ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

α) Έστω X, Y διακριτές τ.μ. με από κοινού σ.μ.π. $f(x_i, y_j)$, $i, j = 0, 1, \ldots$. Ορίζουμε τη δεσμευμένη σ.μ.π. της διακριτής τ.μ. X, όταν γνωρίζουμε ότι η τ.μ. Y έχει την τιμή y_j, $j = 0, 1, \ldots$, ως:

$$f_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)},$$

όπου f_Y είναι η περιθώρια σ.μ.π. της τ.μ. Y.

β) Έστω X, Y συνεχείς τ.μ. με από κοινού σ.π.π. $f(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε την δεσμευμένη σ.π.π. της συνεχούς τ.μ. X, όταν Y = y ως:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},$$

όπου f_Y είναι η περιθώρια σ.π.π. της Y.

<u>Δεσμευμένη Μέση Τιμή και Δεσμευμένη Διασπορά</u>:

α) Έστω X, Y διακριτές τ.μ. και $f_{X|Y}(x_i|y_j)$, $i = 0, 1, \ldots$, η δεσμευμένη σ.μ.π. της X δεδομένου ότι $Y = y_j$, $j = 0, 1 \ldots$. Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου ότι $Y = y_j$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\mu_{X|Y}(y_j) = E[X|Y = y_j] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i f_{X|Y}(x_i|y_j),$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως. Όμοια ορίζουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένου ότι $X = x_i$, $i = 0, 1, \ldots$.

Περαιτέρω, αν $z = g(x,y)$ μια συνεχής συνάρτηση τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της διακριτής τ.μ. $Z = g(X,Y)$, δεδομένου ότι $Y = y_j$, δίδεται από την σχέση:

$$\mu_{Z|Y}(y_j) = E[Z \mid Y = y_j] = \sum_{i=0}^{\infty} g(x_i, y_j) f_{X|Y}(x_i \mid y_j),$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Εφόσον υπάρχει η δεσμευμένη μέση τιμή $\mu_{X|Y}(y_j)$ μπορούμε να ορίσουμε ανάλογα τη δεσμευμένη διασπορά της X δεδομένου ότι $Y = y_j$. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\sigma^2_{X|Y}(y_j) = V[X \mid Y = y_j] = E[\{X - \mu_{X|Y}(y_j)\}^2 \mid Y = y_j],$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η δεσμευμένη μέση τιμή στο δεξιό μέλος. Όμοια ορίζουμε τη δεσμευμένη διασπορά $\sigma^2_{Y|X}(x_i)$.

β) Έστω X, Y συνεχείς τ.μ. και $f_{X|Y}(x|y)$ η δεσμευμένη σ.π.π. της X δεδομένου ότι Y = y. Τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου ότι $Y = y$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\mu_{X|Y}(y)=E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx,$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως. Όμοια ορίζουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mu_{X|Y}(x)$.

Περαιτέρω, αν z = g(x, y) μια συνεχής συνάρτηση, τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. Z = g(X, Y), δεδομένου ότι Y = y, δίδεται από τη σχέση:

$$\mu_{Z|Y}(y)=E[Z|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X|Y}(x|y)dx,$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως.

Εφόσον πάλι υπάρχει η δεσμευμένη μέση τιμή $\mu_{X|Y}(y)$ μπορούμε να ορίσουμε ανόλογα τη δεσμευμένη διασπορά της X δεδομένου ότι Y = y. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\sigma^2_{X|Y}(y) = V[X \mid Y = y] = E[\{X - \mu_{X|Y}(y)\}^2 \mid Y = y],$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η μέση τιμή στο δεξιό μέλος. Όμοια ορίζουμε την $\sigma^2_{Y|X}$ (x).

Η καμπύλη με εξίσωση $y = \mu_{Y|X}(x)$ καλείται *καμπύλη παλινδρόμησης* της Y πάνω στην X.

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δεδομένου ότι Y = y είναι σύμφωνα με τα παραπάνω μια πραγματική συνάρτηση του y. Για τη διακριτή π.χ. περίπτωση η συνάρτηση αυτή ορίζεται για κάθε $Y = y_j$, j = 0,1… και αντιστοιχεί στο σημείο y_j τον πραγματικό αριθμό $\mu_{X|Y}(y_j)$. Έτσι η ποσότητα W = E[X|Y] είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει την τιμή $\mu_{X|Y}(y_j)$ όταν $Y= y_j$ με πιθανότητα $P(Y=y_j)$, j=0,1,…. Ως εκ τούτου η W= E[Z|Y] = E[g(X,Y)|Y] είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές και κατανομή που καθορίζονται από τις τιμές και την κατανομή της διακριτής τ.μ. Y. Ανάλογα συμπέρασμα προκύπτουν και στη συνεχή περίπτωση, καθώς επίσης και σ΄ ότι αφορά στη δεσμευμένη διασπορά.

Θεώρημα. Έστω X, Y τ.μ. Εάν $E[X] < \infty$, τότε

$$E[X] = E[E[X|Y]],$$

και αν $E[X^2] < \infty$, τότε

$$V[X] = E[V[X|Y]]+V[E[X|Y]].$$

Ιδιότητες:

1. $E[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2|Y] = \alpha_1 E[X_1|Y] + \alpha_2 E[X_2|Y], \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
2. Αν X = h(Y) τότε E[X|Y] = h(Y).

3. Αν X, Y ανεξάρτητες τ.μ. τότε $E[X|Y] = E[X]$.
4. Ανισότητα Cauchy – Schwarz: $\{E[XY|Z]\}^2 \leq E[X^2 |Z]E[Y^2|Z]$.