=(1,1), (2,2), (3,2), (4,2), ... δηλαδή $y=[(x^2/2)^{1/3}]$.

Π6. Η σχέση: $x^n \leqslant ky^m$ επαληθεύεται για κάθε x και η ελαχιστότιμη επαληθεύουσα είναι: $f(x)=[(x^n/k)^{1/m}]$.

Η f(x) είναι η συνάρτηση των ελαχίστων τιμών που επαληθεύουν την σχέση A(x,y) αν αυτή επαληθεύεται με κατάλληλα y για <u>κάθε</u> τιμή του x.

**2.** Η κατασκευή αριθμητικών συναρτήσεων, που να αντιστοιχούν σε τύπους του φορμαλιστικού συστήματος της Αριθμοθεωρίας, γίνεται προφανώς για να επιβεβαιωθεί ότι για κάθε τέτοιον τύπο υπάρχουν συναρτήσεις από την ακολουθία $\mathbf{N}^*$ που να τον ικανοποιούν!!!

Έτσι ο Skolem διαπιστώνει ότι όλες οι γενικής ισχύος προτάσεις που μπορούν να παραχθούν από το εκάστοτε σύστημα αξιωμάτων ισχύουν και αν στην θέση των μεταβλητών βάλουμε αντί ΦΑ πολυώνυμα των ΦΑ {ή άλλες κατάλληλα κατασκευασμένες συναρτήσεις των ΦΑ}.

**3.** Για την κατασκευή συναρτήσεων που να επαληθεύουν τους τύπους του προτασιακού λογισμού δεν είναι οπωσδήποτε ανάγκη να πάρουμε τις ελαχιστότιμες συναρτήσεις!! Για την κατασκευή των συναρτήσεων που επαληθεύουν μία πρόταση μπορούμε, αντί για την ελάχιστη εκάστοτε επαληθεύουσα τιμή, να πάρουμε π. χ. την αμέσως μεγαλύτερη.

**4.** Η μη ισομορφία των ακολουθιών **N** και $\mathbf{N}^*$ αποδεικνύεται, όχι με βάση την Αριθμοθεωρία, αλλά μίαν Μεταθεωρία της, την Θεωρία Συνόλων.

**5. Δική μου πρόταση:** Αν M″ είναι το σύνολο των αληθών στο **N** τύπων της Αριθμοθεωρίας (που μπορούν να κατασκευασθούν με την μέθοδο του Skolem) και $\mathbf{N}^{**}$ είναι το μη αριθμήσιμο διατεταγμένο σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων, που περιγράφεται παρακάτω, οι συναρτήσεις αυτές επαληθεύουν του τύπους M″.

**6. Επεξήγηση του θεωρήματος 1 και στις δύο εργασίες**

α. Αν $f_j(t)$, $f_k(t)$ είναι δύο τυχαίες συναρτήσεις ακεραίων τότε ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα $f_j(x) > f_k(x)$, $f_j(x) = f_k(x)$, $f_j(x) < f_k(x)$ ισχύει για άπειρο πλήθος ΦΑ. Επομένως υπάρχει μία μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση ακεραίων $x=g(t)$ (η συνάρτηση που διατρέχει τις κατάλληλες τιμές του x) τέτοια ώστε ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα $f_j(g(t)) > f_k(g(t))$, $f_j(g(t)) = f_k(g(t))$, $f_j(g(t)) < f_k(g(t))$ ισχύει για όλους τους ΦΑ t.

β. Βασικό ερώτημα είναι τώρα αν για τρεις συναρτήσεις ακεραίων, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ υπάρχει συνάρτηση g(t) που να τις διατάσσει ενιαία.

Έστω, π.χ. ότι $f_1(g_1(t))$ ¥ $f_2(g_1(t))$. Συγκρίνοντας την $f_1g_1(t)$ με την $f_3g_1(t)$ έστω ότι έχουμε $f_1g_1g_2(t)$ ¥ $f_3g_1g_2(t)$. Επειδή είναι όμως ταυτοχρόνως και $f_1g_1g_2(t)$ ¥ $f_2\, g_1g_2(t)$ αρκεί να συγκρίνουμε τις $f_2g_1g_2(t)$ και $f_3g_1g_2(t)$. Έστω ότι είναι $f_2g_1g_2g_3(t)$ ¥ $f_3g_1g_2g_3(t)$. Τότε ισχύει προφανώς:

$$f_1g_1g_2g_3(t) \text{ ¥ } f_2g_1g_2g_3(t) \text{ ¥ } f_3g_1g_2g_3(t)$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $g(t)=g_1g_2g_3(t)$ δημιουργεί την ζητούμενη ενιαία διάταξη.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε μόνο το γεγονός ότι αν είναι $f_jg(t) > f_kg(t)$ θα είναι και $f_jgh(t) > f_kgh(t)$ για μίαν τυχαία συνάρτηση ακεραίων h(t).

## Παράρτημα 1
## Πώς απέδειξε το θεώρημά του ο Skolem

Εδώ θα δώσουμε μίαν απλουστευτική παρουσίαση των βασικών ιδεών της αποδείξεως που αναπτύσσει ο Skolem στις εργασίες του 1934 και 1935.

Ο Skolem χρησιμοποιεί ως αφετηρία των συλλογισμών του την ακόλουθη παραλλαγή των κλασσικών αξιωμάτων της Αριθμοθεωρίας, όπου ενσωματώνει και τα αξιώματα που ορίζουν την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, και θεωρεί ότι πρώτος φυσικός αριθμός είναι ο '1' και όχι ο '0' (Εδώ τα απλοποιούμε κάπως παραλείποντας τον φορμαλισμό):[12]

(1) Οι φυσικοί αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης '<'.

(2) Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός 1.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος, ο x+1.

(4) Υπάρχει μία πράξη '+', που λέγεται πρόσθεση, όπου ισχύει η αναδρομική σχέση

$$x+(y+1)=(x+y)+1.$$

(5) Υπάρχει μία πράξη που λέγεται πολλαπλασιασμός, [δοσμένη] με την [αναδρομική] σχέση

$$x(y+1)=xy+x.$$

(6) Αρχή της επαγωγής: Αν μία πρόταση[13], U(x), που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς x, ισχύει για x = 1 και από την ισχύ της για x=k έπεται ότι ισχύει και για x=k+1, τότε έπεται ότι η πρόταση ισχύει για όλους τους ΦΑ x.

(7) Αν μία τυχαία πρόταση U(.) ισχύει για τον αριθμό x και είναι x=y τότε ισχύει και για τον y. Δηλαδή, αν x=y, τότε οι προτάσεις U(x) και U(y) είναι ισοδύναμες.[14]

---

[12] Ακόμα και έτσι, βέβαια, η παραδοσιακή Αριθμητική είναι ελλιπής, αφού λείπει η αφαίρεση και η διαίρεση. Όμως αυτές οι πράξεις είναι απλά αντίθετες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και δεν προσδιορίζουν καλύτερα το τι είναι «φυσικός αριθμός», αφού μάλιστα στα πλαίσια των ΦΑ δεν μπορούν να εκτελεσθούν όλες οι αφαιρέσεις και διαιρέσεις. Οι πράξεις 2-3 και 2:3 δεν έχουν νόημα. Έτσι, ο Skolem αρκέσθηκε στο να εξετάσει μόνο αριθμητικές σχέσεις που ανάγονται σε προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς.

[13] Ακριβέστερα, ο Skolem μιλάει για «προτασιακές συναρτήσεις», δηλαδή τύπους που περιγράφουν κάποια ενδεχόμενη ιδιότητα φυσικών αριθμών. Ως «προτασιακές συναρτήσεις» θεωρούνται κάθε είδους προτάσεις που κατασκευάζονται μέσω των 5 λογικών πράξεων με βάση εξισώσεις, ή σχέσεις μεγαλυτέρου ή μικροτέρου μεταξύ *πολυωνύμων* [Zahlenreihe34, σελ. 2].

[14] (1) Οι αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης <. Αυτή η σχέση είναι ασύμμετρη και μεταβατική.

