Skolem34.doc

Σχετικά με την Αδυναμία Πλήρους Χαρακτηρισμού της Ακολουθίας των Αριθμών μέσω ενός Πεπερασμένου Αξιωματικού Συστήματος[1]

Thoralf Skolem

Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems
Norsk mathematisk forenings skriften, 1933, series 2, no.10, 73-82.

Μία σχολιασμένη μετάφραση από τον Ι.Β.Κιουστελίδη με εκσυγχρονισμό του λογικού συμβολισμού. [2]

Εδώ θα εξετάσουμε συναρτήσεις ακεραίων θετικών μεταβλητών που έχουν ακέραιες θετικές τιμές. Θα υποθέσουμε ότι, αν f(x) και g(x) είναι δύο τέτοιες συναρτήσεις, τότε υπάρχουν πάντοτε είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) < g(x), είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) = g(x) είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) > g(x). Φυσικά αυτό μπορεί να αποδειχθεί αν γίνει δεκτό το αξίωμα του αποκλεισμού τρίτου ενδεχομένου.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα:

<u>Θεώρημα1.</u> Έστω ότι $f_r(x)$, r=1,2,3,… είναι μία ακολουθία συναρτήσεων. Τότε υπάρχει πάντα μία συνάρτηση g(x), που αυξάνεται μονότονα, τέτοια ώστε, αν είναι i<j δύο δείκτες, ισχύει πάντα συνεχώς μία από τις τρεις περιπτώσεις:

$$f_i(g(x))<f_j(g(x)),\ f_i(g(x))=f_j(g(x)),\ f_i(g(x))>f_j(g(x))$$

όταν $x>x_0$ όπου x_0 ορισμένος αριθμός.

<u>Απόδειξη:</u> Μπορεί κανείς αρχικά να διατάξει τα ζεύγη δεικτών i, j σε μία απλά άπειρη σειρά, για παράδειγμα έτσι, ώστε διατάσσει κανείς αρχικά κατά αυξανόμενες τιμές του i+j και τα ζεύγη (i,j) με το ίδιο άθροισμα i+j κατά τις τιμές του i.

Έστω ότι αρχικά είναι $g_1^-(x)$, $g_1^0(x)$, και $g_1^+(x)$ για x = 1,2,3,… κατά σειράν τα x για τα οποία είναι $f_1(x)<f_2(x)$, $f_1(x)=f_2(x)$, και $f_1(x)>f_2(x)$. Σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει μία από αυτές τις τρεις συναρτήσεις για όλα τα x. Έστω ότι $g_1(x)$ είναι η πρώτη, κατά την παραπάνω σειρά, για την οποία ισχύει αυτό. Για όλα τα x έχει κανείς τότε ή πάντοτε $f_1(g_1(x))<f_2(g_1(x))$ ή πάντοτε $f_1(g_1(x))=f_2(g_1(x))$ ή πάντοτε $f_1(g_1(x))>f_2(g_1(x))$. Έτσι τακτοποιήθηκε το θέμα για το ζεύγος δεικτών (1,2).

Θεωρώ τώρα ότι οι συναρτήσεις g_1, …, g_n, h_1,…,h_{n-1} έχουν ήδη ορισθεί, όπου είναι πάντα[3] $g_{r+1}(x)=g_rh_r(x)$, (r=1,2,…,n), και μεταξύ των $f_kg_r(x)$ και $f_lg_r(x)$, όπου (k,l) το r ζεύγος δεικτών, ισχύει πάντα για όλα τα x είτε η σχέση < είτε η σχέση = είτε η σχέση >. Τότε ας δίνουν $h_n^-(x)$, $h_n^0(x)$, $h_n^+(x)$ κατά σειράν εκείνα τα x, για τα οποία γίνεται $f_i(g_n(x))<f_j(g_n(x))$, ή $f_i(g_n(x))=f_j(g_n(x))$, ή $f_i(g_n(x))>f_j(g_n(x))$ όπου (i,j) το n+1 ζεύγος δεικτών. Τουλάχιστον μία από

[1] Δηλαδή, όταν οι έννοιες «Σύνολο» ή «Προτασιακή Συνάρτηση» προσδιοριστούν με ακρίβεια.
[2] [Η μετάφραση έγινε για ιδία χρήση και κυρίως για εκσυγχρονισμό λογικού συμβολισμού. Φράσεις μέσα σε αγκύλες '[]' είναι σχόλια που έχουν προστεθεί από τον μεταφραστή. Με έγχρωμο φόντο έχουν τονισθεί ουσιώδη σημεία.]
[3] Skolem: Γράφω απλούστερα fg(x) αντί f(g(x)).

αυτές τις συναρτήσεις υπάρχει για όλα τα x. Ας είναι $h_n(x)$ η πρώτη από τις παραπάνω συναρτήσεις για την οποία ισχύει αυτό. Τότε ισχύει, επομένως, μεταξύ $f_i(g_{n+1}(x))$ και $f_j(g_{n+1}(x))$ ή πάντοτε η σχέση <, ή πάντοτε =, ή πάντοτε >, αν βάλουμε $g_{n+1}(x)=f_nh_n(x)$. Με αυτόν τον τρόπο αποδείχθηκε και για το n+1 στάδιο η παραδοχή που έγινε πιο πάνω για το n στάδιο. Αφού πιο πάνω ξεκαθαρίσαμε και το στάδιο 1, αποδείχθηκε έτσι ότι με την επαναληπτική διαδικασία που δώσαμε παίρνουμε μίαν ακολουθία συναρτήσεων g_1, g_2, … και μίαν ακολουθία h_1, h_2, … , όπου είναι πάντα $g_{r+1}=g_rh_r$ και, αν (i,j) είναι το r ζεύγος, υπάρχει μεταξύ $f_ig_r(x)$ και $f_jg_r(x)$ είτε πάντα το σύμβολο '<', είτε πάντα '=', είτε πάντα '>'.

Από αυτό προκύπτει περαιτέρω, ότι, αν (i,j) είναι το r ζεύγος, τότε μεταξύ $f_ig_s(x)$ και $f_jg_s(x)$ ισχύει πάντα μία από τις τρεις σχέσεις όταν είναι $s\geq r$ και μάλιστα η ίδια σχέση που είχαμε για s=r. Γιατί για s=r+1 είναι $g_s=g_rh_r$, και αν για παράδειγμα ισχύει $f_ig_r(x)<f_jg_r(x)$ για όλα τα x, ισχύει προφανώς επίσης $f_ig_rh_r(x)< f_jg_rh_r(x)$ για όλα τα x, δηλαδή $f_ig_{r+1}(x)<f_jg_{r+1}(x)$. Εξαιτίας της ταυτότητας $g_{r+2}(x)=g_{r+1}h_{r+1}(x)$ προκύπτει όμως από αυτό κατά τον ίδιο τρόπο $f_ig_{r+2}(x)<f_jg_{r+2}(x)$ για όλα τα x. Με πλήρη επαγωγή προκύπτει από αυτά ο ισχυρισμός.

Έστω, τώρα $g(x)=g_x(1)$. Αν (i,j) είναι το r ζεύγος, ισχύει σύμφωνα με το ήδη αποδειχθέν αποτέλεσμα πάντοτε η ίδια από τις τρεις σχέσεις μεταξύ $f_ig_x(1)$ και $f_jg_x(1)$ αν είναι $x\geq r$. Δηλαδή για όλα τα $x\geq r$ ισχύει μεταξύ $f_ig(x)$ και $f_jg(x)$ πάντα η ίδια από τις τρεις σχέσεις. Με αυτό απεδείχθη το θεώρημα 1.■

Θα εξετάσουμε τώρα ένα απλό σύστημα αξιωμάτων της Αριθμητικής. Για τους φυσικούς αριθμούς **N** ισχύουν πάντως οι ακόλουθες προτάσεις:

(1) Οι αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης <. Αυτή η σχέση είναι ασύμμετρη και μεταβατική.

(2) Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός 1.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος x+1, δηλαδή $x<y \quad x+1\leq y$.

(4) Υπάρχει μία πράξη +, που λέγεται πρόσθεση, όπου ισχύει η αναδρομική σχέση

$$x+(y+1)=(x+y)+1.$$

(5) Υπάρχει μία πράξη που λέγεται πολλαπλασιασμός, [δοσμένη] με την [αναδρομική] σχέση

$$x(y+1)=xy+x.$$

(6) Για μία οποιαδήποτε *προτασιακή συνάρτηση* [δηλ. *κατηγόρημα*] U(x) ισχύει η αρχή της επαγωγής:

$$U(1)\&\text{"}x(U(x)\text{Ø}U(x+1))\ \text{Ø}\ \text{"}yU(y)$$

(7) Για μία τυχαία προτασιακή συνάρτηση U(x) ισχύει:

$$(x=y)\ \text{Ø}(U(x)\quad U(y)).$$

Αν ως «προτασιακές συναρτήσεις» θεωρηθούν κάθε είδους προτάσεις που κατασκευάζονται μέσω των 5 λογικών πράξεων με βάση εξισώσεις, ή <u>σχέσεις</u> μεγαλυτέρου ή μικροτέρου <u>μεταξύ *πολυωνύμων*</u>, *θα αποδείξω ότι όλες οι προτάσεις που μπορούν να παραχθούν με βάση τις παρατιθέμενες προϋποθέσεις (1)-(7) με προσθήκη της αρχής της του τρίτου αποκλείσεως*

ισχύουν επίσης για γραμμικά διατεταγμένα σύνολα άλλης, ευρύτερης φύσης από τους αριθμούς. Από την γενική φύση της απόδειξης θα προκύψει ότι αυτό θα ισχύει πάντοτε, ακόμα και αν προστεθούν ως αξιώματα άλλες ιδιότητες της ακολουθίας των αριθμών ανεξάρτητες από τα δοθέντα αξιώματα.

