ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2025-2026

ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΘΕΜΑ ΤΟΥ $9^{ου}$ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΜΦΕ

ΟΜΑΔΑ ΠΛΕΞΟΥΔΑΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ YANG-BAXTER

Ελισάβετ Φλώκου - ge20059
Επιβλέπουσα Καθηγήτρια : Χριστίνα Βασιλακοπούλου

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **2**

2 Εισαγωγικά στοιχεία Άλγεβρας **2**
- 2.1 Σχέση Ισοδυναμίας-Κλάση Ισοδυναμίας . . . 3
- 2.2 Διμελής ή Εσωτερική Πράξη . . . 3
- 2.3 Ομάδες . . . 4
- 2.4 Ομομορφισμός ομάδων . . . 5
- 2.5 Δακτύλιοι, σώματα και άλγεβρες . . . 5

3 Εισαγωγικά στοιχεία τοπολογικών χώρων **7**

4 Ομάδα Πλεξούδας (Braid Group) **8**
- 4.1 Εισαγωγή . . . 8
- 4.2 Η αλγεβρική δομή της ομάδας πλεξούδας . . . 11
  - 4.2.1 Γεννήτορες και Θεμελιώδεις Σχέσεις . . . 11
  - 4.2.2 Αντιστοιχία $B_n \longrightarrow G$ . . . 12
  - 4.2.3 Γεωμετρικές πλεξούδες . . . 15
  - 4.2.4 Διαγράμματα πλεξούδων . . . 17
  - 4.2.5 Η σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών πλεξούδων και διαγραμμάτων πλεξούδων . . . 18
- 4.3 Κινήσεις Reidemeister στα διαγράμματα πλεξούδων . . . 20

5 Εξίσωση Yang-Baxter **22**
- 5.1 Αναπαράσταση της εξίσωσης Yang-Baxter μέσω πινάκων . . . 24
- 5.2 Σύνδεση YBE με την ομάδα πλεξούδας . . . 26
  - 5.2.1 Αναπαράσταση της ομάδας πλεξούδας μέσω Άλγεβρας . . . 26
  - 5.2.2 Η εξίσωση Yang-Baxter στην ομάδα πλεξούδας B_n . . . 28

6 Συμπεράσματα **29**

1 Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία γίνεται στα πλαίσια του μαθήματος Θέμα στο 9ο εξάμηνο της Σχολή ΕΜΦΕ του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Η εργασία σχετίζεται με τα πεδία της Άλγεβρας και της Αλγεβρικής Τοπολογίας και πιο συγκεκριμένα με την Ομάδα Πλεξούδας(Braid Group).

Κατευθυντήριο άρθρο αποτέλεσε το "Braid groups, the Yang-Baxter equation, and subfactors" του G. Lechner[1], το οποίο στρέφει τον αναγνώστη προς την εξίσωση Yang-Baxter. Με βάση τη σύνδεση που προκύπτει από το άρθρο αυτό ανάμεσα στην ομάδα πλεξούδας και την εξίσωση Yang-Baxter, γίνεται και η αντίστοιχη μελέτη στην παρούσα εργασία.

Το πρώτο σκέλος της εργασίας πραγματεύεται, συνεπώς, την ομάδα πλεξούδας. Η ομάδα πλεξούδας κατατάσσεται στην Θεωρία Ομάδων και δημιουργήθηκε από τον Emil Artin στα πλαίσια της αλγεβρικής τοπολογίας, περί το 1925. Μεγάλο κομμάτι της θεωρίας αντιστοιχεί στην κατανόηση μέσω διαγραμμάτων ή διαισθητικά, ακόμα και για τον ίδιο τον Artin. Επομένως, αφού προηγηθεί μία εισαγωγή με τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνται για την κατανόηση της εργασίας, ακολουθεί, αρχικά, μία πλήρως διαισθητική παρουσίαση της ομάδας αυτής. Στην συνέχεια, μελετάται εκτενώς η δομή της από μαθηματικής πλευράς.

Στο δεύτερο σκέλος της εργασίας εξετάζεται η εξίσωση Yang-Baxter, μία ιδιαίτερη αλγεβρική εξίσωση. Ξεκινώντας, μελετάται η εξίσωση μέσω της Γραμμικής Άλγεβρας, και στο τέλος της εργασίας δείχνεται και η σύνδεσή της με την ομάδα πλεξούδας.

2 Εισαγωγικά στοιχεία Άλγεβρας

Πριν μελετηθεί η ομάδα πλεξούδας, είναι βασικό να γίνει υπενθύμιση της δομής μιας ομάδας στην Άλγεβρα. Ακολουθούν βασικοί ορισμοί, ώστε να επιτευχθεί ο στόχος αυτός.

Οι παρακάτω ορισμοί έχουν γραφεί με βάση το βιβλίο "Εισαγωγή στην Άλγεβρα" του J.B. Fraleigh[2].

2.1 Σχέση Ισοδυναμίας-Κλάση Ισοδυναμίας

Μία σχέση $\sim \subseteq S \times S$ σε ένα σύνολο S ονομάζεται *σχέση ισοδυναμίας* όταν:

1. $x \sim x, \forall x \in S$ (αυτοπαθής ιδιότητα)

2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x, \forall x, y \in S$, (συμμετρική ιδιότητα)

3. Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε $x \sim z, \forall x, y, z \in S$ (μεταβατική ιδιότητα)

Σε ένα σύνολο $(S, \sim)$ για κάθε $x \in S$ ορίζεται το σύνολο $[x] = \{y \in S | y \sim x\}$ που ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας του x στο S.

2.2 Διμελής ή Εσωτερική Πράξη

Έστω S ένα σύνολο. Μία *διμελής ή εσωτερική πράξη* είναι μία συνάρτηση

$$* : S \times S \longrightarrow S$$

Ιδιότητες διμελών πράξεων για ένα σύνολο S εφοδιασμένο με την εσωτερική πράξη $*$, το οποίο συμβολίζεται ως $(S, *)$, είναι οι παρακάτω:

1. Προσεταιριστική ιδιότητα: για κάθε $x, y, z \in S$ ισχύει ότι $(x * y) * z = x * (y * z)$

2. Αντιμεταθετική ιδιότητα: για κάθε $x, y \in S$ ισχύει ότι $(x * y) = (y * x)$

3. Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: για κάθε $x \in S$, υπάρχει $e \in S$, τέτοιο ώστε $x * e = e * x = x$

4. Ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου: για κάθε $x \in S$, υπάρχει $x' \in S$, τέτοιο ώστε $x * x' = x' * x = e$
   Το συμμετρικό στοιχείο μπορεί να καλείται και αντίστροφο.

Όταν, λοιπόν, ένα σύνολο S είναι εφοδιασμένο με μία διμελή πράξη $*$, θα συμβολίζεται $(S, *)$.

2.3 Ομάδες

Έστω $(G, *)$ ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη που ικανοποιεί τα παρακάτω:

1. προσεταιριστική ιδιότητα,

2. ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου,

3. ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου.

Τότε, η $(G, *)$ ονομάζεται *ομάδα* (group).
Αν, επιπλέον, ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα, τότε η $(G, *)$ ονομάζεται *αβελιανή* ομάδα.

Ορισμός 2.1. Τάξη Ομάδας
Έστω $(G, *)$ μια ομάδα. Η *τάξη* μιας ομάδας είναι το πλήθος των στοιχείων της. Συμβολίζεται $|G| := n$, αν η G είναι πεπερασμένη με $n \in \mathbb{N}$ στοιχεία, αλλιώς $|G| = +\infty$.

Ορισμός 2.2. Υποομάδα
Αν ένα υποσύνολο H μιας ομάδας G είναι κλειστό ως προς τη διμελή πράξη της G και αν το H είναι και αυτό ομάδα, τότε το H λέγεται *υποομάδα* της G και συμβολίζεται $H \leq G$.