(2) Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός 1.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος x+1, δηλαδή $x<y \;\; x+1 \leqq y$.

(4) Υπάρχει μία πράξη +, που λέγεται πρόσθεση, όπου ισχύει η αναδρομική σχέση

$$x+(y+1)=(x+y)+1.$$

(5) Υπάρχει μία πράξη που λέγεται πολλαπλασιασμός, [δοσμένη] με την [αναδρομική] σχέση

$$x(y+1)=xy+x.$$

(6) Για μία οποιαδήποτε *προτασιακή συνάρτηση* [δηλ. *κατηγόρημα*] U(x) ισχύει η αρχή της επαγωγής:

$$U(1)\&\text{"}x(U(x)\text{Ø}U(x+1))\ \text{Ø}\ \text{"}yU(y)$$

Ο Skolem παρατηρεί τώρα ότι επανειλημμένες προσθέσεις και πολλαπλασιασμοί φυσικών αριθμών (ΦΑ) μας δίνουν μόνο πολυώνυμα με συντελεστές φυσικούς αριθμούς, δηλαδή μη αρνητικούς ακέραιους. Για παράδειγμα, $(x+y)*(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$. Αυτή είναι μία πολυωνυμική παράσταση ως προς τις μεταβλητές x και y, όπως μαθαίνουμε στο Γυμνάσιο.

Στην συνέχεια ο Skolem παρατηρεί ότι σχέσεις με μορφή ανισοτήτων, π. χ. x>y, με x, y από το σύνολο **N** των ΦΑ μπορούν να μεταβληθούν σε ισότητες αν χρησιμοποιήσουμε μια βοηθητική παράμετρο. Η σχέση x>y σημαίνει, προφανώς ότι υπάρχει ένας ΦΑ, z, τέτοιος ώστε x=y+z. Έτσι, αρκεί να ασχοληθούμε με τις ισότητες και μάλιστα ισότητες πολυωνύμων, που ισχύουν για το σύστημα αξιωμάτων (1) ως (7).

Αν, τώρα, έχουμε μίαν πρόταση του είδους «Για όλους τους ΦΑ x, y, z, ισχύει η σχέση F(x, y, z) = G(x, y, z)» ο Skolem παρατηρεί ότι η σχέση αυτή θα ισχύει ειδικότερα και αν στην θέση των τυχαίων ΦΑ x, y, z βάλουμε πολυώνυμα p(t), q(t), r(t) με φυσικούς αριθμούς ως συντελεστές, όπου το x παίρνει ως τιμές μόνο φυσικούς αριθμούς. Τέτοιου είδους πολυώνυμα έχουν ως τιμές μόνο φυσικούς αριθμούς και γι' αυτό θα τα ονομάσουμε «*πολυώνυμα φυσικών αριθμών*». Προφανώς θα ισχύει για όλα τα t η σχέση: F(p(t),q(t),r(t))= G(p(t),q(t),r(t)), αφού τα πολυώνυμα p,q,r έχουν μόνο ΦΑ ως τιμές και για όλους τους ΦΑ υποθέσαμε ότι ισχύει F=G.

Αν, αντίθετα, έχουμε μίαν πρόταση του είδους «Για όλους τους ΦΑ, x, υπάρχουν ΦΑ, y, τέτοιοι ώστε να είναι M(x,y)=N(x,y), τότε επιλέγουμε για κάθε x την ελάχιστη τιμή f(x) του y, για την οποία επαληθεύεται ο τύπος. Δηλαδή, για όλα τα x είναι M(x,f(x))=N(x,f(x)). Έτσι επεκτείνουμε το σύνολο των πολυωνύμων ΦΑ σε πιο γενικές συναρτήσεις ΦΑ με τέτοιον τρόπο ώστε κάθε τύπος, που ισχύει για όλους τους ΦΑ, να ισχύει και αν κάποιες μεταβλητές αντικατασταθούν με κατάλληλες συναρτήσεις ΦΑ, που <u>δεν</u> είναι πάντα πολυώνυμα.

Για παράδειγμα, η ανισότητα $x^m$ **§** $ky^n$ ισχύει για $y=[(x^m/k)^{1/n}]$, όπου [v] το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού v.

Έτσι, ο Skolem διαπιστώνει ότι όλες οι γενικής ισχύος προτάσεις που μπορούν να παραχθούν από το σύστημα αξιωμάτων ισχύουν και αν στην θέση των μεταβλητών βάλουμε αντί για ΦΑ πολυώνυμα των ΦΑ ή άλλες κατάλληλες συναρτήσεις ΦΑ.

Τώρα ο Skolem κάνει μίαν ευφυή κατασκευή. Ενσωματώνει στους ΦΑ και όλα τα πολυώνυμα ΦΑ και τις υπόλοιπες συναρτήσεις ΦΑ, που αντιστοιχούν σε γενικούς τύπους. Επεκτείνει έτσι το σύνολο **N** σε ένα σύνολο $\mathbf{N}^*$ πολυωνύμων και άλλων συναρτήσεων των ΦΑ. Για να το κάνει αυτό πρέπει όμως να βρει μία συγκεκριμένη διάταξη κατ' αρχήν για τα πολυώνυμα και στην συνέχεια για όλες τις συναρτήσεις ΦΑ, όπως οι ΦΑ έχουν την διάταξη: 0<1<2<3<4<5<… . Μία τέτοια διάταξη μπορούμε όμως να δώσουμε και στα πολυώνυμα ΦΑ, p(t). Κατ' αρχή έρχονται τα πολυώνυμα μηδενικού βαθμού,

---

(7) Για μία τυχαία προτασιακή συνάρτηση U(x) ισχύει:

(x=y) **Ø**(U(x)  U(y)).

$p_0(t)=c=$σταθερά, βαλμένα με την σειρά μεγέθους των σταθερών αυτών τιμών. Ουσιαστικά έχουμε, δηλαδή εδώ και πάλι τους ΦΑ με την γνωστή τους διάταξη. Έπειτα βάζουμε όλα τα πολυώνυμα πρώτου βαθμού $p_1(t,a,b)=at+b$, βαλμένα πρώτον κατά σειρά μεγέθους των συντελεστών a, και δεύτερον, στην περίπτωση ίδιων συντελεστών a, κατά σειράν μεγέθους των συντελεστών b. Δηλαδή γράφουμε:

$$t<t+1<t+2<\ldots<2t<2t+1<2t+2<\ldots<3t<3t+1<3t+2<\ldots<4t<\ldots.$$

Αυτή η διάταξη δεν είναι και τόσο αυθαίρετη. Για μεγάλες τιμές του t είναι πράγματι και οι τιμές, για παράδειγμα, του 3t πάντα μεγαλύτερες από αυτές έστω του 2t+10 ή ακόμα και του 2t+1000.

Στην συνέχεια βάζουμε τα πολυώνυμα δευτέρου βαθμού $p_2(t,a,b,c)=at^2+bt+c$, βαλμένα πάλι με την σειρά μεγέθους κατ' αρχήν των συντελεστών, a, του $t^2$. Για ίδιες τιμές του a διατάσσουμε κατά το μέγεθος των συντελεστών b, και για ίδιες τιμές των a και b διατάσσουμε κατά το μέγεθος των σταθερών όρων c. Δηλαδή γράφουμε:

$$t^2< t^2+1< t^2+2<\ldots< t^2+t< t^2+t+1< t^2+t+2<\ldots< t^2+2t< t^2+2t+1<\ldots< t^2+3t<\ldots< 2t^2< 2t^2+1< 2t^2+2<\ldots$$

Αυτή η διάταξη έχει πάλι το χαρακτηριστικό ότι ισχύει πράγματι για αρκετά μεγάλες τιμές του t. Για παράδειγμα, ισχύει πράγματι $2t^2> t^2+10t+100$ όταν το t υπερβαίνει την τιμή 17 ή ισούται με αυτήν. Γενικά, για δύο πολυώνυμα ΦΑ, p(t) και q(t) ισχύει η διάταξη $p(t)<q(t)$ αν η σχέση αυτή αληθεύει για άπειρες τιμές του t.