Κατ' αρχήν θα αποδειχθεί μία τυπική /φορμαλιστική επέκταση της επαγωγικής συναγωγής. Αυτή η συναγωγή είναι η ακόλουθη: *Έστω ότι ισχύει U(1) και επίσης U(z+1) αν ισχύει U(z) για όλα τα u ≦ z. Τότε ισχύει U(x) για όλα τα x. Πρόκειται, λοιπόν, να δειχθεί ότι*

$$U(1)\ \&\ \forall y[\forall x((x\leqq y)\ \emptyset U(x))\emptyset U(y+1)]\emptyset\ U(z)$$

[Απόδειξη:] Θέτω

$$\forall x((x\leqq y)\ \emptyset U(x))=V(y).$$

Τότε είναι V(1)=U(1) και

$V(y+1)=\forall x((x\leqq y+1)\emptyset U(x))=\forall x((x=y+1)\emptyset U(x))\&((x\leqq y)\emptyset U(x)) = U(y+1)\&\ \forall x((x\leqq y)\ \emptyset U(x)) = U(y+1)\&V(y)$.

Ως εκ τούτου έχουμε

$U(1)\&\ \forall y[\forall x((x\leqq y)\emptyset U(x))\emptyset U(y+1)] = U(1)\&\forall y[V(y)\ \emptyset U(y+1))= U(1)\&\ \forall y[V(y)\ \emptyset V(y)\&U(y+1))=U(1)\&\ \forall y[V(y)\ \emptyset V(y+1))\ \emptyset V(z)$,

Όπου χρησιμοποιείται το [αξίωμα] (6). ■

Μέσω αυτής της διεύρυνσης της επαγωγικής συνεπαγωγής μπορεί να δειχθεί για μίαν τυχαία προτασιακή συνάρτηση U(x), ότι αν η U(x)είναι αληθής για οποιονδήποτε αριθμό x, τότε ισχύει επίσης $\exists xU(x)\&\forall y(U(y)\emptyset(x\leqq y))$, ή, με άλλα λόγια,

$$U(z)\ \emptyset\exists xU(x)\&\forall y(U(y)\emptyset(x\leqq y))$$

Αυτή η πρόταση ισχύει για z=1, γιατί σύμφωνα με το (2) έχουμε $\forall y(1\leqq y)$, από όπου έχουμε $\forall y(U(y)\emptyset(1\leqq y))$, και από αυτό $U(1)\ \emptyset U(1)\&\forall y(U(y)\emptyset(1\leqq y))$,

και από αυτό $U(1)\ \emptyset\exists xU(x)\&\forall y(U(y)\emptyset(x\leqq y))$

Υποθέτω την ορθότητα της πρότασης για όλα τα u≦z. Τότε έχουμε

(a) $U(z+1)\ \emptyset\exists u(u\leqq z)\&U(u)\neg\forall u((u>z)\neg U(u))$

και παραπέρα, σύμφωνα με την υπόθεση,

$$U(u)\&(\ u\leqq z)\ \emptyset\exists xU(x)\&\forall y(U(y)\emptyset(x\leqq y)).$$

Από αυτήν πάλι

(b) $\exists uU(u)\&(u\leqq z)\ \emptyset\exists xU(x)\&\forall y(U(y)\emptyset(x\leqq y))$.

Αφετέρου παίρνουμε

(c) $U(z+1)\&\ \forall u((u>z)\ \neg U(u))\ \emptyset\ U(z+1)\&\ \forall u(U(u)\ \emptyset(z+1\leqq u))$

$\emptyset\exists xU(x)\&\ \forall u(U(u)\emptyset(x\leqq u))$.

Από τα (a), (b), (c) προκύπτει

$$U(z+1)\ \emptyset\exists xU(x)\&\forall y(U(y)\emptyset(x\leqq y)).$$

Δηλαδή η πρόταση ισχύει για z+1. Έτσι αποδείχθηκε η ισχύς της για όλα τα z. ■

Σε κάθε μη κενό σύνολο αριθμών υπάρχει, λοιπόν, ένας ελάχιστος, όπου εδώ φυσικά «σύνολο» σημαίνει τις συλλογές που είναι δοσμένες μέσω των προτασιακών συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Κατά περιστάσεις θα προκύψει ότι η πρόταση $\forall x\exists yA(x,y)$ είναι αληθής και μάλιστα έτσι, ώστε για κάθε x υπάρχει μόνο ένα y τέτοιο ώστε να ισχύει A(x,y). Τότε μπορεί κανείς να πει ότι με την A(x,y) ορίζεται μία συνάρτηση

y=f(x) με την συνηθισμένη μαθηματική έννοια. Η εξίσωση y=f(x) είναι μία μεταγραφή της A(x,y). Αντί για "x$yA(x,y) έχει κανείς τότε "xA(x,f(x)). Μπορεί κανείς τώρα σε κάθε περίπτωση που ισχύει "x$yA(x,y) να εισαγάγει μίαν συνάρτηση f(x), έτσι ώστε να προκύψει ότι ισχύει A(x,f(x)) για κάθε x. Σύμφωνα με ότι ήδη αποδείξαμε υπάρχει, βέβαια, μεταξύ όλων των y για τα οποία ισχύει A(x,y) για ένα τυχαίο x, ένας ελάχιστος αριθμός, που μπορεί να ονομασθεί f(x) και προσδιορίζεται από το x (και φυσικά από την προτασιακή συνάρτηση A). Τότε είναι, επομένως, η y=f(x) ισοδύναμη με A(x,y)& "z(A(x,z) Ø(y≦z)), και έχουμε "xA(x,f(x)).

Παρόμοια, αν είναι δοσμένη μία προτασιακή συνάρτηση A(x,y,z), μπορεί κανείς να σχηματίσει την προτασιακή συνάρτηση A(x,u,v)&"u"v(A(x,u,v) Ø(y<u)¤(y=u)&(y≦v)), μέσω της οποίας είναι δοσμένα τα y και z ως συναρτήσεις y=f(x) και z=g(x) του x. Ο y=f(x) είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η A(x,y,z) για οποιοδήποτε z, και z=g(x) είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η A(x,f(x),z). Αν η "xyzA(x,y,z) είναι αληθής, τότε υπάρχουν οι συναρτήσεις f(x) και g(x) για όλα τα x, και έχουμε "xA(x,f(x),g(x)).

Παρόμοια μπορεί κανείς να σχηματίσει την προτασιακή συνάρτηση A(x,y,z)&"u(A(x,y,u)Ø(z≦u)), μέσω της οποίας δίνεται το z ως συνάρτηση f(x,y), αν αληθεύει η "x"y$zA(x,y,z). Η τελευταία πρόταση μπορεί τότε να γραφτεί στην μορφή "x"yA(x,y,f(x,y)).

Παρόμοια πράγματα μπορούν να γίνουν αν τα σύμβολα " και $ εμφανίζονται εναλλάξ. Ας θεωρήσουμε, π.χ., την "x$y"z$uA(x,y,z,u). Αν βάλουμε προσωρινά, "z$uA(x,y,z,u)=B(x,y), για συντομία και εποπτικότητα, μπορούμε να σχηματίσουμε την "x$yB(x,y)&"v(B(x,v)Ø(y≦v)), που είναι μία αληθής πρόταση και ορίζει το y ως συνάρτηση f(x). Τότε ισχύει "xB(x,f(x)), δηλαδή, "x"z$uA(x,f(x),z,u). Τότε ισχύει επίσης η "x"z$uA(x,f(x),z,u)& "w(A(x,f(x),z,w)Ø(u≦w)), με την οποία προσδιορίζεται η u=g(x,z). Τέλος, μπορεί κανείς αντί για "x$y"z$uA(x,y,z,u) να γράψει "x"zA(x,f(x),z,g(x,z)).

Αν έχει κανείς μία πρόταση, που αρχίζει με ένα σύμβολο '$', όπως π. χ. $x"y$zA(x,y,z), μπορεί να πει ότι έχει "yA(a,y,f(y)) για έναν ορισμένο αριθμό a και μία συνάρτηση f(y).

Οι συναρτήσεις που προκύπτουν έτσι μέσω των αληθών γενικών υπαρξιακών προτάσεων σχηματίζουν μία κλειστή ολότητα σε σχέση με αντικαταστάσεις τέτοιων συναρτήσεων στην θέση μεταβλητών. Ας θεωρήσουμε, π.χ., τις z=f(x,y) και y=g(u), όπου η z=f(x,y) ισοδυναμεί με την ισχύ μίας πρότασης A(x,y,z) και η y=g(u) με την πρόταση B(y,u).[4] Αν σχηματίσει κανείς την πρόταση C(x,u,z)= $yA(x,y,z)&B(y,u), αναγνωρίζει τότε ότι είναι αληθής η "x"u$zC(x,u,z) και το z προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα x και u, δηλ. η z είναι συνάρτηση με την παραπάνω έννοια των x και u. Αυτή η συνάρτηση δεν είναι τίποτα άλλο από αυτήν που προκύπτει με αντικατάσταση του y=g(u) στην z=f(x,y), δηλ. z=f(x,g(u)). Παρόμοια, αν σχηματίσει κανείς την πρόταση $zA(x,y,z)&B(u,z)=D(x,y,u), αναγνωρίζει ότι η πρόταση "x"y$uD(x,y,u) αληθεύει και μάλιστα έτσι ώστε η [μεταβλητή] u

[4] (Συνήθως αυτή η συνάρτηση A είναι κατασκευασμένη έτσι, ώστε εμφανίζονται μέσα σε αυτήν φαινομενικές μεταβλητές, όπως φαίνεται από τα παραπάνω παραδείγματα).

προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις x, y. Αυτή η συνάρτηση είναι τότε η u=g(f(x,y)). Είναι ξεκάθαρο ότι αυτή η αναπαραγωγή ισχύει γενικά.