Ορισμός 2.3. Γεννήτορας Ομάδας
Έστω $(G, *)$ ομάδα και $a \in G$. Αν όλα τα στοιχεία $g \in G$ μπορούν να γραφούν στη μορφή $g = a^n, n \in \mathbb{Z}$, τότε η G καλείται *κυκλική*, το a καλείται *γεννήτορας* της ομάδας G και αυτή συμβολίζεται $G =< a >= \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

Ορισμός 2.4. Μετάθεση
Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Μία συνάρτηση $\sigma : X \longrightarrow X$, η οποία είναι "1-1" και επί, ονομάζεται *μετάθεση*. Θεωρείται σημαντικό να αναφερθεί ότι στις ομάδες μεταθέσεων ισχύει $S_n \subseteq S_k, \forall k > n$. Έστω $X \neq \emptyset$ και σ,τ δύο μεταθέσεις $\sigma : X \longrightarrow X$ και $\tau : X \longrightarrow X$. Ως *γινόμενο μεταθέσεων* ορίζεται η σύνθεσή τους, δηλαδή:

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau$$

Ορισμός 2.5. Συμμετρική Ομάδα Sn
Η *συμμετρική ομάδα* S_n ορίζεται ως το σύνολο των μεταθέσεων $\sigma : X \longrightarrow X$, όπου $|X| = n$, εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό μεταθέσεων, όπως παραπάνω.

2.4 Ομομορφισμός ομάδων

Μια απεικόνιση φ μιας ομάδας $(G, *)$ σε μια ομάδα $(K, \diamond)$ λέγεται **ομομορφισμός** αν

$$\phi(a * b) = \phi(a) \diamond \phi(b),\ \forall a, b \in G$$

Επιπλέον, η φ ονομάζεται

- **μονομορφισμός** όταν η συνάρτηση φ είναι "1-1",
- **επιμορφισμός** όταν η συνάρτηση φ είναι επί,
- **ισομορφισμός** όταν η συνάρτηση φ είναι "1-1" και επί.

Τα παραπάνω αποτελούν χρήσιμα εργαλεία για να μπορέσει να αναλυθεί η δομή της ομάδας πλεξούδας. Ομως, πρώτα, πρέπει να συζητηθούν οι ελεύθερες ομάδες.

2.5 Δακτύλιοι, σώματα και άλγεβρες

Η εξίσωση Yang-Baxter προϋποθέτει επιπλέον έννοιες που σχετίζονται με συγκεκριμένες αλγεβρικές δομές, οι οποίες θα οριστούν παρακάτω.

Οι ορισμοί γράφτηκαν με βάση το βιβλίο "Associative Albegras" του R.S. Pierce[3] και το άρθρο "An introduction to Commutative Rings" του M.K. Bengi[4]. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε το βιβλίο "Εισαγωγή στην Άλγεβρα"του J.B. Fraleigh.[2]

Ορισμός 2.6. Δακτύλιος
Ένας *δακτύλιος* $< R, +, . >$ είναι ένα σύνολο R μαζί με δύο διμελείς πράξεις $+$ και $\cdot$, τις οποίες καλούμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, ορισμένες στον R έτσι, ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

- $< R, + >$ είναι μια αβελιανή ομάδα,
- ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός.

Ένας δακτύλιος λέγεται αντιμεταθετικός (commutative) αν

$$xy = yx \text{ (αντιμεταθετικότητα).}$$

Ένας δακτύλιος λέγεται δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, αν

$$\exists 1 \in R \text{ τέτοιο ώστε } x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in R.$$

Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού λέγεται μοναδιαίο στοιχείο.

Ορισμός 2.7. Μονάδα
Ένα στοιχείο u του R λέγεται *μονάδα* του R αν έχει ένα πολλαπλασιαστικό αντίστροφο (συμμετρικό) στο R.

Ορισμός 2.8. Δακτύλιος διαίρεσης
Αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του R είναι μονάδα, τότε ο R λέγεται *δακτύλιος διαίρεσης*.

Ορισμός 2.9. Αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης
Σώμα λέγεται ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης. Συνίσταται από τις ομάδες $(R, +, 0)$ και $(R^*, \cdot, 1)$.

Ορισμός 2.10. Στρεβλό σώμα
Ένας μη αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης λέγεται *στρεβλό σώμα*.

Ορισμός 2.11. Άλγεβρα
Μία *άλγεβρα* αποτελείται από έναν διανυσματικό χώρο V πάνω από ένα σώμα F, μαζί με μια διμελή πράξη πολλαπλασιασμού στο σύνολο V των διανυσμάτων, ώστε για κάθε $a \in F$ και $\alpha, \beta, \gamma \in V$, να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. $(a\alpha)\beta = a(\alpha\beta) = \alpha(a\beta)$
2. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

Τότε, θα μιλάμε για μια άλγεβρα V πάνω από ένα σώμα F. Επίσης, η V λέγεται *προσεταιριστική άλγεβρα* πάνω από το F, αν εκτός από τις προηγούμενες συνθήκες ισχύει και ότι:

- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$.

3 Εισαγωγικά στοιχεία τοπολογικών χώρων

Θα ακολουθήσουν βασικοί ορισμοί που αφορούν τον τομέα της τοπολογίας, καθώς θεωρούνται απαραίτητοι για να οριστούν έννοιες στην ομάδα πλεξούδας.

Το υλικό της παρακάτω παραγράφου γράφτηκε με βάση το βιβλίο "Topology" του J. R. Munkres[5].

Ορισμός 3.1. Τοπολογία
Μία *τοπολογία* σε ένα σύνολο X είναι μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

2. οποιαδήποτε ένωση (πεπερασμένη ή μη) μελών της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$,

3. η τομή πεπερασμένων μελών της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Ένα σύνολο X όπου έχει οριστεί μια τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγεται *τοπολογικός χώρος*. Τα μέλη της $\mathcal{T}$ λέγονται $\mathcal{T}$-ανοιχτά. Συμβολίζεται $(X, \mathcal{T})$.

Προχωράμε στον ορισμό της ισοτοπίας.
Διαισθητικά, ο ορισμός της ισοτοπίας έχει ως εξής[6]: Αν X_1, X_2 είναι υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου Y, τότε το X_1 είναι ισοτοπικό με το X_2 αν και μόνο αν το X_1 μπορεί να "παραμορφωθεί συνεχώς" στον Y, ώστε να μοιάζει με το X_2. Ο επίσημος ορισμός ακολουθεί.

Ορισμός 3.2. Ισοτοπία
Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Λέμε ότι μία συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι *ισοτοπική* με μια άλλη συνάρτηση $g : X \longrightarrow Y$ και συμβολίζουμε $f \approx g$ αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \longrightarrow Y$ τέτοια ώστε:

1. $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x)$,

2. $\forall x \in X, H(x, 1) = g(x)$,

3. $\forall t \in I, H(\cdot, t)$ δίνει μια αντιστοιχία από τον X στον Y.

Η H αποτελεί *ισοτοπία* από την f στην g.

Σε αυτό το σημείο, έχει γίνει η απαραίτητη εισαγωγή στη θεωρία ομάδων, ώστε να μπορεί να παρουσιαστεί η ομάδα πλεξούδας, αρχικά διαισθητικά. Η πιο σχολαστική ανάλυσή της θα χρησιμοποιήσει και έννοιες από τους τοπολογικούς χώρους. Οι άλγεβρες και τα σώματα θα είναι χρήσιμα στην μελέτη της εξίσωσης Yang-Baxter.

4 Ομάδα Πλεξούδας (Braid Group)

4.1 Εισαγωγή

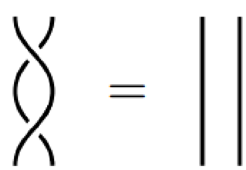
Σε αυτό το κομμάτι της παρούσας εργασίας θα επιγκεντρωθούμε σε μια πιο διαισθητική κατανόηση της ομάδας η οποία μελετάται. Ακόμα και ο Artin βασιζόταν σε μια τέτοιου είδους μελέτης της ομάδας, παραλείποντας τους αυστηρούς ορισμούς και τις αποδείξεις. Αυτή η μέθοδος κρίνεται ως πιο κατάλληλη για μια πρώτη εισαγωγή στην ομάδα πλεξούδας.

Η παρουσίαση αυτή έχει βασιστεί στο άρθρο "Braid groups, the Yang-Baxter equation, and subfactors" του G. Lechner[1] και στο άρθρο "Braid Groups and Artin Groups" του L. Paris[7]. Επιπλέον, για την πιο διαισθητική κατανόηση, χρησιμοποιήθηκε και το άρθρο "Theory of Braids"του ίδιου του E. Artin[8].