Έτσι προκύπτει μία διάταξη όλων των πολυωνύμων ΦΑ που περιλαμβάνει μάλιστα στην αρχή της και τους ίδιους τους ΦΑ. Η συνολική διάταξη είναι, δηλαδή:

$$0<1<2<\ldots<t<t+1<t+3<\ldots<2t<2t+1<\ldots<t^2<t^2+1<\ldots<2t^2<2t^2+1<\ldots<t^3<\ldots$$

Για να εντάξει σε αυτήν την διάταξη τις υπόλοιπες συναρτήσεις ΦΑ χρησιμοποιεί την ακόλουθη σύμβαση:

Αν f(t), g(t) είναι δύο συναρτήσεις ΦΑ τότε γράφουμε:

$f<g$ αν είναι $f(t) < g(t)$ <u>για άπειρες</u> τιμές του t,

$f=g$ αν είναι $f(t) = g(t)$ <u>για άπειρες</u> τιμές του t και

$f>g$ αν είναι $f(t) > g(t)$ <u>για άπειρες</u> τιμές του t.

Αν συμβαίνει περισσότερα από ένα από τα παραπάνω ενδεχόμενα, τότε επιλέγουμε κατά σειράν την πρώτη από τις παραπάνω διατάξεις η οποία ισχύει για άπειρες τιμές του t.

Για το διατεταγμένο αυτό σύνολο, $\mathbf{N}^*$, που είναι πολύ ευρύτερο από το σύνολο **N** των ΦΑ ισχύουν όμως όλα τα αξιώματα που μας έχουν δοθεί, ενώ όλες οι γενικής ισχύος σχέσεις ΦΑ ισχύουν και αν ορισμένες μεταβλητές αντικατασταθούν με συναρτήσεις ΦΑ, δηλαδή ισχύουν και στο $\mathbf{N}^*$.

Η κατάσταση αυτή δεν αλλάζει ακόμα και αν προσθέσουμε στα δοσμένα αξιώματα και άλλα αξιώματα, γιατί κάθε γενική πρόταση που ισχύει για το διατεταγμένο σύνολο **N** των φυσικών αριθμών μεταφέρεται άμεσα και σε μίαν αντίστοιχη πρόταση για το διατεταγμένο σύνολο $\mathbf{N}^*$ της επέκτασης του **N** σε πολυώνυμα (και άλλες συναρτήσεις) φυσικών αριθμών.

**Σχόλια**

**1.** Ίσως θα πείτε ότι η παραπάνω διάταξη $\mathbf{N}^*$ δεν είναι απόλυτα σωστή, γιατί δεν είναι πάντα, για παράδειγμα, $2t^2 > t^2+10t+100$, αλλά αυτό ισχύει μόνο για $t \geqq 17$. Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι το σύμβολο '<' δεν έχει εδώ το συμβατικό του νόημα, αλλά ότι επωφελούμαστε από την ελευθερία ερμηνείας των συμβόλων που μας παρέχει ο φορμαλισμός για να του δώσουμε ένα νόημα δικής μας επιλογής. Όπως είπαμε, θεωρούμε ότι η σχέση 'f(t)<g(t)' σημαίνει μόνο ότι για άπειρο πλήθος φυσικών αριθμών t η τιμή f(t) είναι μικρότερη από την g(t). Για τα πολυώνυμα φυσικών αριθμών αυτό συμβαίνει πάντα για αρκετά μεγάλες τιμές του t. δηλαδή, 'f(t)<g(t)' σημαίνει ότι η τιμή f(t) είναι μικρότερη από την g(t) «σχεδόν για όλα τα t», όπου «σχεδόν για όλα» σημαίνει «με εξαίρεση πεπερασμένο πλήθος». Αυτή είναι η ερμηνεία που επιλέγουμε να δώσουμε στο σύμβολο '<'. Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις ΦΑ 'f(t)<g(t)' σημαίνει ότι η τιμή f(t) είναι μικρότερη από την g(t) απλά για άπειρες τιμές του t, έστω και αν δεν ισχύει επίσης για άπειρες τιμές του t. Εδώ η επιλογή της διάταξης των συναρτήσεων είναι ακόμα πιο αυθαίρετη αλλά δεν αλλάζει την ουσία του φορμαλισμού. αλλάζει μόνο την εξω-φορμαλιστική ερμηνεία του.

Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι ο Skolem διαπιστώνει ότι όχι μόνο η ακολουθία **N** των φυσικών αριθμών, αλλά και η επέκτασή της σε μία ακολουθία όπως η **N'**:

$0<1<2<\ldots<t<t+1<\ldots<2t<2t+1<\ldots<t^2<t^2+1<\ldots<2t^2<2t^2+1<\ldots<t^3<\ldots$

ικανοποιεί τα ίδια αξιώματα, αν ερμηνεύσουμε το σύμβολο '<' που ορίζει και τις σχέσεις διαδοχής ως «σχεδόν πάντα μικρότερο». Επίσης διαπιστώνει ότι κάθε σχέση που ισχύει για όλους τους ΦΑ, δηλαδή τους όρους της ακολουθίας **N**, ισχύει υπό την παραπάνω ερμηνεία του συμβόλου '<' και για όλους τους όρους της $\mathbf{N}^*$, που είναι επέκταση της παραπάνω ακολουθίας **N'**. Το αντίθετο δεν ισχύει, βέβαια. Κάθε σχέση που ισχύει για την $\mathbf{N}^*$ δεν ισχύει οπωσδήποτε και για την **N**. Ο Skolem δίνει ένα παράδειγμα που τεκμηριώνει αυτό στην εργασία [5].

Αν δεχθούμε την άποψη των φορμαλιστών ότι δεν έχει σημασία πώς ερμηνεύουμε τον φορμαλισμό, υπάρχουν έτσι «Μη Συμβατικές Αριθμητικές» παράλληλα με την συμβατική[15]. Αυτό όμως δείχνει ότι ο Λογικός Ατομισμός δεν μπορεί να ευσταθεί αφού κανένα σύστημα αξιωμάτων, κανένα σύνολο θεμελιωδών ιδιοτήτων, δεν μπορεί να προσδιορίσει μονοσήμαντα τι είναι φυσικός αριθμός.

---

[15] 9.5.04: Στην πραγματικότητα ο Skolem μπορεί να κατασκευάσει, όχι μόνο ένα, αλλά <u>άπειρα</u> νέα αριθμητικά συστήματα, γιατί εισάγει τον συμβολισμό f<g για οποιεσδήποτε συναρτήσεις ΦΑ αν είναι f(t)<g(t) για άπειρο πλήθος ΦΑ t. Αντί για πολυώνυμα ΦΑ μπορεί να θεωρήσει «μίγματά» τους. Για παράδειγμα, $f(2k)=2k$, $f(2k+1)=(2k+1)^2$, $g(2k)=(2k)^2$, $g(2k+1)=2k+1$. Εδώ ισχύει f(t)<g(t) για άπειρους ΦΑ t, αλλά και f(t)>g(t) για άπειρους ΦΑ t. Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλών ειδών διατάξεις όπως είναι η **N'** αν αντί για πολυώνυμα ΦΑ πάρουμε «μίγματά» τους (βλ. παρατήρηση 7, σελ.22).

**2. Δική μου πρόταση:**

Αυτά ισχύουν επίσης και αν αντί για το σύνολο $\mathbf{N}^*$, πάρουμε κάποιο υπερσύνολο **M** του $\mathbf{N}^*$( $\mathbf{M}\ldots\mathbf{N}^*$). Ένα τέτοιο υπερσύνολο προκύπτει, για παράδειγμα, αν τοποθετήσουμε μετά το $\mathbf{N}^*$, την συνάρτηση $2^t$ και στην συνέχεια όλες όσες προκύπτουν από αυτήν με προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς. Μία δεύτερη επέκταση μπορούμε να έχουμε εισάγοντας στην συνέχεια την $3^t$ και τις παραγόμενες από αυτήν συναρτήσεις κ.ο.κ. Έτσι, για οποιαδήποτε επέκταση του παραπάνω συστήματος αξιωμάτων, μπορούμε να κατασκευάσουμε οσεσδήποτε θέλουμε, επεκτάσεις του συνόλου των ΦΑ που ικανοποιούν ακριβώς τα ίδια αξιώματα. Πρόκειται, όπως είδαμε, για διατεταγμένα σύνολα συναρτήσεων πολύ ευρύτερα από το σύνολο των ΦΑ αφού το περιλαμβάνουν ως υποσύνολο. Όμως όλα αυτά τα μοντέλα είναι αριθμήσιμα έστω και αν έχουν διαφορετικό διατακτικό χαρακτήρα.