Την ολότητα αυτών των συναρτήσεων ας την ονομάσουμε **N***. Επειδή προϋποτίθεται ότι ισχύει η αρχή αποκλείσεως τρίτου για τις προτάσεις που κατασκευάζονται με βάση τα δοθέντα αξιώματα, δεν είναι δύσκολο να αναγνωρίσουμε ότι, αν $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι δύο τυχόντα στοιχεία του **N***, ή θα υπάρχουν άπειρα x τέτοια ώστε είναι $f_1(x)<f_2(x)$, ή άπειρα τέτοια ώστε $f_1(x)=f_2(x)$, ή άπειρα τέτοια ώστε $f_1(x)>f_2(x)$. Αρκεί προφανώς να εξετάσει τις προτάσεις **"**x**$**y(x<y)&($f_1$(y)<$f_2$(y)) ή αντίστοιχα τις ανάλογες, όπου εμφανίζεται '=' ή '>'. Αν εισαγάγει κανείς τους ορισμούς των f_1 και f_2 μέσω προτασιακών συναρτήσεων, παίρνει τότε προτάσεις του αναφερθέντος τύπου, για τις οποίες ισχύει η αρχή αποκλείσεως τρίτου. Αν π.χ. ορίζεται η f_1 με το ότι η z= f_1(x) είναι ισοδύναμη με την προτασιακή συνάρτηση A_1(y,z) και παρομοίως u=f_2(x) ισοδυναμεί με A_2(y,u), μπορεί κανείς αντί **"**x**$**y(x<y) &($f_1$(y)<$f_2$(y)) να γράψει προφανώς **"**x**$**y(x<y)&**"**z**"**u(A(y,z)&B(y,u)**Ø**(z≦u)). Μία τέτοια πρόταση είναι, λοιπόν, είτε αληθής είτε ψευδής, και από τις τρεις ανάλογες πρέπει μία να είναι αληθής. Ως εκ τούτου μπορούν τα στοιχεία του **N*** σύμφωνα με το θεώρημα 1 να διαταχθούν γραμμικά σύμφωνα με τον ρυθμό αυξήσεώς τους προς το άπειρο, αν βάλει κανείς μίαν κατάλληλη συνάρτηση g(x) στην θέση του x. Το ότι ισχύουν και οι ιδιότητες (2) και (3) του **N** φαίνεται εύκολα. Γιατί στα στοιχεία του **N*** ανήκουν και οι «σταθερές», δηλαδή τα στοιχεία του **N**. Ειδικότερα ανήκει, λοιπόν το 1 στο **N*** και προφανώς είναι στο **N*** 1≦f, όπου f είναι ένα τυχαίο στοιχείο του **N***, αφού είναι 1≦f(g(x)) για όλα τα x. Παρομοίως είναι το 1+f_1(x) ένα στοιχείο του **N** αν είναι τέτοιο το f_1(x), και αν ισχύει f_1g(x)<f_2g(x) για όλα τα x, τότε ισχύει f_1g(x)+1≦f_2g(x) για όλα τα x, δηλαδή η (3) είναι σωστή.

Πριν προχωρήσω παρακάτω παρατηρώ όμως ότι το **N*** είναι διατεταγμένο κατά έναν πολύ ευρύτερο τρόπο από ότι το **N**. *Συνολοθεωρητικά, έχει το **N*** έναν σημαντικά ανώτερο διατακτικό τύπο από ότι το **N***, γιατί ήδη το στοιχείο x του **N*** είναι > από οποιαδήποτε σταθερά n.[5] Παραπέρα είναι x+1>x, x+2>x+1, …, 2x>x+n, όπου n μία τυχούσα σταθερά κ.ο.κ. Κατά τα άλλα υπάρχει στο **N***, ακριβώς όπως και στο **N**, ένα αμέσως μικρότερο στοιχείο για κάθε στοιχείο που είναι >1. Έστω, δηλαδή, ότι η y=δ(x) είναι δοσμένη με την πρόταση (y+1≥x)&**"**z(z+1≥x**Ø**(y≦z)) [σωστό είναι να μπει εδώ (z>y)][6]. Επειδή προφανώς στο **N** αληθεύει η πρόταση **"**x**$**y(y+1≥x), υπάρχει η δ(x) για όλα τα x και είναι επομένως ένα στοιχείο του **N***. Είναι, όμως, εύκολο να δούμε ότι η δf(x) είναι το αμέσως προηγούμενο της f στοιχείο[7] του **N***, αν είναι f>1, γιατί f>1 σημαίνει ότι είναι fg(x)>1 για όλα τα x, και επειδή δ(x)+1=x για x>1, θα είναι δfg(x)+1=fg(x). Δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε στενότερα τον τύπο του **N***.

---

[5] [Δεν υπάρχει όρος του **N** που να αντιστοιχεί στον x**œN***, γιατί οι όροι του **N** είναι ήδη σε αντιστοιχία ένας-προς-έναν προς τις σταθερές συναρτήσεις στο **N***.]

[6] [Ο τύπος (y+1≥x)&**"**z(z+1≥x**Ø**(z>y)) ισοδυναμεί με (y≥x-1)&**"**z(z≥x-1**Ø**(z>y)). Δηλαδή είναι y≥x-1 και αν για τυχόν είναι επίσης z≥x-1, τότε οφείλει να είναι z>y. Ειδικότερα, αφού x>x-1, πρέπει να είναι x>y, δηλαδή, x>y≥x-1, άρα y=x-1.]

[7] [Δηλαδή δf(x)=f(x)-1, αλλά αυτό ισχύει μόνο όταν ορισθεί η πράξη της αφαίρεσης!]

Αν $F(x_1,x_2,\ldots)$ είναι μία συνάρτηση στο **N**, τότε, αν $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, … παριστάνουν μεταβλητά στοιχεία του $\mathbf{N}^*$, είναι $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots)$ μία συνάρτηση στο $\mathbf{N}^*$, δηλαδή κάθε συνάρτηση στο **N** παριστάνει κατ' αυτόν τον τρόπο μίαν τέτοια συνάρτηση και στο $\mathbf{N}^*$. Το $\mathbf{N}^*$ έχει επομένως τις ιδιότητες (1), (2), (3), (4), (5), γιατί προφανώς παραμένουν και στο $\mathbf{N}^*$ σε ισχύ οι αναδρομικοί τύποι για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Παρόμοια έχουν ένα νόημα και στο $\mathbf{N}^*$ όλες οι προτάσεις και προτασιακές συναρτήσεις, που μπορούν να συντεθούν με βάση τα αξιώματα, γιατί κάθε τέτοια πρόταση ή προτασιακή συνάρτηση έχει την μορφή

$$Qx_1Qx_2\ldots U(x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2,\ldots),$$

όπου τα Q παριστάνουν ποσοτικοποιήσεις [**"** ή **$**], ενώ η U σχηματίζεται με Σύζευξη , Διάζευξη ή Άρνηση (και, αν θέλει κανείς, συνεπαγωγή) από σχέσεις με '<' ή '=' μεταξύ *πολυωνύμων* με ακέραιους συντελεστές. Αυτές οι σχέσεις διατηρούν, όμως ένα νόημα, αν βάλει κανείς στην θέση των μεταβλητών τυχαίες συναρτήσεις μίας μεταβλητής x από το **N** ή, με άλλα λόγια, τυχόντα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$. Θα δείξω τώρα ότι για το $\mathbf{N}^*$ ισχύουν επίσης τα αξιώματα (6) και (7). Αυτό θα είναι μόνο μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 2.

Πριν περάσω στην απόδειξη του θεωρήματος 2, θα ήθελα να κάνω ακόμα την ακόλουθη απλουστευτική παρατήρηση. Τόσο στο **N** όσο και στο $\mathbf{N}^*$ έχουμε

$$(x>y) = \$z(x=y+z)$$

Ως εκ τούτου, μπορεί κανείς να γράψει τις προτάσεις με τέτοιον τρόπο, ώστε στο στοιχειώδες μέρος τους [τον τύπο χωρίς τους ποσοδείκτες] να εμφανίζονται μόνο εξισώσεις και όχι ανισότητες. Περαιτέρω, έχουμε

$$(x=y)¤(z=u) = (xz+yu=xu+yz)$$

ώστε μπορούν να απαλειφθούν οι διαζεύξεις[8]. Άρα μπορεί κάθε πρόταση ή προτασιακή συνάρτηση να γραφτεί έτσι ώστε το στοιχειώδες μέρος της να είναι σύζευξη εξισώσεων.

*<u>Θεώρημα 2:</u> Κάθε πρόταση που μπορεί να παραχθεί με βάση τα παρατεθέντα αξιώματα, η οποία είναι αληθής στο **N** είναι αληθής και στο $\mathbf{N}^*$.*

Παρατηρώ ότι δεν εμφανίζονται σε αυτήν ελεύθερες μεταβλητές, γιατί δεν έχουμε μία *προτασιακή συνάρτηση.*

<u>Απόδειξη:</u> Όπως εξηγήσαμε τώρα μόλις, μπορεί κανείς να γράψει την δοσμένη πρόταση έτσι ώστε το στοιχειώδες μέρος της να είναι σύζευξη εξισώσεων, τόσο όταν θεωρείται στο **N** όσο και όταν θεωρείται στο $\mathbf{N}^*$. Η ισχύς της πρότασης στο **N** μπορεί, με αντικατάσταση μερικών μεταβλητών με ορισμένες συναρτήσεις των άλλων, και επί πλέον με εισαγωγή ειδικών αριθμών για ορισμένες μεταβλητές, να εκφρασθεί έτσι ώστε αυτή η σύζευξη να ισχύει για τυχαίες τιμές στο **N** των μεταβλητών που απομένουν.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2 αρκεί τότε προφανώς να δείξουμε το ακόλουθο: Δίνεται μία εξίσωση

$$F(a_1, a_2, \ldots,x_1, x_2,\ldots,f_1(x_1, x_2,\ldots),f_2(x_1, x_2,\ldots),\ldots) =$$
$$G(a_1, a_2, \ldots,x_1, x_2,\ldots,f_1(x_1, x_2,\ldots),f_2(x_1, x_2,\ldots),\ldots)$$

που είναι αληθής στο **N** για τυχούσες τιμές των x_1, x_2,…, όπου a_1, a_2,… είναι ορισμένα ειδικά στοιχεία του **N** και f_1, f_2, …, ορισμένες συναρτήσεις, δηλαδή στοιχεία του $\mathbf{N}^*$ ενώ F και G σχηματίζονται με πρόσθεση και

[8] [Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με (x-y)*(z-u)=0 όταν ορισθεί η πράξη της αφαίρεσης].