Για να επιτευχθεί η εισαγωγή στην ομάδα πλεξούδας, μπορεί αρχικά ο αναγνώστης να στραφεί, πράγματι, σε απλές πλεξούδες από την καθημερινότητα.

Σε όλα τα διαγράμματα που θα ακολουθήσουν, κατά την διασταύρωση των νημάτων, όταν το νήμα "διακόπτεται"πριν τη διασταύρωση, σημαίνει ότι περνάει κάτω από το άλλο.

Μία πλεξούδα αποτελεί, στην πραγματικότητα, ένα σύνολο γραμμών (νημάτων), οι οποίες διασταυρώνουν η μία την άλλη. Παρατηρείται ότι η κάθε γραμμή έχει σταθερό σημείο εκκίνησης. Είναι, επίσης, σημαντικό να δωθεί προσοχή και στο σημείο τερματισμού ενός νήματος μιας πλεξούδας, καθώς έτσι μπορεί να οριστεί η έννοια της ισότητας (και αργότερα της ισοτοπίας) ανάμεσα στις πλεξούδες. Παραδείγματος χάριν, στο παρακάτω σχήμα, οι πλεξούδες είναι ίσες, αν και στην μία υπάρχει διασταύρωση των νημάτων, ενώ στην άλλη όχι. Παρατηρείται ότι "ξεμπλέκοντας"τα νήματα της πρώτης πλεξούδας, προκύπτει η δεύτερη, και αντίστροφα, χωρίς να κλονιστούν τα άκρα τους.



Ίσες πλεξούδες

Ομοίως, και τα παρακάτω ζεύγη από πλεξούδες είναι ίσα:

Ίσες πλεξούδες

Στα δύο αυτά παραδείγματα, οι πλεξούδες δεν μπορούν να "ξεμπλεχτούν", αλλά, η ισότητα ορίζεται, αφού, "τραβώντας"τα νήματά τους προκύπτει πάντα η ίδια "ανηγμένη"πλεξούδα, η οποία δεν μπορεί να "ξεμπλεχτεί"περισσότερο. Εξαιρετικά σημαντικό είναι να παρατηρηθεί ότι, σε όλα τα παραδείγματα τα άκρα των νημάτων παραμένουν σταθερά.

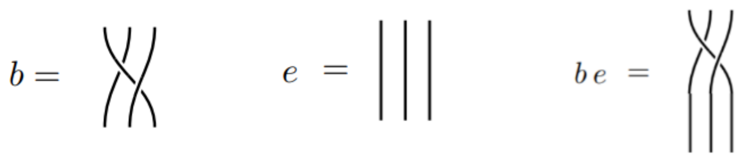
Επίσης, όλες οι ίσες πλεξούδες ανήκουν στην πραγματικότητα στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, εφόσον όπως προκύπτει από τον παραπάνω ορισμό της ισοτοπίας, δύο ίσες πλεξούδες είναι ισότοπες.

Αφού ορίστηκε η ισότητα ανάμεσα σε πλεξούδες, μπορεί σε αυτό το σημείο να εισαχθεί και η έννοια του συνδυασμού δύο (ή περισσότερων) πλεξούδων. Ο συνδυασμός, θα οριστεί αργότερα ως επίσημη πράξη στην αλγεβρική δομή της ομάδας πλεξούδας, αλλά είναι απαραίτητος για να μπορέσει να γίνει κατανοητό το γιατί η ομάδα πλεξούδας αποτελεί πράγματι ομάδα, επομένως θα θεωρηθεί διμελής πράξη, για την οποία ισχύει η κλειστότητα και η προσεταιριστική ιδιότητα. Όταν δύο πλεξούδες "συνδυάζονται", η μία τοποθετείται πάνω από την άλλη, ώστε να δημιουργηθεί μία τρίτη πλεξούδα, όπως φαίνεται παρακάτω:

Συνδυασμός πλεξούδων

Παρατηρείται ότι μόνος περιορισμός για τον συνδυασμό δύο πλεξούδων είναι να αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό νημάτων. Ακόμα, πολύ σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο συνδυασμός δεν είναι εξ΄ ορισμού αντιμεταθετικός.

Για να αρχίσει να γίνεται η μεταφορά στη θεωρία ομάδων, το σύνολο από n νήματα χωρίς καμία διασταύρωση θεωρείται το ουδέτερο στοιχείο, καθώς αν συνδυαστεί κάποια ήδη υπάρχουσα πλεξούδα με την ουδέτερη, δίνεται και πάλι η ίδια αρχική πλεξούδα:



Συνδυασμός πλεξούδας με το ουδέτερο

Επιπλέον, έχει ιδιαίτερη σημασία ο τρόπος με τον οποίο διασταυρώνονται τα νήματα, δηλαδή ποιο νήμα περνάει πάνω και ποιο κάτω σε μια διασταύρωση. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να οριστεί η έννοια της αντίστροφης πλεξούδας, δηλαδή του αντίστροφου στοιχείου.

Το ουδέτερο στοιχείο όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι η πράξη κάποιου στοιχείου της ομάδας με το συμμετρικό του. Επομένως, προκύπτει το ερώτημα του αντίστροφου στοιχείου στην ομάδα που μελετάται. Δηλαδή, για κάθε πλεξούδα πρέπει να υπάρχει μία μοναδική πλεξούδα, με την οποία όταν συνδυάζεται να δίνει την ουδέτερη, όπως φαίνεται παρακάτω:

Συμμετρικό στοιχείο

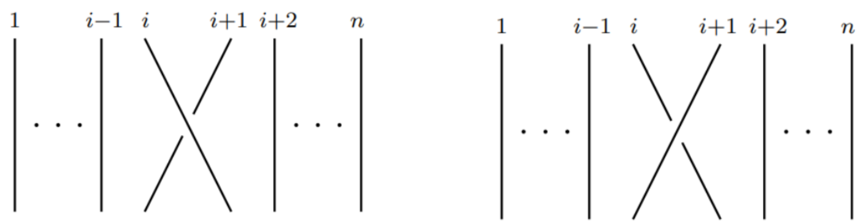
Από όλα τα παραπάνω, είναι πλέον προφανές, ότι η ομάδα πλεξούδας αποτελεί πράγματι μια ομάδα στην Άλγεβρα, καθώς ισχύουν όλες οι ιδιότητες όπως ορίστηκαν.

Εφόσον έχει δειχθεί διαισθητικά και με τη χρήση διαγραμμάτων ότι η ομάδα πλεξούδων αποτελεί πράγματι ομάδα, μπορεί πλέον να αναλυθεί σε μεγαλύτερο βάθος η αλγεβρική δομή της.

4.2 Η αλγεβρική δομή της ομάδας πλεξούδας

Η Θεωρία των Πλεξούδων αναπτύχθηκε από τον Artin περί το 1925, ως κλάδος της αλγεβρικής τοπολογίας. Η ομάδα πλεξούδας Artin B_n είναι μια ομάδα της οποίας τα στοιχεία είναι οι ισότοπες πλεξούδες $n-$νημάτων.

Ως σ_i θεωρείται η διαστάυρωση του i-οστού νήματος από την θέση i στην θέση $i+1$, περνώντας **πάνω** από το νήμα $i+1$. Και πάλι αναφερόμενοι στο νήμα i, αν περνάει **κάτω** από το νήμα $i+1$, από την θέση i στην $i+1$ τότε η μετάθεση αυτή συμβολίζεται με σ_i^{-1}, όπως φαίνεται παρακάτω:



Οι μεταθέσεις σ_i και σ_i^{-1} αντίστοιχα

Το υλικό της παραγράφου αυτής έχει βασιστεί, ως επί το πλείστον, στο βιβλίο "Braid Groups"των C. Kassel, V. Turaev[9]. Επίσης, μελετήθηκαν τα άρθρα "Introduction to Braid Groups" και "The Algebraical Braid Group" των J. Lieber[10] και F. Bohnenblust[11] αντίστοιχα.