**3**. Αν το σύμβολο '<' σημαίνει «μικρότερο για άπειρες τιμές του t» τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ακόμα πιο γενικές συναρτήσεις των ΦΑ, και έχουμε ακόμα μεγαλύτερη ελευθερία στον καθορισμό της διάταξης των συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν ορίσουμε την συνάρτηση f(t) για t φυσικό αριθμό με τις σχέσεις:

$$f(2k)=2k \text{ ενώ } f(2k+1)=(2k+1)^2$$

και την g(t) με τις σχέσεις:

$$g(2k)=(2k)^2,\ g(2k+1)=2k+1,$$

όπου ο k διατρέχει το **N**, τότε είμαστε ελεύθεροι να καθορίσουμε είτε την διάταξη $f(t)<g(t)$ είτε την διάταξη $f(t)>g(t)$ αφού και οι δύο ανισότητες ισχύουν για άπειρο πλήθος τιμών του k. Απλά πρέπει να επιλέξουμε εξ αρχής μία από τις δύο διατάξεις και να την χρησιμοποιούμε με συνέπεια από εκεί και μετά.

Γενικά, π.χ. τα «μίγματα πολυωνύμων»:
$f^{(0)}(t) = p_r(t)$, $t=qd+r$, $r=0(1)d-1$, $f^{(k)}(t) = p_{(r+k)\mathrm{mod}(d)}(t)$, $t=qd+r$, $r=0(1)d-1$, $k=0(1)d-1$, όπου $p_r(t)$ διάφορα πολυώνυμα ΦΑ, μπορούν να διαταχθούν με οποιονδήποτε τρόπο.

**4**. Η διάταξη:

$$0<1<2<\ldots<t<t+1<\ldots<2t<2t+1<\ldots<t^2<t^2+1<\ldots<2t^2<2t^2+1<\ldots<t^3<\ldots<2^t$$
$$<2^t+1<\ldots<2^t+t<\ldots<3^t<\ldots$$

οφείλεται στο ότι για $t>1$ ισχύει πάντα: $t<t^2<t^3<\ldots$, ενώ για κάθε δοσμένο ΦΑ, n, ισχύει $n<t$ όταν το t πάρει αρκετά μεγάλες τιμές (δηλαδή για $t\geqq n+1$). Επίσης είναι:

$$t^n<2^t<3^t<\ldots$$

για αρκετά μεγάλα t. Για παράδειγμα, για $n\geqq 4$ ισχύει $t^n\leqq 2^t$ όταν είναι $t=n^2$ (Η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί τότε με $n\leqq 2^n$ που ισχύει για $n\geqq 4$). Για $t>n^2$ θα ισχύει η ίδια ανισότητα, γιατί η ανισότητα $t^n\leqq 2^t$ ισοδυναμεί με $f(t)=\ln t/t-\ln 2/n<0$. Για $t\geqq 3$ είναι όμως $f'(t)=(1-\ln t)/t^2<0$. Δηλαδή η f(t) είναι μονοτόνως φθίνουσα. Αν για κάποια τιμή του t γίνει αρνητική, τότε για μεγαλύτερες τιμές θα είναι οπωσδήποτε αρνητική.

Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε: $100+t<2t$ για $t>100$ ενώ για $t>1$ είναι $2t<t+t^2$. Άρα είναι $100+t<2t<t+t^2$ για $t>100$.

**5**. <u>Ερώτημα:</u> Πώς προκύπτουν το $\mathbf{N}^*$ και τα υπερσύνολά του;

Απάντηση: Το σύνολο **N** είναι κλειστό σύνολο ως προς τα αθροίσματα και γινόμενα των όρων του, δηλαδή μαζί με τους όρους α και β περιλαμβάνει ως όρους και το α+β καθώς και το α*β.

Το $\mathbf{N}^*$ αποτελείται (μεταξύ άλλων και) από πολυώνυμα μίας μεταβλητής με ακέραιους θετικούς συντελεστές, τα γινόμενα και αθροίσματά τους (που είναι πάλι παρόμοια πολυώνυμα) καθώς και πολυώνυμα μίας μεταβλητής που προκύπτουν από πολυώνυμα πολλών μεταβλητών με ακέραιους θετικούς συντελεστές αν στην θέση των μεταβλητών αντικαταστήσουμε πολυώνυμα μίας μεταβλητής με ακέραιους θετικούς συντελεστές. Όλοι αυτοί οι παράγωγοι όροι πρέπει να προκύπτουν με συγκεκριμένο και *όχι μεταβλητό* αριθμό εφαρμογής προσθέσεων, πολλαπλασιασμών, κ.τ.λ. Δηλαδή, μαζί με τον όρο t περιλαμβάνεται στο $\mathbf{N}^*$ ο k*t και ο $t^k$ , με k *σταθερό*, αλλά <u>όχι</u> ο $t^t$ ή ο $2^t$. Ο όρος $2^t$ δεν προκύπτει από πεπερασμένο πλήθος πολλαπλασιασμών, δηλαδή μίαν πεπερασμένη αλγεβρική παράσταση σταθερού μήκους, αλλά από μίαν αναδρομική σχέση: $2^{t+1}=2*2^t$ και μπορούμε να τον συμπεριλάβουμε στην πρώτη επέκταση $\mathbf{N}^{**}$ του $\mathbf{N}^*$. Μαζί με αυτόν θα συμπεριληφθούν αναγκαστικά και οι $p(t)*2^{kt}$ , $p(2^t)$, $2^{p(t)}$, $2^{p(2Æt)}$ κ.ο.κ., αφού επιτρέπουμε μαζί με τις f(t), g(t) και τις f(g(t)) και g(f(t)). Στην δεύτερη επέκταση, $\mathbf{N}^{***}$ θα συμπεριλάβουμε το όρο $3^t$ και όλους όσοι παράγονται από αυτόν με την βοήθεια των όρων του $\mathbf{N}^{**}$.

Οι διαδικασίες κατασκευής νέων όρων παράγουν, δηλαδή, από τους όρους f(t), g(t) αρχικά τους f(t)+g(t), f(t)*g(t), f(g(t)) και στην συνέχεια όσους προκύπτουν με πεπερασμένο πλήθος επαναλήψεων αυτών των «πράξεων».

**6.** Όσοι αριθμοί δεν είναι αριθμήσιμοι δεν είναι αναγκαστικά μη διατάξιμοι κατά σειρά μεγέθους. Αριθμοί διατάξιμοι αλλά *μη αριθμήσιμοι* είναι οι πραγματικοί αριθμοί.

## Παράρτημα 2

**Δική μου πρόταση: Μη Αριθμήσιμο Διατεταγμένο Σύνολο που ενδεχόμενα ικανοποιεί τα ίδια αξιώματα με τους Φυσικούς Αριθμούς:**

Κατ' αναλογία με τα Πολυώνυμα Φυσικών Αριθμών του Skolem και τις επεκτάσεις τους τα πολύ-πολυώνυμα ΦΑ ή Μίγματα Πολυωνύμων ΦΑ, θεωρούμε κλιμακωτές ή βαθμιδωτές συναρτήσεις ΦΑ (Treppenfunktionen, step-functions), δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $f_p(t)=n_j$œ**N** για tœ[j,j+1).

Τις συναρτήσεις αυτές τις διατάσσουμε:

(α) αναλόγως της τιμής τους στο διάστημα [0,1).

(β) συναρτήσεις με την ίδια τιμή στο [0,1) τις διατάσσουμε αναλόγως της τιμής τους στο [1,2) κ.ο.κ.