πολλαπλασιασμό σε πεπερασμένη επανάληψη, δηλαδή είναι πολυώνυμα. Πρέπει να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παραμένει αληθής στο $\mathbf{N}^*$, δηλαδή, αν αντί x_1, x_2,... εισαχθούν τυχαίες συναρτήσεις $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Αυτό όμως το αναγνωρίζει κανείς σχεδόν αμέσως. Γιατί τόσο το F, όσο και το G γίνονται με εισαγωγή μία τυχαίας σειράς από φ στην θέση των x δύο συναρτήσεις της μεταβλητής x και έχουν για κάθε x από το **N** την ίδια τιμή [που ανήκει] στο **N**. Είναι επομένως επίσης πάντα ίσες αν εισαχθεί g(x) αντί για x [βλ. Θεώρημα 1], δηλαδή είναι σύμφωνα με τον ορισμό της σχέσης '=' μεταξύ των συναρτήσεων πράγματι «ίδιες /ίσες» συναρτήσεις ή, με άλλα λόγια, για κάθε επιλογή των στοιχείων φ_1, φ_2, ... στο $\mathbf{N}^*$, παριστάνουν το ίδιο στοιχείο του $\mathbf{N}^*$. Με αυτό έχει αποδειχθεί το θεώρημα 2. **É**

Προφανώς βασίζεται η αποδειξιμότητα του θεωρήματος 2 μόνο στο ότι έχει προϋποτεθεί ο αποκλεισμός τρίτου [ενδεχομένου], ενώ οι εν γένει κατασκευάσιμες συναρτήσεις μπορούν να απαριθμηθούν. Το τελευταίο, όμως, ισχύει πάντα αν έχει δοθεί ένα συγκεκριμένο πλαίσιο παραγωγής προτάσεων και συναρτήσεων, δηλαδή αν έχει κανείς εν γένει ένα ακριβώς διατυπωμένο σύστημα αξιωμάτων. Επομένως:

Ένα πεπερασμένο σύστημα αξιωμάτων δεν μπορεί ποτέ να χαρακτηρίσει την ακολουθία των [φυσικών] αριθμών, δηλαδή, να την διαχωρίσει από όλες τις άλλες ακολουθίες, τουλάχιστον αν περιλαμβάνει την αρχή του αποκλεισμού τρίτου ενδεχομένου.

Θα ήταν τώρα όμως πολύ ενδιαφέρον να δώσουμε μίαν πρόταση που θα ίσχυε στο $\mathbf{N}^*$, όχι όμως στο **N** και μάλιστα έτσι, που να μην είναι κοινότυπη, όπως [είναι] η ακόλουθη: Στο $\mathbf{N}^*$ υπάρχουν στοιχεία που δεν υπάρχουν στο **N**, ενώ φυσικά στο **N** δεν υπάρχουν στοιχεία που να μην ανήκουν στο $\mathbf{N}^*$.

Κατ' αρχήν πρόκειται να αντιστοιχηθεί σε κάθε πρόταση που κατασκευάζεται με βάση τα αξιώματα ένας αριθμός ως «ύψος», όπου οι προτασιακές συναρτήσεις θα γράφονται, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, ως εξής:

$$Qx_1Qx_2...Qx_n(P_1(x_1,x_2,...,x_n, y_1,y_2,...,y_m)=P_2(x_1,x_2,...,x_n, y_1,y_2,...,y_m))\&$$
$$(P_3(x_1,x_2,...,x_n, y_1,y_2,...,y_m)=P_4(x_1,x_2,...,x_n, y_1,y_2,...,y_m))\&...$$

όπου τα P είναι πολυώνυμα και κάθε Q είναι ένα σύμβολο ολότητας ή ένα σύμβολο ύπαρξης [ένας καθολικός ή ένας υπαρκτικός ποσοδείκτης]. Φυσικά τα πολυώνυμα είναι έτσι γραμμένα ώστε να εμφανίζονται σε αυτά μόνο θετικοί συντελεστές, γιατί αυτές οι συναρτήσεις υποτίθεται ότι σχηματίζονται μόνο με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό.

Αν K είναι το άθροισμα των συντελεστών τότε θα ονομάζεται «ύψος» της πρότασης ο αριθμός

$$K+n+m+\max(y_1,y_2,...,y_m)+\max(g_1,g_2,...,g_m)$$

όπου g_r είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P_r.

Προφανώς υπάρχουν τότε μόνο πεπερασμένο πλήθος προτάσεων με ένα δοσμένο ύψος στο **N**. (Παρατηρεί κανείς, ότι η γραμμένη παράσταση είναι μία προτασιακή συνάρτηση όσο οι $y_1,y_2,...,y_m$ είναι αόριστες. Μία πρόταση προκύπτει τότε μόνον όταν δοθούν για τα $y_1,y_2,...,y_m$ συγκεκριμένες τιμές). Μέσα στο **N** ισχύει τότε η ακόλουθη πρόταση:

Υπάρχει ένας μέγιστος αριθμός μεταξύ όλων, που εμφανίζονται ως τιμές συναρτήσεων μίας μεμονωμένης μεταβλητής, οι οποίες ορίζονται μέσω προτάσεων ύψους $\leqslant x$ για την τιμή x του ορίσματος.

Αντιθέτως, αυτό δεν ισχύει στο $\mathbf{N}^*$. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσει κανείς όλες τις προτάσεις που ορίζουν συναρτήσεις μίας μεταβλητής και έχουν ύψος ≤t, με το να παρασταθούν όλα τα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$ ως συναρτήσεις της μεταβλητής tœ**N** εμφανίζονται ανάμεσά τους όλες όσες έχουν ύψος έναν αριθμό από το **N**.[9] Οι συναρτήσεις μίας μεταβλητής που ορίζονται με αυτές αποτελούν όμως όλα τα στοιχεία f του $\mathbf{N}^*$, και δεν μπορεί τότε να εμφανισθεί μεταξύ των διαφόρων f(t) καμία μέγιστη.

Μπορεί, μάλιστα, κανείς να πει ότι για το $\mathbf{N}^*$ ισχύει επί πλέον το ακόλουθο αξίωμα, αν ονομάζει κανείς τις ως τώρα κατασκευάσιμες συναρτήσεις, συναρτήσεις με την στενότερη έννοια: Υπάρχει μία προτασιακή συνάρτηση A(x) υπό την ευρύτερη έννοια τέτοια, ώστε αληθεύει:

$$\$xA(x)\& \ "x\$y(A(x)ØA(y)\&(x>y)).$$

Εντούτοις, δεν θα ονομάσει κανείς μίαν τέτοια ακολουθία την «ακολουθία των φυσικών αριθμών», γιατί όποια περιοχή προτασιακών συναρτήσεων και να μας δώσουν τα παρατιθέμενα αξιώματα, θα απαιτήσει κανείς, ότι το αξίωμα (6) θα ισχύει για κάθε τέτοια.

Σχόλια και Παρατηρήσεις

1. Παραδείγματα συναρτήσεων των φυσικών αριθμών f:**NØN** με την παραπάνω έννοια (όπου n,xœ**N** αλλά και k, a_k, b_kœ**N)**:

$$x^n,\quad P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\ ,\ a_k œ\mathbf{N},\quad P_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$$

Πρόκειται για όλες τις δυνατές συνδέσεις των στοιχείων ενός συνόλου συμβόλων {n, m, a_0, a_1, …, a_n, x, y} με τα σύμβολα «+» και «*», όπου η τελευταία δυνατότητα επιτρέπει επίσης υψώσεις σε σταθερή δύναμη.

Οι παραστάσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως πολυώνυμα πολλών μεταβλητών ως προς κατάλληλες μεταβλητές, αφού όλες οι μεταβλητές καθώς και όλες οι παράμετροι είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί! Αντίθετα, δεν συμπεριλαμβάνονται οι συναρτήσεις:

$$n^x\ ,\ m^{P_n(x)},\ Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k k^x\ ,\ R_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k b_k^x$$

γιατί δεν προκύπτουν με πεπερασμένο πλήθος προσθέσεων και πολλαπλασιασμών. Δεν ορίζονται για κάθε x με πεπερασμένο πλήθος πράξεων (προσθέσεων και πολλαπλασιασμών).

Αντίθετα οι ΕΚΠ(x,y) και ΜΚΔ(x,y) είναι συναρτήσεις των ΦΑ x και y.

2. Οι συναρτήσεις g(x) που κατασκευάζονται ή επιλέγονται σύμφωνα με το Θεώρημα 1 <u>δεν</u> είναι εν γένει πολυώνυμα!

3α. Οι συναρτήσεις f(x) που αποτελούν στοιχεία του $\mathbf{N}^*$, <u>δεν</u> είναι οπωσδήποτε πολυώνυμα ως προς όλες τις παραμέτρους τους. Σύμφωνα με τα γραφόμενα στις σελίδες 3 και 4 ισχύει:

Σε κάθε περίπτωση που ισχύει "x$yA(x,y) μπορεί να εισαχθεί μίαν συνάρτηση f(x), έτσι ώστε να προκύψει ότι ισχύει A(x,f(x)) για κάθε x. Μεταξύ όλων των y για τα οποία ισχύει A(x,y) για ένα τυχαίο x, υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός, που μπορεί να ονομασθεί f(x) και προσδιορίζεται από το x

[9] δηλαδή όλες οι προτάσεις εκείνου του είδους στο **N**.

(και την προτασιακή συνάρτηση A). Έτσι, η συνάρτηση y=f(x) είναι ισοδύναμη με A(x,y)&"z(A(x,z)Ø(y≦z)), {Δηλαδή, για κάποια x,y ισχύει A(x,y), και για κάθε z για το οποίο ισχύει A(x,z) ισχύει επίσης y≦z}, και έχουμε "xA(x,f(x)). Η A(x,y) αναφέρεται μεν σε σχέσεις μεταξύ πολυωνύμων των μεταβλητών x και y, αλλά η εξάρτηση του y από το x δεν είναι απαραίτητα πολυωνυμική. Παραδείγματα:

Π1. Η σχέση $x^2+y^2 \leqslant 25$ σημαίνει, με βάση τον κανόνα επιλογής για κάθε x του ελάχιστου y: (x,y) = (1,1), (2,1), (3,1), (4,1) μόνο. Άλλα ζεύγη δεν υπάρχουν. Άρα η σχέση αυτή δεν ορίζει μία προτασιακή συνάρτηση A(x,y), γιατί δεν ισχύει για κάθε x.

Π2. Η σχέση $x^2 \leqslant y$ έχει τις λύσεις (x,y)=(1,1), (2,4), (3,9), … και γενικά, $y=x^2$.

Π3. Η σχέση $x^2 \leqslant 2y$ έχει τις λύσεις (x,y)=(1,1), (2,2), (3,5), (4,8), (5,13), …, δηλαδή $y=[x^2/2]$ όπου [z] το ακέραιο μέρος του z. Η σχέση αυτή δεν είναι πολυωνυμική.