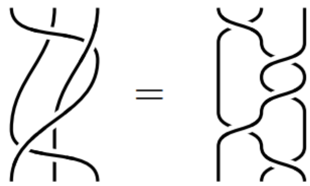
4.2.1 Γεννήτορες και Θεμελιώδεις Σχέσεις

Η ομάδα πλεξούδας B_n του Artin ορίζεται από $n-1$ γεννήτορες, $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ και τις θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ τους:

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \forall i, j = 1, 2, ..., n-1 \text{ με } |i-j| \geq 2$$
$$\text{και}$$
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \forall i = 1, 2, ..., n-2$$

Η ορισμένη πράξη στην ομάδα πλεξούδας είναι το γινόμενο ή η σύνθεση μεταθέσεων, όπως έχει οριστεί.

Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα που δείχνει μια πλεξούδα και τους γεννήτορες από τους οποίους δημιουργήθηκε:

 $= \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2.$

Πλεξούδα και οι γεννήτορές της

Εξ' ορισμού, η ομάδα $B_1 = \{1\}$ είναι η τετριμμένη. Δεν μπορεί να δημιουργηθεί πλεξούδα με ένα μόνο νήμα, είναι όμως βασικό να αναφερθεί, διότι, μπορεί να σχηματίσει κόμβο[1]. Η ομάδα B_2 δημιουργείται από έναν μονάχα γεννήτορα, τον σ_1, επομένως, οι παραπάνω σχέσεις δεν υφίστανται όταν μιλάμε για ομάδα πλεξούδας με μόνο δύο νήματα. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η B_2 είναι αβελιανή, ενώ οποιαδήποτε $B_n, n \geq 3$ δεν είναι. Ξεκινώντας από την B_3 διαπιστώνεται εύκολα ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα[2], άρα για κανένα $n > 3$ επίσης δεν μπορεί να ισχύει, αφού η B_3 θα αποτελεί πάντα υποσύνολό της.

4.2.2 Αντιστοιχία $B_n \longrightarrow G$

Έστω ομομορφισμός ομάδων $f : B_n \longrightarrow G$ όπου G τυχαία ομάδα, τότε οι εικόνες των γεννητόρων της B_n, $\sigma_i \mapsto s_i, s_i \in G$ ικανοποιούν τις θεμελιώδεις σχέσεις της ομάδας πλεξούδας:

$$s_i s_j = s_j s_i, \forall i, j = 1, 2, ..., n-1 \text{ με } |i-j| \geq 2,$$
$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \forall i = 1, 2, ..., n-2$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός αποδεικνύεται άμεσα από τον ορισμό του ομομορφισμού και τις παραπάνω θεμελιώδεις σχέσεις της ομάδας πλεξούδας:

- $s_i s_j = f(\sigma_i) f(\sigma_j) = f(\sigma_i \sigma_j) = f(\sigma_j \sigma_i) = f(\sigma_j) f(\sigma_i) = s_j s_i$
- $s_i s_{i+1} s_i = f(\sigma_i) f(\sigma_{i+1}) f(\sigma_i) = f(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) = f(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) = f(\sigma_{i+1}) f(\sigma_i) f(\sigma_{i+1}) = s_{i+1} s_i s_{i+1}$

[1] Η Θεωρία Κόμβων, όπως και η Θεωρία Πλεξούδων, αποτελεί κλάδο της Τοπολογίας. Ένας κόμβος ορίζεται διαισθητικά από τον Adams στο βιβλίο του "The Knot Book"[12] ως ένα νήμα στο οποίο έχουμε κάνει έναν κόμπο και έχουμε κολλήσει τα δύο του άκρα, ώστε να έχουμε έναν κλειστό κύκλο.

[2] Βλ. Κεφ. 4.1

Λήμμα: Ισχύει και το αντίστροφο. Αν $s_1, ...s_{n-1}$ είναι στοιχεία μιας ομάδας G που ικανοποιεί τις θεμελιώδεις σχέσεις της ομάδας πλεξούδας, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : B_n \longrightarrow G$ για τον οποίο ισχύει $s_i = f(\sigma_i), \forall i = 1, 2, ..., n-1$.

Το παραπάνω Λήμμα μπορεί να εφαρμοστεί για $G = S_n$. Ένα στοιχείο της συμμετρικής ομάδας ορίστηκε ως μια μετάθεση στο σύνολο $\{1, 2, ..., n\}$. Ορίζονται, τώρα, ως στοιχειώδεις αντιμεταθέσεις $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_{n-1} \in S_n$, με ζ_i την μετάθεση από το i στο i+1 και αφήνει όλα τα άλλα στοιχεία σταθερά. Εξ' ορισμού, οι στοιχειώδεις αντιμεταθέσεις ικανοποιούν τις θεμελιώδεις σχέσεις της ομάδας πλεξούδας. Ακολουθεί σύντομη απόδειξη.
Για μια στοιχειώδη αντιμετάθεση $\zeta : S_n \longrightarrow S_n$ ισχύει ότι $i \mapsto i+1$, δηλαδή:

$$\zeta_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i & i+1 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & i+1 & i & ... & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i+1 \end{pmatrix}$$

Επομένως,

$$\begin{gathered} \zeta_i \zeta_j(j) = \zeta_i(j+1) = j+1 \\ \zeta_j \zeta_i(j) = \zeta_j(j) = j+1 \end{gathered}$$

και

$$\begin{gathered} \zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i(i) = \zeta_i(\zeta_{i+1}(i+1)) = \zeta_i(i+2) = i+2 \\ \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}(i) = \zeta_{i+1}(\zeta_i(i)) = \zeta_{i+1}(i+1) = i+2 \end{gathered}$$

Με βάση τα παραπάνω, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\pi : B_n \longrightarrow S_n$ τέτοιος ώστε $\zeta_i = \pi(\sigma_i), \forall i = 1, 2, ..., n-1$. Επίσης, ο ομομορφισμός αυτός είναι επί, αφού $\forall \zeta_i \in S_n, \exists \sigma_i$ τέτοιο ώστε $\zeta_i = f(\sigma_i)$. Δεδομένου ότι η αντιστοιχία αυτή είναι επί, οι στοιχειώδεις αντιμεταθέσεις παράγουν την S_n.

Εδώ μπορεί να εισαχθεί και η έννοια της *εικονικής πλεξούδας* (virtual braid), που βασίζεται στον επιμορφισμό της ομάδας πλεξούδας στην συμμετρική ομάδα. Το περιεχόμενο γράφτηκε με βάση το άρθρο "Categorification of the virtual braid goups" της Anne-Laure Thiel[13].

Ορισμός 4.1. Εικονική ομάδα πλεξούδας
Η *εικονική ομάδα πλεξούδας* $\mathcal{VB}_n$ είναι μία ομάδα που δημιουργείται από $2(n-1)$ γεννήτορες $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ και $\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}$ που ικανοποιούν τις ήδη γνωστές θεμελιώδεις σχέσεις της ομάδας πλεξούδας:

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, $|i-j| > 1$
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, $\forall i = 1, 2, ..., n-2$

αλλά και επιπλέον, τις σχέσεις της ομάδας μεταθέσεων:

3. $\zeta_i \zeta_j = \zeta_j \zeta_i$, $|i-j| > 1$
4. $\zeta_i \zeta_{i+1} \zeta_i = \zeta_{i+1} \zeta_i \zeta_{i+1}$, $\forall i = 1, 2, ..., n-2$
5. $\zeta_i^2 = 1$, $\forall i = 1, 2, ..., n-1$

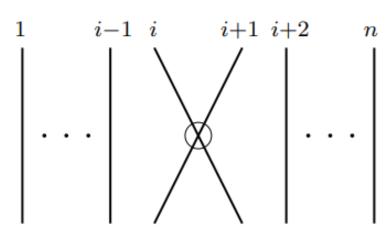
και τις πεπλεγμένες σχέσεις:

6. $\sigma_i \zeta_j = \zeta_j \sigma_i$, $|i-j| > 1$
7. $\sigma_i \zeta_{i+1} \zeta_i = \zeta_{i+1} \zeta_i \sigma_{i+1}$, $\forall i = 1, 2, ..., n-2$

Έτσι, παρατηρείται ότι η κλασσική ομάδα πλεξούδας B_n του Artin εμφυτεύεται με φυσικό τρόπο στην εικονική ομάδα πλεξούδας $\mathcal{VB}_n$ ως υποομάδα της με γεννήτορες $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$, όπως έχει δειχθεί παραπάνω.