Τέτοιου είδους συναρτήσεις $f_p(t)$, $f_q(t)$ ικανοποιούν οποιαδήποτε σχέση του τύπου F(m,n)=G(m,n) για κάθε m,nœ**N**, ($F(f_p(t),f_q(t))=G(f_p(t),f_q(t))$ για όλα τα p,q και για όλα τα tœ**N**).

Οι κλιμακωτές αυτές συναρτήσεις <u>δεν</u> είναι, όμως, αριθμήσιμες, γιατί αν δοθεί μία αντιστοίχησή τους προς το **N**: $f_1$, $f_2$, $f_3$,... τότε μπορώ να κατασκευάσω μίαν νέα κλιμακωτή συνάρτηση με διαφορετική τιμή από την $f_1$ στο [0,1), διαφορετική τιμή από την $f_2$ στο [1,2), κ.ο.κ., η οποία προφανώς δεν ανήκει στον κατάλογο αυτόν.

Η μόνη αντίρρηση που απομένει είναι ότι η παραπάνω διάταξη μεγέθους των κλιμακωτών συναρτήσεως ΦΑ είναι αυθαίρετη και απαράδεκτη εφ' όσον δεν είναι κατ' ανάγκη $f_p(t)<f_q(t)$ για όλα τα t αν αυτό ισχύει για tœ[0,1). Όμως αυτή η αντίρρηση είναι αντίθετη προς την αρχή του καθαρού φορμαλισμού, ότι μπορώ να ερμηνεύω το σύμβολο «<» με όποιον τρόπο θέλω, φτάνει να μην παραβαίνω τις σχέσεις που καθορίζονται από τα αξιώματα του φορμαλιστικού μου συστήματος. Όπως είπε ο Hilbert, τα αξιώματα της Γεωμετρίας θα πρέπει να ισχύουν αν ως σημεία ευθείες και επίπεδα φαντασθώ καρέκλες, τραπέζια και δωμάτια.

Σημειώνουμε ότι το παραπάνω σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων είναι μη αριθμήσιμο, ενώ το σύνολο των πολυωνύμων ΦΑ είναι μεν αριθμήσιμο, αλλά έχει άλλο διατακτικό αριθμό από ότι οι ΦΑ (μεταξύ δύο πολυωνύμων ΦΑ μπορεί να υπάρχουν άπειρα άλλα, ενώ αυτό δεν συμβαίνει για δύο τυχαίους ΦΑ).

<u>Παρατήρηση:</u> Τα πολυώνυμα ή άλλες συναρτήσεις ΦΑ, f:**N**Ø**N**, είναι ισοδύναμα, με ακολουθίες ΦΑ, γιατί μας ενδιαφέρουν μόνο για ακέραιες θετικές τιμές του x:

$$f(x),\ x\text{œ}\mathbf{N} \sim \{a_k\},\ a_k=f(k)$$

όπου '~' σημαίνει ισοδυναμία, δηλαδή ισομορφία.

Αν θεωρήσουμε συναρτήσεις με τιμές που παραμένουν σταθερές για xœ[k,k+1), τότε μπορούμε να τα θεωρήσουμε και ως ισοδύναμα με κλιμακωτές ή βαθμιδωτές συναρτήσεις: $f_{step}(x) = f(x)$ , xœ[k,k+1), δηλαδή συναρτήσεις που το γράφημά τους αποτελείται από σκαλοπάτια (βαθμίδες), που ανεβοκατεβαίνουν.

**Αντίλογος:** Οι παραπάνω συλλογισμοί περιέχουν ένα **ΛΑΘΟΣ**!!!

Οι κλιμακωτές συναρτήσεις (ΚΣ) δεν φαίνονται να ικανοποιούν τα βασικά αξιώματα της Αριθμοθεωρίας. Κάθε τέτοια συνάρτηση $f_r(t)$ μπορεί να αντιστοιχηθεί με την ακολουθία $F_r$={ $f_r(1)$, $f_r(2)$, $f_r(3)$, …} των τιμών που παίρνει για t=1,2,3,… (Το ίδιο ισχύει βέβαια και για τις συναρτήσεις ακεραίων του Skolem). Όμως εδώ δεν είναι εμφανές ποιες τέτοιες συναρτήσεις ή ακολουθίες αντιστοιχούν προς τους ΦΑ k**œN**.

Είναι k~{k,1,1,…}; Αλλά τότε έχουμε k+1 ~ {k,1,1,…}+{1,1,1,…}= {k+1,2,2,…} ενώ έπρεπε να είναι k+1~{k+1,1,1,…}.

Είναι k~{k,0,0,…} (έστω και αν το 0 δεν αποτελεί την αρχή της ακολουθίας των ΦΑ); Αλλά τότε για την σταθερή ΚΣ rep(a)~{a, a, a,…} θα έχουμε: 1*rep(a) ~ {1,0,0,…}* {a, a, a,…}= {a,0,0,…}**∫** {a, a, a,…}~rep(a).

Σημειώνω ότι με την κλασσική έννοια γινομένου συναρτήσεων πρέπει να είναι: $f(t)*g(t)|_{t=k}=f(k)*g(k)$, δηλαδή το γινόμενο συναρτήσεων για οποιαδήποτε τιμή του t νοείται ως γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους.

Ο Skolem έχει 1~{1,1,1,…} και k~{k, k, k, …}, δηλαδή:

k+1~ {k+1, k+1, k+1, …} και k*1~ {k, k, k, …} = k και μεταξύ k και k+1 δεν παρεμβάλλονται άλλοι όροι αντίθετα από τις ΚΣ που αντιστοιχούν και σε ακολουθίες της μορφής K={$k_1$, $k_2$, $k_3$, …} με διαφορετικά $k_j$. Είναι μεν εδώ:

K+1= {$k_1$+1, $k_2$+1, $k_3$+1, …} και K*1~ {$k_1$, $k_2$, $k_3$, …} (αν 1={1,1,1,…}) αλλά μεταξύ K και K+1 παρεμβάλλονται άπειροι όροι! Μεταξύ της ακολουθίας {k, k, k, …} και της {k+1, k+1, k+1, …} υπάρχουν, για παράδειγμα, οι ακολουθίες {k, k, k+1, …}, {k, k+1, k, …}, {k, k+1, k+1, …}.

**Απάντηση**

Τα αξιώματα που χρησιμοποιεί ο Skolem στην εργασία του 1934, άρα και στην διορθωμένη εργασία του 1935 είναι τα ακόλουθα:

(1) Οι αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης <. Αυτή η σχέση είναι ασύμμετρη και μεταβατική.

(2) Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός 1.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος x+1, δηλαδή x<y x+1≦y.

(4) Υπάρχει μία πράξη +, που λέγεται πρόσθεση, όπου ισχύει η αναδρομική σχέση

$$x+(y+1)=(x+y)+1.$$

(5) Υπάρχει μία πράξη που λέγεται πολλαπλασιασμός, [δοσμένη] με την [αναδρομική] σχέση

$$x(y+1)=xy+x.$$

(6) Για μία οποιαδήποτε *προτασιακή συνάρτηση* [δηλ. *κατηγόρημα*] U(x) ισχύει η αρχή της επαγωγής:

U(1)&"x(U(x)**Ø**U(x+1)) **Ø** "yU(y)

(7) Για μία τυχαία προτασιακή συνάρτηση U(x) ισχύει:

(x=y) **Ø**(U(x) U(y)).

Τα αξιώματα αυτά είναι όμως ισχυρότερα από αυτά του Peano. Ο Angelo Margaris [First Order Mathematical Logic p.128, p.182] χρησιμοποιεί τα ακόλουθα[16]:

N1. "x"y(x'=y'Øx=y)
N2. "x(x'∫0)
N3. "x(x+0=x)
N4. "x"y(x+y'=(x+y)')
N5. "x(x0=0)
N6. "x"y(xy'=xy+x)
N7. Για κάθε τύπο P(v):
P(0/v)& "v(P(v) ØP(v'/v)) Ø"vP(v)

όπου P(0/v) σημαίνει την πρόταση που προκύπτει με αντικατάσταση της μεταβλητής v με 0 μέσα στον τύπο (προτασιακή συνάρτηση) P(v). {Συχνά η P(0/v) συμβολίζεται απλά με P(0)}.