Π4. Η σχέση $x^2+1 \geqslant 2y$ έχει τις λύσεις (x,y)=(1,1), (2,2), (3,5), (4,8), … δηλαδή $y=[(x^2+1)/2]$.

Π5. Η σχέση $x^2 \leqslant 2y^3$ έχει τις λύσεις (x,y)=(1,1), (2,2), (3,2), (4,2), … δηλαδή $y=[(x^2/2)^{1/3}]$.

Π6. Η σχέση: $x^n \leqslant ky^m$ επαληθεύεται για κάθε x και η ελαχιστότιμη επαληθεύουσα είναι: $f(x)=[(x^n/k)^{1/m}]$.

Η f(x) είναι η συνάρτηση των ελαχίστων τιμών που επαληθεύουν την σχέση A(x,y) αν αυτή επαληθεύεται με κατάλληλα y για κάθε τιμή του x.

3β. Η κατασκευή αριθμητικών συναρτήσεων, που να αντιστοιχούν σε τύπους του φορμαλιστικού συστήματος της Αριθμοθεωρίας, γίνεται προφανώς για να επιβεβαιωθεί ότι για κάθε τέτοιον τύπο υπάρχουν συναρτήσεις από την ακολουθία $\mathbf{N}^*$ που να τον ικανοποιούν!!!

Έτσι ο Skolem διαπιστώνει ότι όλες οι γενικής ισχύος προτάσεις που μπορούν να παραχθούν από το εκάστοτε σύστημα αξιωμάτων ισχύουν και αν στην θέση των μεταβλητών βάλουμε αντί ΦΑ πολυώνυμα <ή άλλες συναρτήσεις> των ΦΑ.

4. Ορισμός των όρων «προτάσεις» και «προτασιακές συναρτήσεις» με βάση το κείμενο:

Σελ.2: Ως «προτασιακές συναρτήσεις» θεωρούνται κάθε είδους προτάσεις που κατασκευάζονται μέσω των 5 λογικών πράξεων με βάση εξισώσεις, ή σχέσεις μεγαλυτέρου ή μικροτέρου μεταξύ *πολυωνύμων*.

Σελ.6: Οι προτάσεις και προτασιακές συναρτήσεις, που μπορούν να συντεθούν με βάση τα αξιώματα, έχουν την μορφή:

$$Qx_1Qx_2\ldots U(x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2,\ldots),$$

όπου τα Q παριστάνουν ποσοδείκτες [" ή **$**], ενώ η U σχηματίζεται με Σύζευξη , Διάζευξη ή Άρνηση (και, αν θέλει κανείς, συνεπαγωγή) από σχέσεις με '<' ή '=' μεταξύ *πολυωνύμων* με ακέραιους συντελεστές.

5. Ορισμός του συνόλου **N*** με βάση το κείμενο:

Σελ.3-4: Σε κάθε περίπτωση που ισχύει "x$yA(x,y) μπορεί κανείς να εισαγάγει μίαν συνάρτηση f(x), έτσι ώστε να προκύψει ότι ισχύει A(x,f(x)) για κάθε x. Μεταξύ όλων των y για τα οποία ισχύει A(x,y) για ένα τυχαίο x, υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός, που μπορεί να ονομασθεί f(x) και προσδιορίζεται από το x (και την προτασιακή συνάρτηση A). Τότε είναι, επομένως, η y=f(x) ισοδύναμη με A(x,y)& "z(A(x,z) Ø(y≦z)), και έχουμε "xA(x,f(x)).

Παρόμοια, αν είναι δοσμένη μία προτασιακή συνάρτηση A(x,y,z), μπορεί κανείς να σχηματίσει την προτασιακή συνάρτηση A(x,u,v)&"u"v(A(x,u,v) Ø(y<u)¤(y=u)&(y≦v)), μέσω της οποίας είναι δοσμένα τα y και z ως συναρτήσεις y=f(x) και z=g(x) του x. Ο y=f(x) είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η A(x,y,z) για οποιοδήποτε z, και z=g(x) είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η A(x,f(x),z). Αν η "xyzA(x,y,z) είναι αληθής, τότε υπάρχουν οι συναρτήσεις f(x) και g(x) για όλα τα x, και έχουμε "xA(x,f(x),g(x)).

Παρόμοια μπορεί κανείς να σχηματίσει την προτασιακή συνάρτηση A(x,y,z)&"u(A(x,y,u)Ø(z≦u)), μέσω της οποίας έχουμε z = f(x,y), αν αληθεύει η "x"y$zA(x,y,z). Η τελευταία πρόταση μπορεί τότε να γραφτεί στην μορφή "x"yA(x,y,f(x,y)).

Σύμφωνα με την πρώτη παράγραφο στην σελ. 8 τα στοιχεία f του $\mathbf{N}^*$ είναι συναρτήσεις μίας μεταβλητής! *Άρα στο $\boldsymbol{N}^*$ περιλαμβάνονται μόνο τα δύο πρώτα από τα τρία είδη συναρτήσεων που κατασκευάζονται παραπάνω.*

Σελ.4: Οι συναρτήσεις που προκύπτουν έτσι μέσω των αληθών γενικών υπαρξιακών προτάσεων σχηματίζουν μία κλειστή ολότητα σε σχέση με αντικαταστάσεις τέτοιων συναρτήσεων στην θέση μεταβλητών. Την ολότητα αυτών των συναρτήσεων την ονομάζουμε $\boldsymbol{N}^*$.

Σελ.6: Αν $F(x_1,x_2,\ldots)$ είναι μία συνάρτηση στο **N**, και $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, … μεταβλητά στοιχεία του $\mathbf{N}^*$, τότε η $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots)$ είναι μία συνάρτηση στο $\mathbf{N}^*$. Κάθε συνάρτηση στο **N** αντιστοιχεί κατ' αυτόν τον τρόπο σε μίαν συνάρτηση στο $\mathbf{N}^*$.

*Σελ.*6: Η συνάρτηση F σχηματίζεται με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό σε πεπερασμένη επανάληψη. Άρα είναι πολυώνυμο (ως προς κατάλληλες μεταβλητές).

Τα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$ μπορούν κατά το θεώρημα 1 να διαταχθούν γραμμικά σύμφωνα με τον ρυθμό αυξήσεώς τους προς το άπειρο, αν βάλει κανείς μίαν κατάλληλη συνάρτηση g(x) στην θέση του x.

5. Στην επόμενή του εργασία επεκτείνει και συμπληρώνει ο Skolem το σύνολο M των αριθμητικών συναρτήσεων του **Π** για να συμπεριλάβει τα αριθμητικά πολυώνυμα και όλες τις συναρτήσεις που προκύπτουν με αντικαταστάσεις. Δημιουργεί έτσι το υπερσύνολο M' που περιλαμβάνει και τα πολυώνυμα και το υπερσύνολο αυτού το **M**, που περιλαμβάνει και όλες τις συναρτήσεις που προκύπτουν με αντικαταστάσεις. Μετά επιλέγει το υποσύνολο $\mathbf{M_1}$, των συναρτήσεων μίας μεταβλητής στο **M** και το διατάσσει κατά σειρά μεγέθους των συναρτήσεων αυτών δημιουργώντας έτσι την ακολουθία $\mathbf{N}^*$.

Αυτά όλα γίνονται για να ισχύει τελικά F:($\mathbf{N}^*$)^n**Ø**$\mathbf{N}^*$ για τις συναρτήσεις n μεταβλητών F**œ**M, όπως ισχύει και F:$\mathbf{N}^n$**Ø**N.

6α. *Ερώτηση:* Πόσα συστήματα σαν το $\mathbf{N}^*$, δηλαδή πόσες παραλλαγές του $\mathbf{N}^*$, μπορούν να υπάρξουν;

Απάντηση: Αναρίθμητες! Το $\mathbf{N}^*$ αποτελείται από τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, που αντιστοιχούν σε αριθμοθεωρητικές προτάσεις με *καθολική ισχύ* (περιέχουν τον ποσοδείκτη '**"**'), όπως η **"**x**$**yA(x,y) ή η **"**x**$**y**$**zA(x,y,z) ή η **"**x**$**y**"**z**$**uA(x,y,z,u) ή η **$**x**"**y**$**zA(x,y,z). Όμως εδώ έχουμε διάφορους τρόπους να δημιουργήσουμε παραλλαγές:

(α) Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε μία πρόταση **"**x**$**yA(x,y) για κάθε x, όχι την ελάχιστη τιμή y για την οποία αληθεύει η πρόταση, αλλά την αμέσως μεγαλύτερη (όταν υπάρχει) ή την δεύτερη μεγαλύτερη κ.ο.κ. Έτσι, αντιστοιχεί στην παραπάνω πρόταση μία διαφορετική συνάρτηση y=f(x) από ότι αρχικά.

(β) Κατά την γραμμική διάταξη αυτών των συναρτήσεων με σύγκριση των σημειακών τιμών τους, για να γράψουμε f<g ή f>g ή f=g μπορούμε να επιλέξουμε (αν υπάρχει) ένα διαφορετικό απειροσύνολο τιμών για τις οποίες ισχύει η μία από τις τρεις σχέσεις από εκείνο που επιλέξαμε αρχικά. Για παράδειγμα, αν f(2k)<g(2k) αλλά f(2k+1)>g(2k+1) για όλα τα k**œ**N μπορούμε αντί για f<g να επιλέξουμε την διάταξη f>g.

6β. <u>Παρατήρηση:</u> Όλα αυτά τα μοντέλα είναι, όμως, ισόμορφα προς το $\mathbf{N}^*$.

Ο Skolem <u>δεν</u> κατασκευάζει πολλαπλά μοντέλα για κάθε σύστημα αξιωμάτων. Χρησιμοποιεί μόνο το $\mathbf{N}^*$.

Η ύπαρξη πολλαπλών μη ισόμορφων μοντέλων (διαφορετικού πληθικού τύπου) για κάθε σύστημα αξιωμάτων φαίνεται να αποδείχθηκε από τον Alfred Tarski. Στις εργασίες του 1933 και 1934 ο Skolem αποδεικνύει απλά την ύπαρξη <u>ενός μόνο</u> μη ισόμορφου προς τους φυσικούς αριθμούς μοντέλου, είτε περιγράφονται με ένα πεπερασμένο σύστημα αξιωμάτων είτε με ένα άπειρο αλλά αριθμήσιμο!