Μπορούμε να δούμε την ομάδα $\mathcal{VB}_n$ μέσω διαγραμμάτων.
Στην ομάδα B_n έχουν ήδη ορισθεί οι μεταθέσεις σ_i και σ_i^{-1} και έχουν δειχθεί τα διαγράμματά τους.

Παρακάτω φαίνεται και η μετάθεση ζ_i. Σημαντική παρατήρηση είναι ότι, σε αντίθεση με τους γεννήτορες σ_i της ομάδας πλεξούδας B_n, στους γεννήτορες ζ_i, δεν έχει σημασία ποιο νήμα είναι πάνω και πιο κάτω κατά την διασταύρωσή τους:



Η μετάθεση ζ_i

Η εικονική ομάδα πλεξούδας θα αναφερθεί και πάλι, κατά την παρουσίαση των κινήσεων Reidemeister.

4.2.3 Γεωμετρικές πλεξούδες

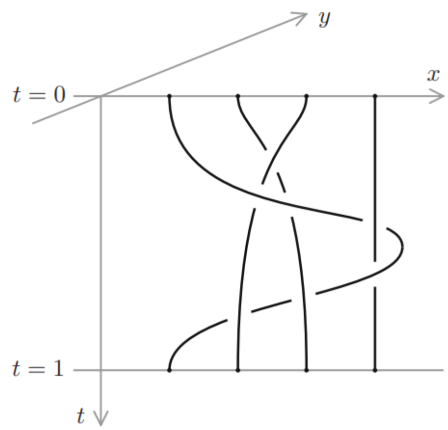
Οι πλεξούδες, όπως δείχθηκε παραπάνω, μπορούν να αναπαρασταθούν διαισθητικά στον χώρο, μπορούν όμως πράγματι να οριστούν και αποκλειστικά με μαθηματικά εργαλεία, ως υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$. Έτσι, προχωράμε στη μελέτη των *γεωμετρικών πλεξούδων*.

Για όλα τα παρακάτω, θεωρείται ως I το κλειστό διάστημα $[0,1]$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Επίσης, ως τοπολογικό διάστημα (topological interval) εννοείται οποιοδήποτε ισομορφικό διάστημα με το παραπάνω.

Μία *γεωμετρική πλεξούδα* με n νήματα είναι ένα υποσύνολο $\beta \subset \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ τέτοιο ώστε το β αποτελείται από n ξένα μεταξύ τους τοπολογικά διαστήματα (δηλαδή τα νήματα), έτσι ώστε κάθε αντιστοιχία $\mathbb{R}^2 \times I \longrightarrow I$ αντιστοιχίζει κάθε νήμα ομοιομορφικά στο I και ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

1. $\beta \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1,0,0),(2,0,0),...,(n,0,0)\}$
2. $\beta \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1,0,1),(2,0,1),...,(n,0,1)\}$
3. Το σύνολο $\beta \cap (\mathbb{R}^2 \times \{t\})$ αποτελείται από n σημεία $\forall t \in [0,1]$
4. Για οποιοδήποτε νήμα στο β, υπάρχει μια αντιστοιχία $proj_i : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ που αντιστοιχίζει το νήμα αυτό ομοιομορφικά στο τοπολογικό διάστημα

Έτσι, καταλαβαίνουμε ότι στον χώρο, ουσιαστικά, κάθε νήμα μίας πλεξούδας β ξεκινάει από ένα σημείο $(i,0,0)$ και αντιστοιχίζεται σε κάποιο σημείο $(s(i),0,0)$, όπου $i, s(i) \in \{1,2,...,n\}$. Η ακολουθία $(s(1),s(2),...,s(n))$ είναι μία μετάθεση του συνόλου $\{1,2,...n\}$ και λέγεται υποκείμενη (underlying) μετάθεση της β.



Διάγραμμα γεωμετρικής πλεξούδας τεσσάρων νημάτων

Ορισμός 4.2. Ισοτοπικές γεωμετρικές πλεξούδες

Δύο πλεξούδες θεωρούνται *ισοτοπικές*, αν η μία μπορεί να μεταμορφωθεί στην άλλη, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ενδιάμεσο βήμα σε αυτή την παραμόρφωση, να δίνει με την σειρά του μία γεωμετρική πλεξούδα (δηλαδή μια πλεξούδα που να πληρούνται οι παραπάνω υποθέσεις).

Πιο επίσημα, δύο πλεξούδες b, b' είναι ισοτοπικές, αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $F : b \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$, τέτοια ώστε για κάθε $s \in I$, η απεικόνιση $F_s : b \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ που αντιστοιχίζει το $x \in b$ στο $F(x, s)$ είναι μία εμφύτευση, της οποίας η εικόνα είναι μία γεωμετρική πλεξούδα με n νήματα, $F_0 = id_b : b \longrightarrow b$ και $F_1(b) = b'$.

Ορισμός 4.3. Γινόμενο γεωμετρικών πλεξούδων

Έστω δύο γεωμετρικές πλεξούδες $b_1, b_2 \in B_n$ με $b_1, b_2 \subset \mathbb{R}^2 \times I$. Τότε, *γινόμενό* τους καλείται το $b_1 b_2$ που είναι το σύνολο των σημείων $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I$, ώστε $(x, y, 2t) \in b_1$, για $0 \leq t \leq 1/2$ και $(x, y, 2t - 1) \in b_2$, για $1/2 \leq t \leq 1$. Το γινόμενο $b_1 b_2$ είναι και αυτό με τη σειρά του γεωμετρική πλεξούδα με n νήματα.

Αν οι b_1, b_2 είναι ισοτοπικές με τις γεωμετρικές πλεξούδες b'_1, b'_2 αντίστοιχα, τότε και η $b_1 b_2$ είναι ισοτοπική με την $b'_1 b'_2$.

Το γινόμενό τους, όπως και η σύνθεση μεταθέσεων, είναι προσεταιριστικό.

Παίρνοντας τον παραπάνω ορισμό, η αντιστοίχιση $(b_1, b_2) \mapsto b_1 b_2$ ορίζει έναν πολλαπλασιασμό στις πλεξούδες n νημάτων. Ο πολλαπλασιασμός αυτός, όπως ειπώθηκε είναι προσεταιριστικός και έχει ουδέτερο στοιχείο, που είναι η τετριμμένη πλεξούδα 1_n που αντιπροσωπεύεται από την γεωμετρική πλεξούδα

$$\{1, 2, ..., n\} \times \{0\} \times I \subset \mathbb{R}^2 \times I$$

Έτσι, επιβεβαιώνεται η ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου.

4.2.4 Διαγράμματα πλεξούδων

Τα διαγράμματα πλεξούδων είναι η αναπαράσταση των γεωμετρικών πλεξούδων που ορίστηκαν παραπάνω, δηλαδή η απεικόνιση των μεταθέσεων-γεννητόρων που δημιουργούν τις πλεξούδες στον χώρο.

Ορισμός 4.4. Ένα *διάγραμμα πλεξούδας* (braid diagram) με n νήματα είναι ένα σύνολο $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times I$ που αποτελεί ένωση n τοπολογικών διαστημάτων, τα οποία λέγονται νήματα του $\mathcal{D}$, έτσι ώστε να ισχύουν οι τρεις παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Η απεικόνιση $\mathbb{R} \times I \longrightarrow I$ αντιστοιχίζει καθε νήμα ομοιομορφικά στο I.
2. Κάθε σημείο του συνόλου $\{1, 2, ..., n\} \times \{0, 1\}$ είναι τα σημεία εκκίνησης και τερματισμού του κάθε νήματος.
3. Κάθε σημείο του συνόλου $\mathbb{R} \times I$ ανήκει το πολύ σε δύο νήματα. Σε διασταύρωση δύο νημάτων, τα οποία διασταυρώνονται εγκαρσίως, ένα από τα νήματα περνάει κάτω (undergoing strand) και το άλλο πάνω (overgoing strand).