Ανάλογα αξιώματα δίνει ο Kleene [Mathematical Logic, p.206] και ο Gödel, ο οποίος χρησιμοποιεί τα N2, N1, N7 [έκδοση Dover, p.44] ενώ θεωρεί ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός αποτελούν αναδρομικά οριζόμενες συναρτήσεις [p.48, footnote 31][17].

Τα αξιώματα αυτά δεν περιλαμβάνουν όμως τον περιορισμό (3) του Skolem (x<y x+1≤y), που λέει ότι μεταξύ του x και του x+1 δεν υπάρχουν ενδιάμεσοι όροι της ακολουθίας των ΦΑ.

Αν παραλείψουμε αυτόν τον περιορισμό του Skolem τότε το μη αριθμήσιμο μοντέλο που προτείνουμε ικανοποιεί όλα τα άλλα αξιώματα.

Απλά δεν συμπίπτουν στο διατεταγμένο αυτό σύνολο ο x' (διάδοχος του x) και ο x+1.

Παρομοίως, η πλήρης επαγωγή ισχύει για το διατεταγμένο σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων (ή ακολουθιών) *έστω και αν δεν προσδιορίζει αιτιώδη σχέση.* Η αλήθεια των τύπων γU(1) και U(k)ØU(k+1) για όλους τους όρους k συνεπάγεται ότι η πρόταση U(x) ισχύει, αρχικά για όλους του ΦΑ x, και στην συνέχεια και αν στην U αντικατασταθεί ο ΦΑ x με μίαν κλιμακωτή συνάρτηση, αφού οι τιμές της είναι πάντα Φυσικοί Αριθμοί.

Ο Skolem εισάγει τους ΦΑ ως *ακολουθία,* ενώ στην συνήθη περιγραφή αυτού του συνόλου δεν εισάγεται η έννοια της ακολουθίας, ίσως επειδή θεωρείται ότι έμμεσα προϋποθέτει την έννοια των φυσικών αριθμών.

Ο Skolem, βέβαια, θα έλεγε «απλά εισάγω στα αξιώματά μου τα σύμβολα '+' και '<', ενώ θεωρώ ότι sx=x+1 δηλαδή x'=x+1».

**Παρατηρήσεις**

1. Πώς πρέπει να ορισθούν οι βασικές πράξεις μεταξύ κλιμακωτών συναρτήσεων ακεραίων ή ακολουθιών ακεραίων;

---

[16] Τα N2, N1, N7 χρησιμοποιούνται και από τον Gödel [έκδοση Dover, p.44] ενώ θεωρεί ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός αποτελούν αναδρομικά οριζόμενες συναρτήσεις [p.48, footnote 31].

[17] Παρόμοια αξιώματα δίνει ο dtv-Atlas Mathematik, Bd.1, S.53, όπου διευκρινίζεται και ότι οι πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός δεν συμπεριλαμβάνονται στα αξιώματα, γιατί μπορούν να ορισθούν επαγωγικά μέσω των σχέσεων: n+0=n, n+m'=(n+m)', n*0=0, n*m'=n*m+n.

Προφανώς για την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την σύνθεση είναι:

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\ (f*g)(t)=f(t)*g(t),\ (f \pm g)(t)=f(g(t))$$

Αντίστοιχα, για ακολουθίες θα ισχύει:

$\{a_k\}+\{b_k\}=\{a_k+b_k\}$, $\{a_k\}*\{b_k\}=\{a_k*b_k\}$, $\{a_k\}\pm\{b_k\}=\{a_{b(k)}\}$, όπου $b(k)=b_k$.

2. Για το διατεταγμένο σύνολο των κλιμακωτών συναρτήσεων είναι δx(t)∫x(t)+1, ενώ δx(t)+y(t)=δ(x(t)+y(t)) αλλά δx(t)*y(t)∫x(t)*y(t)+y(t).

Όμως τίποτα δεν μας εμποδίζει να ορίσουμε και εδώ την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με τις σχέσεις:

$$x(t)+0=x(t),\ x(t)*0=0,\ (x(t)+1)+y(t)=(x(t)+y(t))+1,$$
$$(x(t)+1)*y(t)=x(t)*y(t)+y(t).$$

Δηλαδή ορίζουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με χρήση του *φυσικού διαδόχου* x(t)+1 του x(t) και όχι του *μη συμβατικού διαδόχου* δx(t).

3. Σε κάθε πραγματικό αριθμό $a=0.a_1a_2a_3\ldots$œ[0,1) με $a_k$œ[0,9], $a_k$œ**N** μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μίαν κλιμακωτή συνάρτηση $f_a(t)$ με $f_a(k)=a_k$ kœ**N**. Άρα, οι κλιμακωτές συναρτήσεις είναι τουλάχιστον τόσες όσοι οι πραγματικοί αριθμοί από το [0,1). Για τις κλιμακωτές συναρτήσεις είναι $a_k$œ**N** τυχόν. Θα μπορούσαμε να περιορισθούμε σε αυτές με $a_k$œ[0,9] αλλά πρέπει να εντάξουμε στις κλιμακωτές συναρτήσεις και όλους τους ΦΑ. Η διάταξη των κλιμακωτών συναρτήσεων είναι, πάντως, ανάλογη με την συνήθη διάταξη μεγέθους των πραγματικών αριθμών του [0,1).

4. Από τους τύπους m′+n=(m+n)′ και m+0=m που ορίζουν αναδρομικά την πρόσθεση προκύπτει άμεσα: n+0′=(n+0)′=n′, δηλαδή n+1=n′, αν υποτεθεί ότι 0′=1. Αυτό αποκλείει την κατασκευή ενός μη αριθμήσιμου μοντέλου.

Όμως, δεν είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε ότι 0′=1! Απλά 0′ είναι ο διάδοχος του 0. Στο ακολουθιακό μοντέλο της Αριθμοθεωρίας θα είχαμε:

$0=\{0,0,0,\ldots.\}$, ενώ $0'=\varepsilon=\{\varepsilon_\kappa\}$, με $\varepsilon_\kappa=0$, κ=1,2,3,…, ¶-1, αλλά $\varepsilon_¶=1$

Η δυσκολία ανακύπτει από το αξίωμα "x"y(xy′=xy+x), γιατί μας δίνει την σχέση x0′=x0+x=x για όλα τα x, ενώ $x0'=\{0,0,0,\ldots,x_¶\}$.

Αν θεωρήσουμε ότι μία ακολουθία $a=\{a_k\}$ με $a_k$œ[0,9] αντιστοιχεί με έναν πραγματικό αριθμό $a=0.a_1a_2a_3\ldots$œ**R**, τότε το μέγεθος ε=0′ αντιστοιχεί με ένα «απειροστό» του Abraham Robinson, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε εδώ ως το μοναδικό απειροστό.

Όμως, ενώ είναι $\varepsilon^2=\{0,0,0,\ldots,\varepsilon_¶\}=\varepsilon$, *δεν* ισχύει xε=x, αλλά $x\varepsilon=\{0,0,0,\ldots.,x_¶\}$. Έτσι, είμαστε αναγκασμένοι να εισαγάγουμε τον χωριστό αριθμό 1, έστω και αν δεν τον ταυτίζουμε με 0′.

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σχέση x′>x ορίζει διαδοχικές ακολουθίες *χωρίς να προσπαθούμε να κατασκευάσουμε την x′ μέσω της x*, όπως και στους πραγματικούς αριθμούς δεχόμαστε ότι είναι γραμμικά διατεταγμένοι χωρίς να μπορούμε να προσδιορίσουμε τον διάδοχο ενός τέτοιου αριθμού. Δεν ξέρουμε τον διάδοχο του ◊2.

Το 1 αντιστοιχεί τότε, όχι στο 0′, αλλά στην ακολουθία {1}={1,1,1,…} και οι σχέσεις που ορίζουν την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό <u>δεν</u> είναι m+n′=(m+n)′ αλλά m+(n+1)=(m+n)+1, και αντίστοιχα (m+1)n=mn+n, αντί για m′n=mn+n.