7. Η Πλήρης Επαγωγή είναι:

U(1)&**"**x(U(x)**Ø**U(x+1)) **Ø** **"**yU(y)

ενώ το νέο αξίωμα της τελευταίας παραγράφου του κειμένου έχει την μορφή:

$**xA(x)& **"**x**$y(A(x)**Ø**A(y)&(x>y))

Δηλαδή, για κάποιο x ισχύει A(x), και για όλα τα x υπάρχει κατάλληλο y <u>μικρότερο του x</u> τέτοιο ώστε A(x) συνεπάγεται A(y).

Αυτό είναι ατέρμων αναδρομή προς τα πίσω και όχι επαγωγή.

8. Η μετέπειτα εξέλιξη αυτών των ιδεών του Skolem σύμφωνα με τον Hao Wang: Popular Lectures on Mathematical Logic, Dover, 1993.

p.80: In 1933 Skolem introduced a method of constructing models for the theory of natural numbers to give *nonstandard models.* This was generalized by Los in 1955 and has been widely used since then.

See J. Los: *Fundamenta Mathematica,* vol.42 (1955), pp.38-54.

p.82: One application of these theorems is the introduction of *nonstandard analysis* which was originally instituted by other considerations. By using a suitable *ultrapower* of the structure of the field **R** of real numbers, a real

closed field that is elementarily equivalent to **R** is obtained that is non-Archimedean.

Σύγχρονη Ορολογία και Συμβολισμός:

Στην παράφραση αυτή της εργασίας του Skolem αντικαταστήσαμε τον συμβολισμό του Schröder, που δεν χρησιμοποιείται πια, με τα ακόλουθα σύμβολα:

'**"**' Καθολικός Ποσοδείκτης, '**$**' Υπαρκτικός Ποσοδείκτης

'&' ή '/' Σύζευξη, '**¤**' Διάζευξη, '**Ø**' Συνεπαγωγή, '~' Άρνηση, '**ñ**' ή '=' Ισοδυναμία.

Για την σύζευξη των παραστάσεων A και B χρησιμοποιείται συχνά, εκτός από τους συμβολισμούς 'A&B' ή 'A/B', επίσης η απλή παράθεση: 'AB'. Εδώ χρησιμοποιώ το σύμβολο '&' αντί για το σύνηθες σύμβολο σύζευξης '/', γιατί το τελευταίο μοιάζει πολύ με αυτό της διάζευξης '**¤**'.

'**"**x**$**yU(x,y)' σημαίνει ότι για κάθε x υπάρχει *κατάλληλο* y , *όχι αναγκαστικά πάντα το ίδιο*, ώστε να ισχύει U(x,y).

M(x,y,z) Είναι Τριμελές Κατηγορηματικό Σύμβολο που δηλώνει μία σχέση. Δηλαδή, ο όρος «Σχέσεις» σημαίνει «Κατηγορήματα».

Οι δύο βασικές βαθμίδες Συμβολικής Λογικής ονομάζονται στα Ελληνικά «Προτασιακή Λογική», και η «Κατηγορηματική Λογική», όπου η δεύτερη χωρίζεται επίσης σε πρώτη και δεύτερη βαθμίδα. Ο Skolem χρησιμοποιεί εδώ κυρίως τον συμβολισμό της Κατηγορηματικής Λογικής πρώτης βαθμίδας.

Δομή της εργασίας του Skolem του έτους 1934

1. Εξετάζει συναρτήσεις ακεραίων θετικών μεταβλητών που έχουν ακέραιες θετικές τιμές. Αν f(x) και g(x) είναι δύο τέτοιες συναρτήσεις, τότε υπάρχουν πάντοτε είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) < g(x), είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) = g(x) είτε άπειρα x για τα οποία είναι f(x) > g(x). Για κάθε τέτοιο ζεύγος συναρτήσεων ορίζεται μία διάταξη αναλόγως του ποιο από τα τρία ενδεχόμενα ισχύει, όπου αν ισχύουν περισσότερα από ένα τέτοια ενδεχόμενα επιλέγουμε αυθαίρετα μία από τις προσφερόμενες δυνατότητες διάταξης. Για να δημιουργηθεί μία διάταξη συγκεκριμένων συναρτήσεων αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα1. Έστω ότι $f_r(x)$, r=1,2,3,... είναι μία ακολουθία συναρτήσεων. Τότε υπάρχει πάντα μία συνάρτηση g(x), που αυξάνεται μονότονα, τέτοια ώστε, αν είναι i<j δύο δείκτες, ισχύει πάντα συνεχώς μία από τις τρεις περιπτώσεις:

$$f_i(g(x))<f_j(g(x)),\ f_i(g(x))=f_j(g(x)),\ f_i(g(x))>f_j(g(x))$$

όταν $x>x_0$ όπου x_0 ορισμένος αριθμός.

2. Εξετάζει τώρα ένα απλό σύστημα αξιωμάτων της Αριθμητικής αποτελούμενο από τις ακόλουθες προτάσεις που ισχύουν για τους φυσικούς αριθμούς **N**:

(1) Οι αριθμοί είναι γραμμικά διατεταγμένοι μέσω της σχέσης <. Αυτή η σχέση είναι ασύμμετρη και μεταβατική.

(2) Υπάρχει ένας μικρότερος αριθμός 1.

(3) Για κάθε αριθμό x υπάρχει ένας αμέσως μεγαλύτερος x+1, δηλαδή x<y x+1≦y.

(4) Υπάρχει μία πράξη +, που λέγεται πρόσθεση, όπου ισχύει η αναδρομική σχέση

$$x+(y+1)=(x+y)+1.$$

(5) Υπάρχει μία πράξη που λέγεται πολλαπλασιασμός, [δοσμένη] με την [αναδρομική] σχέση

$$x(y+1)=xy+x.$$

(6) Για μία οποιαδήποτε *προτασιακή συνάρτηση* [δηλ. *κατηγόρημα*] U(x) ισχύει η αρχή της επαγωγής:

$$U(1)\&\text{"}x(U(x)\text{Ø}U(x+1))\ \text{Ø}\ \text{"}yU(y)$$

(7) Για μία τυχαία προτασιακή συνάρτηση U(x) ισχύει <η αρχή της αντικαταστάσεως>:

$$(x=y)\ \text{Ø}(U(x)\quad U(y)).$$

3. Ως «προτασιακές συναρτήσεις» ονομάζει κάθε είδους προτάσεις που κατασκευάζονται μέσω των 5 λογικών πράξεων με βάση εξισώσεις, ή <u>σχέσεις</u> μεγαλυτέρου ή μικροτέρου <u>μεταξύ *πολυωνύμων*</u>

4. Αποδεικνύει ότι όλες οι προτάσεις που μπορούν να παραχθούν με βάση τις προϋποθέσεις (1)-(7) με προσθήκη της αρχής της του τρίτου αποκλείσεως

ισχύουν επίσης για γραμμικά διατεταγμένα σύνολα άλλης, ευρύτερης φύσης από τους φυσικούς αριθμούς.

5. Από την γενική φύση της απόδειξης προκύπτει ότι αυτό θα ισχύει πάντοτε, ακόμα και αν προστεθούν ως αξιώματα άλλες ιδιότητες της ακολουθίας των αριθμών ανεξάρτητες από τα δοθέντα αξιώματα.

6. Αποδεικνύει κατ' αρχήν την ακόλουθη επέκταση της επαγωγικής συναγωγής:

Έστω ότι ισχύει U(1) και επίσης U(z+1) αν ισχύει U(z) για όλα τα u ≤ z. Τότε ισχύει U(x) για όλα τα x. Πρόκειται, λοιπόν, να δειχθεί ότι

U(1)& "y["x((x≤y) Ø U(x))Ø U(y+1)]Ø U(z).

7. Παρατηρεί ότι σε *κάθε μη κενό σύνολο αριθμών υπάρχει ένας ελάχιστος, όπου* εδώ «σύνολο» σημαίνει μία συλλογή δοσμένη μέσω των προτασιακών συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

8. Στοχεύει τώρα στο να αποδείξει ότι όλες οι προτάσεις που ισχύουν για τους ΦΑ, δηλαδή την ακολουθία **N**, ισχύουν και για το διατεταγμένο σύνολο συναρτήσεων μίας μεταβλητής των ΦΑ.

Για να το πετύχει αυτό κατασκευάζει για κάθε πρόταση που αληθεύει για ΦΑ μίαν συνάρτηση ΦΑ που να ικανοποιεί την πρόταση αυτήν.

Αυτό γίνεται με εξέταση όλων των δυνατών περιπτώσεων:

α. Αν η πρόταση "x $yA(x,y) είναι αληθής έτσι, ώστε για κάθε x υπάρχει μόνο ένα y τέτοιο ώστε να ισχύει A(x,y). Τότε μπορεί κανείς να πει ότι με την A(x,y) ορίζεται μία συνάρτηση y=f(x) με την συνηθισμένη μαθηματική έννοια. Η εξίσωση y=f(x) είναι μία μεταγραφή της A(x,y), και αντί για "x$yA(x,y) έχει κανείς τότε "x A(x,f(x)).

β. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει "x$yA(x,y) αλλά για κάθε x υπάρχουν περισσότερες τιμές y που την ικανοποιούν διαλέγει ως f(x) την ελάχιστη από αυτές τις τιμές.

Σύμφωνα με ότι ήδη απέδειξε, υπάρχει μεταξύ όλων των y για τα οποία ισχύει A(x,y) για ένα τυχαίο x, ένας ελάχιστος αριθμός, που μπορεί να ονομασθεί f(x) και προσδιορίζεται από το x (και φυσικά από την προτασιακή συνάρτηση A).

Τότε είναι, επομένως, η y=f(x) ισοδύναμη με A(x,y)& "z(A(x,z) Ø(y≤z)), και έχουμε "xA(x,f(x)).

γ. Παρόμοια, αν είναι δοσμένη μία προτασιακή συνάρτηση A(x,y,z), μπορεί κανείς να σχηματίσει την προτασιακή συνάρτηση A(x,u,v)&"u"v(A(x,u,v) Ø(y<u)¤(y=u)&(y≤v)), μέσω της οποίας είναι δοσμένα τα y και z ως συναρτήσεις y=f(x) και z=g(x) του x.