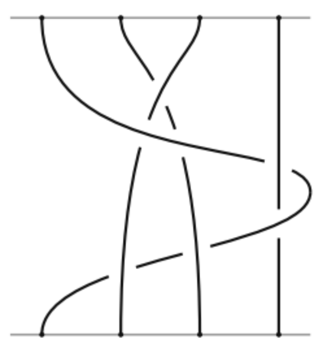
Παρατηρήσεις:

1. Τρία ή παραπανω νήματα ενός διαγράμματος πλεξούδας $\mathcal{D}$ δεν συναντώνται ποτέ σε ένα σημείο.
   (Ένα σημείο συννάντησης ή διασταύρωσης δύο νημάτων ονομάζεται double point ή crossing point.)
2. Η παραπάνω προϋπόθεση της εγκάρσιας διασταύρωσης συνεπάγεται ότι σε μια γειτονιά της διασταύρωσης, η $\mathcal{D}$ είναι ομοιόμορφη με το σύνολο $\{(x, y)|xy = 0\}$ στον $\mathbb{R}^2$.

3. Η τρίτη υπόθεση από πάνω, σε συνδυασμό με την συμπάγεια των νημάτων[3], συνεπάγεται ότι ο αριθμός των διασταυρώσεων σε μία $\mathcal{D}$ είναι πεπερασμένος.

4.2.5 Η σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών πλεξούδων και διαγραμμάτων πλεξούδων

Έστω ότι ένα διάγραμμα πλεξούδας $\mathcal{D}$ βρίσκεται στο $\mathbb{R}\times\{0\}\times I \subset \mathbb{R}^2\times I$. Σε μια γειτονιά γύρω από κάθε διασταύρωση του $\mathcal{D}$ θεωρούμε ότι "σπρώχνουμε" το κάτω νήμα στο $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times I$ και αυξάνοντας την δεύτερη συντεταγμένη, καθώς η πρώτη και η τρίτη μένουν σταθερές, η $\mathcal{D}$ μετατρέπεται σε γεωμετρική πλεξούδα με n νήματα. Η πλεξούδα αυτή συμβολίζεται με $\beta(\mathcal{D})$.



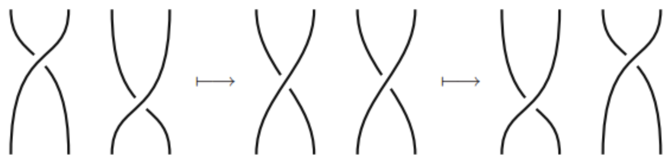
Διάγραμμα πλεξούδας με τέσσερα νήματα

Για παράδειγμα, το παραπάνω διάγραμμα είναι το διάγραμμα της γεωμετρικής πλεξούδας $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-2}\sigma_2\sigma_1$.

Συνεπώς, είναι προφανές, ότι κάθε γεωμετρική πλεξούδα β μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ενός διαγράμματος πλεξούδας $\mathcal{D}$ στον χώρο.

Ορισμός 4.5. Ισοτοπίες στα διαγράμματα πλεξούδων
Δύο πλεξούδες $\mathcal{D}, \mathcal{D}', n$ νημάτων λέγονται ισοτοπικές αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $F : \mathcal{D} \times I \longrightarrow \mathbb{R} \times I$, τέτοια ώστε $\forall s \in I$, το σύνολο $\mathcal{D}_s = F(\mathcal{D} \times s) \subset \mathbb{R} \times I$ είναι ένα διάγραμμα πλεξούδας n νημάτων, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}, \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'$. Είναι προφανές ότι αν η $\mathcal{D}$ είναι ισοτοπική με την $\mathcal{D}'$, τότε, $\beta(\mathcal{D}) = \beta(\mathcal{D}')$.

[3]Η συμπάγεια επάγεται από το γεγονός ότι αποτελούν κλειστά και φραγμένα σύνολα στον $\mathbb{R}^2 \times I$



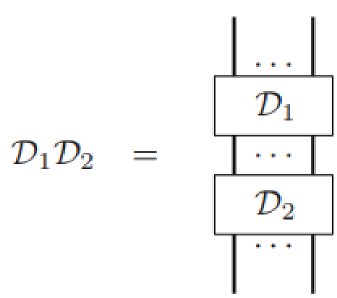
Ισότοπες ή ισοτοπικές πλεξούδες

Όταν γίνεται αναφορά σε διάγραμμα από γινόμενο πλεξούδων, δεν χρησιμοποιούνται πλέον οι γνωστοί άξονες του χώρου, αλλά αρχίζουν και συμβολίζονται με πιο αφηρημένα διαγράμματα.

Τα διαγράμματα αυτά συνδέονται άμεσα με την εξίσωση Yang-Baxter που θα μελετηθεί στο επόμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Στα διαγράμματα αυτά, η πλεξούδα παίρνει πλέον τη μορφή τανυστή και είναι ευκολότερο να αναπαρίσταται όπως παρακάτω.

Βέβαια, η αναπαράσταση αυτή δεν περιορίζεται αποκλειστικά σε γινόμενα πλεξούδων στον χώρο, αλλά ειδικά για τα γινόμενα αποτελεί διευκόλυνση.

Το γινόμενο ή συνδυασμός δύο πλεξούδων έχει ήδη οριστεί παραπάνω διαισθητικά ως η τοποθέτηση της μίας πλεξούδας πάνω από την άλλη, και αλγεβρικά ως σύνθεση (πολλαπλασιασμό) των γεννητόρων τους. Στα διαγράμματα φαίνεται ακριβώς αυτό. Έστω $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ με n νήματα. Το γινόμενό τους είναι το διάγραμμα που επάγεται τοποθετώντας την $\mathcal{D}_1$ πάνω από την $\mathcal{D}_2$ και περιορίζοντας το επαγώμενο διάγραμμα στο $\mathbb{R} \times I$.



Διάγραμμα γινομένου πλεξούδων

Επίσης, εύκολα προκύπτει ότι αν το $\mathcal{D}_1$ εκπροσωπεί την β_1 και το $\mathcal{D}_2$ εκπροσωπεί την β_2, τότε το $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ εκπροσωπεί το γινόμενο $\beta_1\beta_2$.

4.3 Κινήσεις Reidemeister στα διαγράμματα πλεξο-ύδων

Στη Θεωρία Κόμβων οι κινήσεις Reidemeister (Reidemeister Moves) αντιστοιχούν σε τρεις κινήσεις που μπορούν να εφαρμοστούν στα νήματα ενός κόμβου. Δημιουργήθηκαν από τον Kurt Reidemeister περί το 1927 και αποτελούν χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη των κόμβων, καθώς επιτρέπουν να μελετηθούν μέσω διαγραμμάτων.

Οι κινήσεις Reidemeister έχουν εφαρμογή και στις πλεξούδες και, πιο συγκεκριμένα, χρησιμεύουν στην περαιτέρω μελέτη της ισοτοπίας ανάμεσά τους. Για την παρούσα εργασία εξετάστηκαν τα άρθρα "A gentle introduction to Knots, Links and Braids"[14], "Knots, Reidemeister Moves and Knot Invariants" της T. Alsatra[15] και το άρθρο "Categorification of the Virtual Braid Groups" της A. Thiel[13].

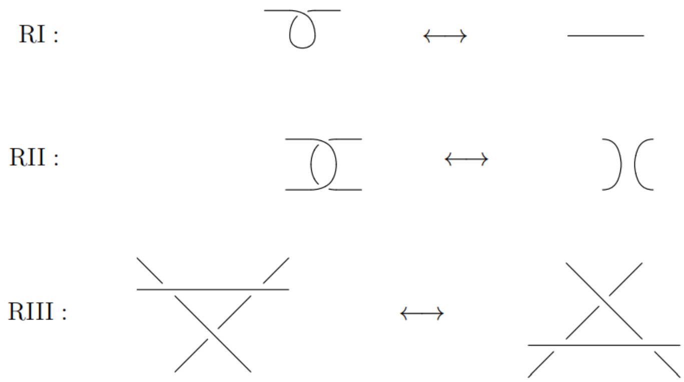
Αρχικά, οι κινήσεις Reidemeister στην ομάδα πλεξούδας ορίζονται ως τρεις τοπικές μετακινήσεις νημάτων σε μια πλεξούδα.