Δηλαδή το σύστημα αξιωμάτων που ικανοποιείται τόσο από τους ΦΑ όσο και από τις ακολουθίες ΦΑ είναι:

N1. "x"y(x′=y′Øx=y)
N2. "x(x′∫0)
N3. "x(x+0=x)
N4. "x"y(x+y′=(x+y)′)
N5. "x(x0=0)
N6′. "x"y(x(y+1)=xy+x) {αντί για "x"y(xy′=xy+x)}.
N7. Για κάθε τύπο P(v):
P(0/v)& "v(P(v) ØP(v′/v)) Ø"vP(v)

Η ύπαρξη απειροστών τεκμηριώνεται και ως απάντηση στο πρόβλημα του Δημόκριτου [Boyer-Merzbach, σελ.92]: Έχουν διαδοχικές τομές ενός κώνου διαφορετικό μεταξύ τους εμβαδόν ή ίδιο;

Αν στις *διαδοχικές* τομές ενός κώνου οι ακτίνες του εκάστοτε κύκλου δεν διέφεραν κατά ένα απειροστό, τότε ο κώνος θα ήταν κύλινδρος, γιατί όλες οι ακτίνες θα ήταν ίσες.

Since infinitesimals exist in Nonstandard Analysis we may declare only one infinitesimal as existing and apply exactly the same axioms as above to create the real numbers.

5. Ο Skolem δεν αποδεικνύει την ύπαρξη μη αποκρίσιμων προτάσεων, δηλαδή νέων τύπων (προτάσεων) ανεξάρτητων από τα δοσμένα αξιώματα. Απλά λέει ότι, όσοι τέτοιοι τύποι και αν υπάρχουν ενδεχόμενα *αδυνατούν* να προσδιορίσουν μονοσήμαντα το σύνολο των φυσικών αριθμών.

6. Όχι το θεώρημα μη πληρότητας του Gödel, αλλά τα θεωρήματα των Skolem και Tarski προσδιορίζουν τα όρια του φορμαλισμού:

Όσους τύπους (αξιώματα) και αν προσθέσουμε, δεν μπορούμε να διακρίνουμε μεταξύ τους μεσα από τον φορμαλισμό τα διάφορα μοντέλα ενός φορμαλιστικού συστήματος (αναφερόμενου σε άπειρα αντικείμενα). Αυτό μπορεί να γίνει μόνο εξω-φορμαλιστικά με μίαν Μεταθεωρία, εδώ την Θεωρία Συνόλων.

7. Αυτό δείχνει επίσης και τα όρια των Η/Υ. Οι Η/Υ είναι μηχανές διακριτών καταστάσεων, που εκτελούν αλγορίθμους. Κάθε αλγόριθμος απαιτεί, όμως, κάποιον φορμαλισμό για την διατύπωσή του (δεν εκτελείται με λόγια). Οι Η/Υ είναι, επομένως, μηχανές επεξεργασίας φορμαλιστικών τύπων. Όμως, καμία επεξεργασία τύπων της Αριθμοθεωρίας δεν μπορεί να ξεχωρίσει απλούς φυσικούς αριθμούς (ΦΑ) από ακολουθίες ΦΑ ή κλιμακωτές συναρτήσεις ΦΑ.

8. Θα μπορούσαμε, βέβαια, να επιδιώξουμε την φορμαλιστική διατύπωση της Θεωρίας Συνόλων, με την ελπίδα ότι αυτό θα επέτρεπε την αντιδιαστολή όλων των δυνατών μοντέλων. Όμως, τα θεωρήματα των Löwenheim – Skolem και Tarski μας λένε ότι κάθε φορμαλιστικό σύστημα αντιμετωπίζει τα ίδια προβλήματα. Έχει Μετα-θεωρητικώς διακριτά μεταξύ τους μοντέλα, που δεν διακρίνονται μεταξύ τους μέσα στα πλαίσια του φορμαλισμού, αφού εκπληρούν όλα όλους τους τύπους του.

Μία φαινομενική διέξοδο για την θεμελίωση μίας φορμαλιστικής Σημασιολογίας (formal semantics) προσφέρει η Κατηγορηματική Λογική δευτέρας βαθμίδος, που επιτρέπει κατηγορήματα (χαρακτηρισμούς) όχι μόνο για αντικείμενα, αλλά και για κατηγορήματα πρώτης βαθμίδας (κατηγορήματα, που αναφέρονται σε αντικείμενα). Στην φορμαλιστική Αριθμοθεωρία που ενσωματώνει την δευτεροβάθμιο Κατηγορηματική Λογική δεν ισχύει το

Θεώρημα Μη Πληρότητας του Gödel {ούτε το θεώρημα του Tarski}. Ξέρουμε, λοιπόν, γιατί μιλάμε. Δεν υπάρχουν διαφορετικά (μη ισόμορφα μεταξύ τους) μοντέλα του Φορμαλιστικού συστήματος. Όμως αυτό γίνεται με κάποιο κόστος: Στην δεύτερη βαθμίδα επιτυγχάνεται μεν ο μονοσήμαντος χαρακτηρισμός των ΦΑ, αλλά δεν υπάρχει πια καμία διαδικασία για να παραγάγουμε συντακτικά όλες τις προτάσεις για ΦΑ.

9. (dtv-Atlas zur Mathematik σελ.19:) Στην δευτεροβάθμια Λογική ή Λογικές ακόμα μεγαλύτερης βαθμίδας δεν μπορεί πια να επιτευχθεί η σύμπτωση μεταξύ Συντακτικής και Σημασιολογικής δομής (Μη Πληρότητα της Ανωτέρας Κατηγορηματικής Λογικής).

Για την στοιχειώδη Αριθμοθεωρία αυτό σημαίνει ότι στην πρωτοβάθμια Κατηγορηματική Λογική έχουμε μεν έναν πλήρη Λογικό λογισμό, αλλά δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε μονοσήμαντα τους ΦΑ. Στην δεύτερη βαθμίδα επιτυγχάνεται μεν ο μονοσήμαντος χαρακτηρισμός, αλλά δεν υπάρχει πια καμία διαδικασία για να παραγάγουμε συντακτικά όλες τις προτάσεις για ΦΑ.

Μπορούμε να πετύχουμε να είναι ακριβώς όλες οι προτάσεις της πρωτοβάθμιας Κατηγορηματικής Λογικής φορμαλιστικά (δηλαδή συντακτικά) αποδείξιμες (Θεώρημα Πληρότητας του Gödel). Αντιθέτως, δεν μπορεί για κάθε φορμαλιστική παράσταση να αποφασισθεί σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων αν πρόκειται για πρόταση της Κατηγορηματικής Λογικής ή όχι (Θεώρημα μη αποφανσιμότητας του Church).

10. Boolos & Jeffry: Computability and Logic, Cambridge U.P. 1982:

σελ.203: Δεν υπάρχει αποτελεσματικό θετικό κριτήριο για την ισχύ δευτεροβάθμιων προτάσεων. {Αντίθετα, υπάρχει τέτοιο κριτήριο για πρωτοβάθμιες προτάσεις (βλέπε σελ.142-144)}.

σελ.204: Αυτό το αποτέλεσμα διατυπώνεται ορισμένες φορές κάπως παραπλανητικά ως εξής: «Η δευτεροβάθμια Λογική είναι μη πλήρης». Λιγότερο παραπλανητική διατύπωση θα ήταν: «Καμία σωστή τυποποίηση {φορμαλιστική διατύπωση} της δευτεροβάθμιας λογικής δεν είναι πλήρης» (Δεν είναι η λογική μη πλήρης, αλλά οι απόπειρες φορμαλιστικής της διατύπωσης από εμάς).

Η δευτεροβάθμια λογική είναι επομένως … «μη τυποποιήσιμη», μη συμπαγής, και μη Skolem – Löwenheim- ική. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι αριθμοί Gödel μπορούν να αντιστοιχηθούν με κάποιον εύλογο τρόπο σε δευτεροβάθμιες προτάσεις. Τότε το σύνολο των αριθμών Gödel των ισχυουσών δευτεροβάθμιων προτάσεων δεν μπορεί καν να ορισθεί.