Ο y=f(x) είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η A(x,y,z) για οποιοδήποτε z, και z=g(x) είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η A(x,f(x),z). Αν η "xyzA(x,y,z) είναι αληθής, τότε υπάρχουν οι συναρτήσεις f(x) και g(x) για όλα τα x, και έχουμε "xA(x,f(x),g(x)).

δ. Παρόμοια, αν αληθεύει η "x"y$zA(x,y,z), μπορεί κανείς να σχηματίσει την προτασιακή συνάρτηση A(x,y,z)&"u(A(x,y,u)Ø(z≤u)), μέσω της οποίας δίνεται το z ως συνάρτηση f(x,y). Η τελευταία πρόταση μπορεί τότε να γραφτεί στην μορφή "x"yA(x,y,f(x,y)).

ε. Με παρόμοιο τρόπο εργάζεται και αν τα σύμβολα " και $ εμφανίζονται εναλλάξ. Έστω, π.χ., η πρόταση "x$y"z$uA(x,y,z,u).

Για συντομία βάζουμε προσωρινά, "z$uA(x,y,z,u)=B(x,y) και σχηματίζουμε την "x$yB(x,y)&"v(B(x,v)Ø(y≦v)), που είναι μία αληθής πρόταση.

Αυτή ορίζει το y ως συνάρτηση f(x), οπότε ισχύει "xB(x,f(x)), δηλαδή, "x"z$uA(x,f(x),z,u).

Τότε ισχύει επίσης η "x"z$uA(x,f(x),z,u)& "w(A(x,f(x),z,w)Ø(u≦w)), με την οποία προσδιορίζεται η u=g(x,z).

Έτσι, αντί για "x$y"z$uA(x,y,z,u) μπορούμε να γράψουμε "x"zA(x,f(x),z,g(x,z)).

ζ. Αν έχει κανείς μία πρόταση, που αρχίζει με ένα σύμβολο '$', όπως π. χ. $x"y$zA(x,y,z), μπορεί να πει ότι έχει "yA(a,y,f(y)) για έναν ορισμένο αριθμό a και μία συνάρτηση f(y).

9. Οι συναρτήσεις που προκύπτουν έτσι μέσω των αληθών γενικών υπαρξιακών προτάσεων σχηματίζουν μία κλειστή ολότητα σε σχέση με αντικαταστάσεις τέτοιων συναρτήσεων στην θέση μεταβλητών.

Ας θεωρήσουμε, π.χ., τις z=f(x,y) και y=g(u), όπου η z=f(x,y) ισοδυναμεί με την ισχύ μίας πρότασης A(x,y,z) και η y=g(u) με την ισχύ της πρότασης B(y,u).[10]

Τότε για την πρόταση C(x,u,z)= $yA(x,y,z)&B(y,u), προκύπτει ότι είναι αληθής η "x"u$zC(x,u,z) και το z προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα x και u, δηλ. η z είναι συνάρτηση των x και u. Αυτή η συνάρτηση προκύπτει με αντικατάσταση του y=g(u) στην z=f(x,y), δηλ. z=f(x,g(u)).

Παρόμοια, αν σχηματίσει κανείς την πρόταση $zA(x,y,z)&B(u,z)=D(x,y,u), αναγνωρίζει ότι η πρόταση "x"y$uD(x,y,u) αληθεύει και μάλιστα έτσι ώστε η μεταβλητή u να προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις x, y. Αυτή η συνάρτηση είναι τότε η u=g(f(x,y)). Είναι ξεκάθαρο ότι αυτή η αναπαραγωγή ισχύει γενικά.

Ας ονομάσουμε την ολότητα αυτών των συναρτήσεων **N***.

<Προφανώς, ο Skolem εννοεί εδώ ότι, με κατάλληλες αντικαταστάσεις, όλες οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών θα γίνουν συναρτήσεις μίας (το πολύ) μεταβλητής. Αυτήν την παράλειψη προσπαθεί να διευκρινίσει με τα θεωρήματα 3 και 4 στην εργασία του 1935.>.

10. Επειδή προϋποτίθεται ότι ισχύει η αρχή αποκλείσεως τρίτου για τις προτάσεις που κατασκευάζονται με βάση τα δοθέντα αξιώματα, δεν είναι δύσκολο να αναγνωρίσουμε ότι, αν $f_1(x)$ και $f_2(x)$ είναι δύο τυχόντα στοιχεία του **N***, ή θα υπάρχουν άπειρα x τέτοια ώστε είναι $f_1(x)<f_2(x)$, ή άπειρα τέτοια ώστε $f_1(x)=f_2(x)$, ή άπειρα τέτοια ώστε $f_1(x)>f_2(x)$. Ως εκ τούτου μπορούν τα στοιχεία του **N*** σύμφωνα με το θεώρημα 1 να διαταχθούν γραμμικά σύμφωνα με τον ρυθμό αυξήσεώς τους προς το άπειρο, αν βάλει κανείς μίαν κατάλληλη συνάρτηση g(x) στην θέση του x.

11. Το ότι ισχύουν και οι ιδιότητες (2) και (3) του **N** φαίνεται εύκολα. Γιατί στα στοιχεία του **N*** ανήκουν και οι «σταθερές», δηλαδή τα στοιχεία του **N**. Ειδικότερα ανήκει, λοιπόν το 1 στο **N*** και προφανώς είναι στο **N*** 1≦f, όπου f είναι ένα τυχαίο στοιχείο του **N***, αφού είναι 1≦f(g(x)) για όλα τα x. Παρομοίως είναι το $1+f_1(x)$ ένα στοιχείο του **N** αν είναι τέτοιο το $f_1(x)$, και αν

[10] (Συνήθως αυτή η συνάρτηση A είναι κατασκευασμένη έτσι, ώστε εμφανίζονται μέσα σε αυτήν φαινομενικές μεταβλητές, όπως φαίνεται από τα παραπάνω παραδείγματα).

ισχύει $f_1g(x)<f_2g(x)$ για όλα τα x, τότε ισχύει $f_1g(x)+1\leq f_2g(x)$ για όλα τα x, δηλαδή η (3) είναι σωστή.

12. Παρατηρούμε, τώρα, ότι το **N*** είναι διατεταγμένο κατά έναν πολύ ευρύτερο τρόπο από ότι το **N**. *Συνολοθεωρητικά, έχει το **N*** έναν σημαντικά ανώτερο διατακτικό τύπο από ότι το **N***, γιατί ήδη το στοιχείο x του **N*** είναι > από οποιαδήποτε σταθερά n.[11] Παραπέρα είναι x+1>x, x+2>x+1, …, 2x>x+n, όπου n μία τυχούσα σταθερά κ.ο.κ.

Κατά τα άλλα υπάρχει στο **N***, ακριβώς όπως και στο **N**, ένα αμέσως μικρότερο στοιχείο για κάθε στοιχείο που είναι >1. Έστω, δηλαδή, ότι η y=δ(x) είναι δοσμένη με την πρόταση (y+1≥x)&"z(z+1≥xØ(y≤z)) [σωστό είναι να μπει εδώ (z>y)][12]. Επειδή προφανώς στο **N** αληθεύει η πρόταση "x$y(y+1≥x), υπάρχει η δ(x) για όλα τα x και είναι επομένως ένα στοιχείο του **N***. Είναι, όμως, εύκολο να δούμε ότι η δf(x) είναι το αμέσως προηγούμενο της f στοιχείο[13] του **N***, αν είναι f>1, γιατί f>1 σημαίνει ότι είναι fg(x)>1 για όλα τα x, και επειδή δ(x)+1=x για x>1, θα είναι δfg(x)+1=fg(x). Δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε στενότερα τον τύπο του **N***.

13. Αν $F(x_1,x_2,\ldots)$ είναι μία συνάρτηση ορισμένη πάνω στο **N**, τότε, αν $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, … παριστάνουν μεταβλητά στοιχεία του **N***, είναι $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots)$ μία συνάρτηση στο **N***, δηλαδή κάθε συνάρτηση στο **N** παριστάνει κατ' αυτόν τον τρόπο μίαν τέτοια συνάρτηση και στο **N***. Το **N*** έχει επομένως τις ιδιότητες (1), (2), (3), (4), (5), γιατί προφανώς παραμένουν και στο **N*** σε ισχύ οι αναδρομικοί τύποι για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Παρόμοια έχουν ένα νόημα και στο **N*** όλες οι προτάσεις και προτασιακές συναρτήσεις, που μπορούν να συντεθούν με βάση τα αξιώματα, γιατί κάθε τέτοια πρόταση ή προτασιακή συνάρτηση έχει την μορφή

$$Qx_1Qx_2\ldots U(x_1,x_2,\ldots,y_1,y_2,\ldots),$$

όπου τα Q παριστάνουν ποσοτικοποιήσεις ["$ή $], ενώ η U σχηματίζεται με Σύζευξη , Διάζευξη ή Άρνηση (και, αν θέλει κανείς, συνεπαγωγή) από σχέσεις με '<' ή '=' μεταξύ *πολυωνύμων*[14] με ακέραιους συντελεστές. Αυτές οι σχέσεις διατηρούν, όμως ένα νόημα, αν βάλει κανείς στην θέση των μεταβλητών τυχαίες συναρτήσεις μίας μεταβλητής x από το **N** ή, με άλλα λόγια, τυχόντα στοιχεία του **N***.

14. Το ότι για το **N*** ισχύουν επίσης τα αξιώματα επαγωγής, (6), και αντικατάστασης, (7), προκύπτει ως ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 2.