Μία κίνηση Reidemeister Τύπου I (RI) αντιστοιχεί στο "μπλέξιμο" ή "ξεμπλέξιμο" ενός νήματος μιας πλεξούδας. Η κίνηση αυτή δεν έχει εφαρμογή όταν γίνεται αναφορά αποκλειστικά σε ομάδα πλεξούδας, διότι η εφαρμογή της σε ένα νήμα δημιουργεί κόμβο. Όμως, είναι χρήσιμη στη γενικότερη μελέτη της Αλγεβρικής Τοπολογίας, όπου συνδυάζονται κόμβοι και πλεξούδες.

Μία κίνηση Reidemeister Τύπου II (RII) αντιστοιχεί στην πρόσθεση (ή αφαίρεση) ενός νήματος πάνω ή κάτω από ένα άλλο, για να δημιουργηθούν δύο διασταυρώσεις ανάμεσα στα δύο αυτά νήματα. Η RII είναι η κίνηση η οποία μετατρέπει μία στοιχειώδη πλεξούδα στην αντίστροφή της.

Τέλος, μία κίνηση Reidemeister Τύπου III (RIII) αντιστοιχεί αρχικά, στην θεμελιώδη εξίσωση της ομάδας πλεξούδας $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ που ισχύει εξ′ ορισμού στην ομάδα πλεξούδας του Artin. Ή αλλιώς, μπορεί να ειπωθεί ότι τοποθετείται ένα νήμα πάνω ή κάτω από μία ήδη υπάρχουσα διασταύρωση νημάτων.

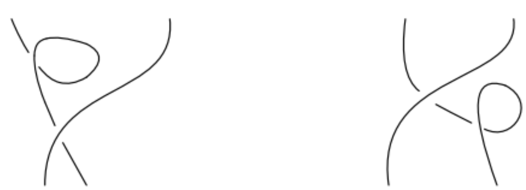
Οι κινήσεις Reidemeister φαίνονται και στο παρακάτω διάγραμμα, ώστε να γίνουν πιο εύκολα κατανοητές:



Κινήσεις Reidemeister

Οι κινήσεις αυτές επηρεάζουν το διάγραμμα μόνο εντός ενός δίσκου μέσα στο $\mathbb{R} \times I$ και αφήνουν το υπόλοιπο διάγραμμα αμετάβλητο. Οι κινήσεις Reidemeister στο διάγραμμα μιας πλεξούδας διατηρούν την ισοτοπικότητα στην πλεξούδα αυτή.

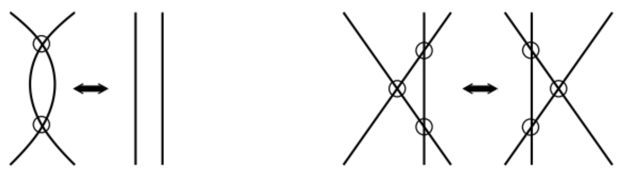
Η ισοτοπικότητα διατηρείται με την εφαρμογή της RIII



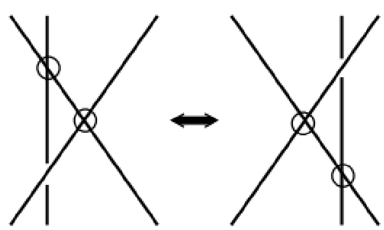
Η ισοτοπικότητα διατηρείται με την εφαρμογή της RI

Δύο διαγράμματα $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ λέγονται ίσα κατά R (R-equivalent) , αν το $\mathcal{D}$ μπορεί να μεταμορφωθεί στο $\mathcal{D}'$ μέσα από πεπερασμένες κινήσεις Reidemeister.

Κινήσεις Reidemeister στην εικονική ομάδα πλεξούδας
Κατά την αντιστοιχία της ομάδας πλεξούδας στην συμμετρική Ομάδα, εισήχθη η έννοια της εικονικής ομάδας πλεξούδας $\mathcal{VB}_n$. Παρακάτω βλέπουμε πώς εφαρμόζονται οι κινήσεις Reidemeister στην ομάδα αυτή, μονάχα με τους γεννήτορες ζ_i, αλλά και με τους πεπλεγμένους γεννήτορες σ_i, ζ_i:



Κινήσεις Reidemeister με μεταθέσεις ζ_i



Κίνηση RIII σε πεπλεγμένους γεννήτορες

Προχωράμε στο τελευταίο σκέλος της εργασίας, δηλαδή στην παρουσίαση της εξίσωσης Yang-Baxter.

5 Εξίσωση Yang-Baxter

Η εξίσωση Yang-Baxter είναι μια αλγεβρική εξίσωση που έχει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο σε πολλά διαφορετικά πεδία, όπως στατιστική μηχανική, κβαντομηχανική, ομάδες πλεξούδας, θεωρία κόμβων και άλγεβρες Von Neumann[4][16] , αλλά και σε πολλά ακόμα.

Τα παρακάτω έχουν καταγραφεί με βάση το άρθρο "Yang-Baxter representations of the infinite symmetric group" των G. Lechner, U. Pennig, S. Wood[17] και το "Examination of the Yang-Baxter equation" του A. Cibotarica[18].

Η πρώτη φορά που δημοσιεύθηκε η εξίσωση ήταν από τον Yang το 1967 σε δύο άρθρα του για προβλήματα κβαντομηχανικής, όπου εμφανίσθηκε με την μορφή:

$$A(u)B(u+v)A(v) = B(u)A(u+v)B(v)$$

όπου $A(u), B(v)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις.

Η ίδια εξίσωση χρησιμοποιήθηκε και από τον Baxter το 1972, καθώς μελετούσε προβλήματα στατιστικής μηχανικής. Ο όρος "εξίσωση Yang-Baxter" χρησιμοποιήθηκε στο τέλος της δεκαετίας του 1970 από τον Faddeev.

Για να μπορέσει να μελετηθεί η εξίσωση Yang-Baxter είναι αναγκαίο να οριστούν πρώτα απαραίτητες αλγεβρικές έννοιες.

Ορισμός 5.1. Τανυστικό γινόμενο
Έστω δύο διανύσματα $u, v \in \mathbb{R}^3$, τότε το *τανυστικό γινόμενο* ορίζεται ως:

$$v \otimes w = \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & v_1w_3 \\ v_2w_1 & v_2w_2 & v_2w_3 \\ v_3w_1 & v_3w_2 & v_3w_3 \end{pmatrix}$$

Ομοίως, ορίζεται και το τανυστικό γινόμενο δύο πινάκων $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, γνωστό και ως γινόμενο Kronecker:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & A_{13}B \\ A_{21}B & A_{22}B & A_{23}B \\ A_{31}B & A_{32}B & A_{33}B \end{pmatrix}$$

[4]Μία Άλγεβρα von Neumann είναι μία υποάλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{B}(H)$ με όλους τους φραγμένους γραμμικούς τελεστές σε έναν χώρο Hilbert H , η οποία χαρακτηρίζεται από το σύνολο των φραγμένων τελεστών στον H οι οποίοι αντιμετατίθενται με όλους τους μοναδιαίους τελεστές

Επομένως, το τανυστικό γινόμενο $A \otimes B$ δύο $n \times n$ πινάκων δίνει έναν $n^2 \times n^2$ πίνακα.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό του τανυστικού γινομένου, ορίζεται μια απεικόνιση $\tau : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ τέτοια ώστε $\tau : (u \otimes v) = (v \otimes u)$, άρα οι πίνακες R_{12}, R_{13}, R_{23} ορίζονται ως εξής:

$$R_{12} = (R \otimes I)$$
$$R_{13} = (I \otimes \tau)(R \otimes I)(I \otimes \tau)$$
$$R_{23} = (I \otimes R)$$

Τώρα, μπορεί να εισαχθεί και η εξίσωση Yang-Baxter.

Η εξίσωση Yang-Baxter (YBE) έχει δύο βασικές μορφές. Η πρώτη (1) είναι εξαρτώμενη από παραμέτρους ενώ η δεύτερη (2) όχι. Οι δύο μορφές καταγράφονται παρακάτω. Η πρώτη:

$$(1)\ R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u)$$

όπου $R(u)$ είναι ένα αντιστρέψιμο στοιχείο του γινομένου τανυστών $A \otimes A$, όπου A μία προσεταιριστική άλγεβρα. Οι παράμετροι u, v λέγονται φασματικές (spectral) παράμετροι. Η δεύτερη:

$$(2)\ R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{23}$$

όπου R_{12}, R_{13}, R_{23} οι πίνακες, όπως ορίστηκαν από το τανυστικό γινόμενο παραπάνω.