σελ. 198: Λογική $1^{ης}$ βαθμίδας: αναφέρεται σε δηλώσεις σχετικά με αντικείμενα, ή σε ιδιότητες αντικειμένων.

Λογική $2^{ης}$ βαθμίδας: αναφέρεται σε σύνολα δηλώσεων ή σύνολα ιδιοτήτων, δηλαδή ιδιότητες ιδιοτήτων.

11. The reason why people persist in trying to make computers think in spite of the implications of Skolem's result, is that they believe that the human brain is also a logically thinking machine. The implicit argument is: If a human brain can do it, then a computer should also be able to do it somehow. However, the way a human brain reaches inspirations is not by

exhausting all logical possibilities, or by making random guesses. The human brain interconnects logically unconnected concepts or experiences, because this is how it stores them. The storing mechanism provides non-logical interconnections.

12. Η προτεινόμενη διάταξη των ακολουθιών $\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ αντιστοιχεί προς την διάταξη μεγέθους των αντίστοιχων πραγματικών αριθμών $a_1.a_2a_3a_4\ldots$ όταν ισχύει $a_\kappa$œ[0,9]. Δηλαδή, γράφουμε: $\{a_\kappa\} < \{\beta_\kappa\}$ όταν $a_1< \beta_1$ ή $a_1= \beta_1$ αλλά $a_2< \beta_2$ ή $a_2= \beta_2$ αλλά $a_3< \beta_3$ κ.ο.κ.

Έτσι, π.χ., αφού:

$$\Diamond 2=1.414213562\ldots<1.732050808\ldots=\Diamond 3$$

γράφουμε και seq(◊2)<seq(◊3) όπου:

seq(◊)={1,4,1,4,2,1,3,5,6,2,…}, seq(◊3)={1,7,3,2,0,5,0,8,0,8,…}.

Αντίστοιχα, θεωρούμε ότι:

{12,27,32,5,…}<{13,21,31,4,…}

## Proof of the existence of non-denumerable models for Peano's axiom system

(Adapted from the proof of theorem 6/p.176 in the book of A. Margaris)

<u>Theorem</u> Let T=P be Peano's axiom system, which has the model M=**N**. Then, if C is the cardinal number of the real numbers, T=P has a model with at least C elements.

<u>Proof:</u>

{Let S be the set of all natural number- sequences with elements between 0 and 9: S={a, aœ**[**0,9**]**¶}, where **[ ]** denotes an interval of integers. This is a non-denumerable set, since it corresponds, e.g., to **R**[0,1].} NOT USED!

Let A be a set of symbols with cardinality |**R**| (the cardinality of real the numbers).

Let T'=P' result from T=P by adjoining to T all symbols $a_r$, rœ **R**[0,1] and a new proper axiom:

$a_r$ ∫ $a_t$ for each pair r∫t, r,t œ **R**[0,1].

Let X be a finite subset of the proper axioms of T'=P' consisting of Peano's axioms <u>plus</u> a finite number of axioms of the form $a_r$ ∫ $a_t$ for r∫t. I.e., we select a <u>finite</u> subset KÕ[0,1] and let r,tœK with r∫t.

Thus, $a_r$, with rœK, are the distinct new constant symbols that occur in X.

Let M'=**N**' be the same as M=**N** except that it assigns a different element of the domain[18] **N** to each $a_r$. This is always possible, because M is infinite. Then, M' is a model of X.

Hence, T'=P' has a model $M_1$ by the *compactness theorem* [Margaris, p.166]. $M_1$ is a model for T=P, because T'=P' is an extension of T=P.

The cardinal number of $M_1$ is at least C, because each new proper axiom "$a_r$ ∫ $a_t$ for r∫t" is true in $M_1$.

[18] I thought that the domain would be S, but S is used in the proof only in order to characterize the cardinality of the adjoined new set of symbols! The domain seems to be the original domain **N**. See Hao Wang, p.79 proof of 5.5.5.

{Notes: 1. Since K is finite, K={$r_j$, j=1(1)n} where n is a natural number, and: if r(j)=$r_j$=0.$r_1r_2r_3$… then $a_{r(j)}$={$r_1$,$r_2$,$r_3$, …}.

2. Is $M_1$ an extension of (T, **N**) to (T, **N»**S)?

3. The models M′ and $M_1$ have two different kinds of objects: nœ**N**, and aœS. Correspondingly, T′=P′ contains three different kinds of symbols: 0, xœ**N**, and $a_r$, rœ[0,1].

4. It seems that we don't try to apply Peano's axioms on the symbols $a_r$, rœ[0,1] !!!} WRONG INTERPRETATION!

Note: The axioms:

N1. "x"y(x′=y′Øx=y)

N2. "x(x′∫0)

N3. "x(x+0=x)

N4. "x"y(x+y′=(x+y)′)

N5. "x(x0=0)

N6′. "x"y(x(y+1)=xy+x) {αντί για "x"y(xy′=xy+x)}.

N7. Για κάθε τύπο P(v):

P(0/v)& "v(P(v) ØP(v′/v)) Ø"vP(v)

which we propose to use for the model of natural number sequences, are also fulfilled by the set $\mathbf{R}^+$, the nonnegative real numbers!!

Another possibility would be to use "x"y(xy′=xy+x0′), but what value does x0′ have?

**Note: Skolem's 1935-theorem about the existence of non-standard models of Arithmetic is proved in a modernized form in G. S.Boolos-R.C.Jeffrey: Computability and Logic, pp.193-195 (see also p.192 on aleph-null categoricity).**

5. Can we postulate the existence of a successor to a real number x?

Although **R** is an ordered set, no xœ**R** can have a successor, because, if x′ is the successor of x, then ½(x+x′) lies between x and x′. Not even a rational number can have a successor!

Objection: If we let ε be an infinitesimal and define x′ as x+ε, then x+ε/2 does not belong to the set created by the axioms. In fact, elementary Arithmetic does not include division! So, x+ε/2 cannot be created by elementary Arithmetic.

**6. What is the significance of the theorems of Skolem and Tarski?**

a. In the same way as we have non-Euclidean geometries we also have non-Pythagorean Arithmetics (if we may call the classical Arithmetic Pythagorean, since Pythagoras was the first to investigate properties of integers considering them as arrays of points)!

b. Just as we have Euclidean models for non-Euclidean geometries we also have Pythagorean models of non-Pythagorean Arithmetics. Skolem's sequence of integer-polynomials is such a Pythagorean model of a non-Pythagorean kind of 'positive integers', which have a different ordinality than the natural numbers.

c. These observations show that neither Euclidean Geometry, nor Pythagorean Arithmetic are *a priori* concepts inborn in our mind! they are

abstractions based on certain rudimentary inborn faculties for perceiving and handling space and numerical quantity.

d. The natural world does not necessarily comply with any of these conceptual systems. In intermediate dimensions it can be seen as Euclidean, but in celestial dimensions it is rather non-Euclidean. In atomic dimensions it may also seem to be Euclidean, but this is an illusion. What is a point, and what is a line in Physics? Elementary particles are considered to be point-like in Relativity Theory, but this is also a mystery, since it is difficult to understand how dimensionless objects can have different physical properties. There are also no lines consisting of such point-like objects. Continuity is an illusion, since any edge or surface consists of atoms. The orbit or trajectory of a moving body can be considered as a continuous line, but this is rather a mental construction than a perceptible reality. We don't perceive continuous lines, since our retina consists of discrete cones and rods, which register the variations of light signals.

In the same way, we may introduce in Skolem's way various 'infinite', or rather, "illimited integers" ((see Alain M. Robersts: Nonstandard Analysis, p.17) numbers (actually a denumerable set of infinite numbers) and declare infinitesimals to be the inverses of these numbers. In this way we create Non-standard Analysis. This is the way, in which Abraham Robinson initially introduced his infinitesimals (see Alain M. Robersts, pp. 9-11).