Προηγείται μία απλουστευτική παρατήρηση:

Τόσο στο **N** όσο και στο **N*** έχουμε

$$(x>y) = \$z(x=y+z)$$

---

[11] {Δεν υπάρχει όρος του **N** που να αντιστοιχεί στον xœ**N***, γιατί οι όροι του **N** είναι ήδη σε αντιστοιχία ένας-προς-έναν προς τις σταθερές συναρτήσεις στο **N***.}

[12] {Ο τύπος (y+1≥x)&"z(z+1≥xØ(z>y)) ισοδυναμεί με (y≥x-1)&"z(z≥x-1Ø(z>y)). Δηλαδή είναι y≥x-1 και αν για τυχόν είναι επίσης z≥x-1, τότε οφείλει να είναι z>y. Ειδικότερα, αφού x>x-1, πρέπει να είναι x>y, δηλαδή, x>y≥x-1, άρα y=x-1.}

[13] {Δηλαδή δf(x)=f(x)-1, αλλά αυτό ισχύει μόνο όταν ορισθεί η πράξη της αφαίρεσης!}

[14] {24.10.03: Οι συναρτήσεις x^n, και n^x είναι *και οι δύο* πολυώνυμα ως προς κατάλληλες μεταβλητές, επειδή x και n είναι ακέραιοι θετικοί αριθμοί}.{19.7.04: **ΛΑΘΟΣ!:** Η συνάρτηση n^x δεν είναι ορισμένη για κάθε x}.

Ως εκ τούτου, μπορεί κανείς να γράψει τις προτάσεις με τέτοιον τρόπο, ώστε στο στοιχειώδες μέρος τους [τον τύπο χωρίς τους ποσοδείκτες] να εμφανίζονται μόνο εξισώσεις και όχι ανισότητες. Περαιτέρω, έχουμε

$$(x=y)¤(z=u) = (xz+yu=xu+yz)$$

ώστε μπορούν να απαλειφθούν οι διαζεύξεις[15].

Άρα μπορεί κάθε πρόταση ή προτασιακή συνάρτηση να γραφτεί έτσι ώστε το στοιχειώδες μέρος της να είναι σύζευξη εξισώσεων.

*<u>Θεώρημα 2:</u> Κάθε πρόταση που μπορεί να παραχθεί με βάση τα παρατεθέντα αξιώματα, η οποία είναι αληθής στο **N** είναι αληθής και στο **N***.*

<u>Απόδειξη:</u>

Όπως εξηγήσαμε τώρα μόλις, μπορεί κανείς να γράψει την δοσμένη πρόταση έτσι ώστε το στοιχειώδες μέρος της να είναι σύζευξη εξισώσεων, τόσο όταν θεωρείται στο **N** όσο και όταν θεωρείται στο **N***.

Η ισχύς της πρότασης στο **N** μπορεί, με αντικατάσταση μερικών μεταβλητών με ορισμένες συναρτήσεις των άλλων, και επί πλέον με εισαγωγή ειδικών αριθμών για ορισμένες μεταβλητές, να εκφρασθεί έτσι ώστε αυτή η σύζευξη να ισχύει για τυχαίες τιμές στο **N** των μεταβλητών που απομένουν (Βλέπε §8 εδώ).

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 2 αρκεί τότε προφανώς να δείξουμε το ακόλουθο: Δίνεται μία εξίσωση

$$F(a_1, a_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots, f_1(x_1, x_2, \ldots), f_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots) =$$
$$G(a_1, a_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots, f_1(x_1, x_2, \ldots), f_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots)$$

που είναι αληθής στο **N** για τυχούσες τιμές των x_1, x_2,..., όπου a_1, a_2,... είναι ορισμένα ειδικά στοιχεία του **N** και f_1, f_2, ..., ορισμένες συναρτήσεις, δηλαδή στοιχεία του **N*** ενώ F και G σχηματίζονται με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό σε πεπερασμένη επανάληψη, δηλαδή είναι πολυώνυμα.

Πρέπει να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παραμένει αληθής στο **N***, δηλαδή, αν αντί x_1, x_2,... εισαχθούν τυχαίες συναρτήσεις $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Αυτό όμως το αναγνωρίζει κανείς σχεδόν αμέσως. Γιατί τόσο το F, όσο και το G γίνονται με εισαγωγή μία τυχαίας σειράς από φ στην θέση των x δύο συναρτήσεις της μεταβλητής x και έχουν για κάθε x από το **N** την ίδια τιμή [που ανήκει] στο **N**.

Είναι επομένως επίσης πάντα ίσες αν εισαχθεί g(x) αντί για x [βλ. Θεώρημα 1], δηλαδή είναι σύμφωνα με τον ορισμό της σχέσης '=' μεταξύ των συναρτήσεων πράγματι «ίδιες /ίσες» συναρτήσεις ή, με άλλα λόγια, για κάθε επιλογή των στοιχείων φ_1, φ_2, ... στο **N***, παριστάνουν το ίδιο στοιχείο του **N***. Με αυτό έχει αποδειχθεί το θεώρημα 2. **É**

15. Προφανώς βασίζεται η αποδειξιμότητα του θεωρήματος 2 μόνο στο ότι έχει προϋποτεθεί ο αποκλεισμός τρίτου [ενδεχομένου], ενώ οι εν γένει κατασκευάσιμες συναρτήσεις μπορούν να απαριθμηθούν. Το τελευταίο, όμως, ισχύει πάντα αν έχει δοθεί ένα συγκεκριμένο πλαίσιο παραγωγής προτάσεων και συναρτήσεων, δηλαδή αν έχει κανείς εν γένει ένα ακριβώς διατυπωμένο σύστημα αξιωμάτων. Επομένως:

---

[15] {Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με (x-y)*(z-u)=0 όταν ορισθεί η πράξη της αφαίρεσης}.

Ένα πεπερασμένο σύστημα αξιωμάτων δεν μπορεί ποτέ να χαρακτηρίσει την ακολουθία των [φυσικών] αριθμών, δηλαδή, να την διαχωρίσει από όλες τις άλλες ακολουθίες, τουλάχιστον αν περιλαμβάνει την αρχή του αποκλεισμού τρίτου ενδεχομένου.

16. Θα ήταν τώρα όμως πολύ ενδιαφέρον να δώσουμε μίαν πρόταση που θα ίσχυε στο $\mathbf{N}^*$, όχι όμως στο **N** και μάλιστα έτσι, που να μην είναι κοινότυπη, όπως [είναι] η ακόλουθη: Στο $\mathbf{N}^*$ υπάρχουν στοιχεία που δεν υπάρχουν στο **N**, ενώ φυσικά στο **N** δεν υπάρχουν στοιχεία που να μην ανήκουν στο $\mathbf{N}^*$.

Για να κατασκευάσουμε μίαν τέτοια πρόταση αντιστοιχούμε σε κάθε πρόταση σχετικά με το **N,** που κατασκευάζεται με βάση τα αξιώματα, έναν αριθμό που τον ονομάζουμε «ύψος» της.

Οι προτασιακές συναρτήσεις μπορούν να γραφτούν, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, ως εξής:

$$Qx_1Qx_2\ldots Qx_n(P_1(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,y_2,\ldots,y_m)=P_2(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,y_2,\ldots,y_m))\&$$
$$(P_3(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,y_2,\ldots,y_m)=P_4(x_1,x_2,\ldots,x_n, y_1,y_2,\ldots,y_m))\&\ldots$$

όπου τα P είναι πολυώνυμα και κάθε Q είναι ένα σύμβολο ολότητας, **"**, ή ένα σύμβολο ύπαρξης, **$**.

Φυσικά τα πολυώνυμα είναι έτσι γραμμένα ώστε να εμφανίζονται σε αυτά μόνο θετικοί συντελεστές, γιατί αυτές οι συναρτήσεις υποτίθεται ότι σχηματίζονται μόνο με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό.

Αν K είναι το άθροισμα των συντελεστών [των πολυωνύμων] τότε θα ονομάζεται «ύψος» της πρότασης ο αριθμός

$$K+n+m+\max(g_1,g_2,\ldots,g_m)+ \max(y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

όπου g_r είναι ο βαθμός του πολυωνύμου P_r.

Προφανώς υπάρχουν τότε μόνο πεπερασμένο πλήθος προτάσεων με ένα δοσμένο ύψος στο **N**.

Παρατηρεί κανείς, ότι η παραπάνω παράσταση είναι μόνο μία προτασιακή συνάρτηση όσο οι $y_1,y_2,\ldots,y_m$ είναι αόριστες. Γίνεται πρόταση τότε μόνον όταν δοθούν για τα $y_1,y_2,\ldots,y_m$ συγκεκριμένες τιμές.

Μέσα στο **N** ισχύει τότε η ακόλουθη πρόταση:

<u>Πρόταση:</u> Αν σε συναρτήσεις μίας μεταβλητής, που ορίζονται μέσω προτάσεων ύψους ≤x αντικαταστήσουμε την μεταβλητή με την τιμή x, τότε μεταξύ των αριθμών που προκύπτουν υπάρχει ένας μέγιστος.

Αντιθέτως, αυτό δεν ισχύει στο $\mathbf{N}^*$!

Αν θεωρήσει κανείς όλες τις προτάσεις με ύψος ≤t, που ορίζουν συναρτήσεις μίας μεταβλητής, με το να παρασταθούν όλα τα στοιχεία του $\mathbf{N}^*$ ως συναρτήσεις της μεταβλητής t**œN** εμφανίζονται ανάμεσά τους όλες όσες έχουν ύψος έναν αριθμό από το **N**.

Οι συναρτήσεις μίας μεταβλητής που ορίζονται έτσι αποτελούν όμως όλα τα στοιχεία f του $\mathbf{N}^*$, και δεν μπορεί μεταξύ των διαφόρων f(t) να εμφανισθεί καμία μέγιστη.

17. Αν ονομάζει κανείς τις ως τώρα κατασκευάσιμες συναρτήσεις, συναρτήσεις με την στενότερη έννοια [δηλαδή στο **N**], μπορεί κανείς να πει ότι για το $\mathbf{N}^*$ ισχύει επί πλέον το ακόλουθο αξίωμα:

<u>Αξίωμα:</u> Υπάρχει μία προτασιακή συνάρτηση A(x) υπό την ευρύτερη έννοια [δηλαδή στο $\mathbf{N}^*$] τέτοια, ώστε αληθεύει:

$$\$xA(x)\&\ "x\$y(A(x)\varnothing A(y)\&(x>y)).$$

18. Ο Skolem παρατηρεί ότι δεν μπορεί να ονομάσει κανείς μίαν τέτοια ακολουθία σαν την $\mathbf{N}^*$ την «ακολουθία των φυσικών αριθμών», γιατί όποια περιοχή προτασιακών συναρτήσεων και να μας δίνουν τα παρατιθέμενα αξιώματα, θα πρέπει μάλλον να απαιτήσουμε και την ισχύ του αξιώματος πλήρους επαγωγής, (6).