5.1 Αναπαράσταση της εξίσωσης Yang-Baxter μέσω πινάκων

Η YBE μπορεί να εξεταστεί και από την μελέτη πινάκων, όχι αποκλειστικά τανυστές και τανυστικά γινόμενα.

Σε αυτή τη παράγραφο, η YBE αναλύεται μέσω των πινάκων $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, B : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, για τους οποίους ισχύει:

$$ABA = BAB$$

Για να βρεθούν λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, πρέπει να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες, υπό τις οποίες οι πίνακες A, B την ικανοποιούν. Η προσέγγιση αυτού του προβλήματος μοιάζει με την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης $AB = BA$, όπου αναζητείται πότε δύο πίνακες ικανοποιούν την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Εδώ μπορεί να ειπωθεί ότι αναζητείται πότε δύο πίνακες "δημιουργούν μία πλεξούδα"ή ότι "πλέκονται"όταν ικανοποιούν την εξίσωση $ABA = BAB$.

Βασική προϋπόθεση για την μελέτη της παραπάνω εξίσωσης είναι οι πίνακες να είναι τετραγωνικοί και ίδιων διαστάσεων. Αυτό συμβαίνει διότι αν

$$\begin{gathered} A_{mn}B_{nm}A_{mn} = C_{mn} \\ \text{και} \\ B_{nm}A_{mn}B_{nm} = D_{nm} \end{gathered}$$

παρατηρείται ότι $C_{mn} \neq D_{nm}$.

Επιπλέον,είναι απαραίτητο η ορίζουσα των πινάκων αυτών να είναι μη μηδενική. Ακόμα, από στοιχειώδεις γνώσεις Γραμμικής Άλγεβρας ισχύει ότι $det(AB) = det(A)det(B)$, άρα για την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι:

$$det(A)det(B)det(A) = det(B)det(A)det(B)$$

Παίρνοντας την παραπάνω σχέση, για να ισχύει ταυτοτικά, πρέπει να ισχύει ότι $det(A) = det(B)$. Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των ιδιοτιμών του, άρα:

$$det(A) = det(B) \Longrightarrow \prod_i \lambda_i(A) = \prod_j \lambda_j(B)$$

όπου λ_i, λ_j οι ιδιοτιμές των A, B αντίστοιχα.

Ο πολύπλοκος υπολογισμός της εξίσωσης Yang-Baxter οφείλεται στο γεγονός ότι η εξίσωση $ABA = BAB$ αναπαριστά συνδυασμό γραμμικών απεικονίσεων. Αν γίνει άμεση προσπάθεια υπολογισμού του προβλήματος αυτού, το σύστημα που θα προκύψει θα είναι εξαιρετικά δύσκολο να λυθεί, λόγω της πολυπλοκότητάς του. Γι' αυτό, προτιμάται η επίλυση της εξίσωσης με την χρήση συγκεκριμένων πινάκων, όπως οι διαγώνιοι, οι οποίοι μειώνουν σε μεγάλο βαθμό την πολυπλοκότητα του προβλήματος.

Θεώρημα: Έστω A, B δύο ταυτοχρόνως διαγωνοποιήσιμοι πίνακες που ικανοποιούν την εξίσωση Yang-Baxter , τότε $A = B$.
Απόδειξη: Έστω δύο πίνακες A, B ταυτοχρόνως διαγωνιοποιήσιμοι, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $\Lambda_A = P^{-1}AP$ και $\Lambda_B = P^{-1}BP$,

όπου Λ_A, Λ_B είναι διαγώνιοι πίνακες. Από υπόθεση, ισχύει ότι $ABA = BAB$, άρα:

$$P\Lambda_A P^{-1} P\Lambda_B P^{-1} P\Lambda_A P^{-1} = P\Lambda_B P^{-1} P\Lambda_A P^{-1} P\Lambda_B P^{-1}$$

Δεδομένου ότι $P^{-1}P = 1$, συνεπάγεται ότι:

$$P\Lambda_A\Lambda_B\Lambda_A P^{-1} = P\Lambda_B\Lambda_A\Lambda_B P^{-1}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με P^{-1} και από δεξιά με P, προκύπτει ότι:

$$\Lambda_A\Lambda_B\Lambda_A = \Lambda_B\Lambda_A\Lambda_B$$

Αν n το μέγεθος των πινάκων A, B, τότε η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί ως σύστημα n εξισώσεων, με την $i-$οστή εξίσωση να γράφεται ως:

$$\alpha_i^2 b_i = \alpha_i b_i^2$$

Όπου α_i, b_i είναι τα $i-$οστά στοιχεία των διαγώνιων πινάκων Λ_A, Λ_B. Έχουμε:

$$\alpha_i^2 b_i = \alpha_i b_i^2 \iff \alpha_i = b_i \iff \Lambda_A = \Lambda_B$$

Συνεπώς, $A = B$.

5.2 Σύνδεση YBE με την ομάδα πλεξούδας

Από τα παραπάνω, γίνεται εμφανές ότι η εξίσωση Yang-Baxter συνδέεται άμεσα με την Ομάδα Πλεξούδας B_n. Η YBE χρησιμοποιείται πρωτίστως για την αναπαράσταση της ομάδας πλεξούδας μέσω τανυστών, πινάκων ή άλλων αλγεβρικών δομών.

Το υλικό των παρακάτω παραγράφων έχει γραφεί με βάση τα άρθρα "Fusion of the Yang-Baxter equation and the Braid Group" του L. Poulain d'Andecy[19] και "Examination of the Yang-Baxter equation" του A. Cibotarica[18].

5.2.1 Αναπαράσταση της ομάδας πλεξούδας μέσω Άλγεβρας

Ορισμός 5.2. $End(V \otimes V) = \{f : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V | f$ ενδομορφισμός $\}$ είναι το σύνολο των ενδομορφισμών (γραμμικών συνδυασμών) από τον χώρο $V \otimes V$ στον εαυτό του.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και το τανυστικό γινόμενο $V^{\otimes n}$, ο χώρος που δημιουργείται από το τανυστικό γινόμενο του V με τον εαυτό του n φορές. Παίρνεται ένα αντιστρέψιμο στοιχείο $R \in End(V \otimes V)$ και ορίζονται τα στοιχεία $R_1, R_2, ..., R_{n-1}$ με τον εξής τρόπο:

Τελεστές $R_1, R_2, ..., R_{n-1}$ στον $V^{\otimes n}$ τέτοιοι ώστε:

$$\overbrace{V \otimes V}^{R_1} \otimes V \otimes \ldots\ldots \otimes V, \quad V \otimes \overbrace{V \otimes V}^{R_2} \otimes \ldots, \quad \ldots \otimes \overbrace{V \otimes V}^{R_{n-1}}$$

Πιο συγκεκριμένα, για $i = 1, 2, ..., n-1$ ο τελεστής R_i δρα πάνω στον $V^{\otimes n}$ με μη τεριμμένο τρόπο μόνο στην $i-$οστή και $(i+1)-$ιοστή δύναμη του V, όπου η δράση είναι R. Δηλαδή, ορίζεται ως: $R_i = Id_{V^{\otimes i-1}} \otimes R \otimes Id_{V^{\otimes n-i-1}}$.

Λέμε ότι, ο R ορίζει μια *τοπική αναπαράσταση* της ομάδας πλεξούδας B_n, αλλιώς ότι η παρακάτω αντιστοίχιση

$$\begin{gathered} \rho : B_n \longrightarrow End(V^{\otimes n}) \\ \sigma_i \mapsto R_i \end{gathered}$$

είναι μία τοπική αναπαράσταστη της B_n στον τανυστικό χώρο $V^{\otimes n}$, αν οι θεμελιώδεις σχέσεις της ομάδας πλεξούδας ικανοποιούνται. Δηλαδή:

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2 \text{ στον } V \otimes V \otimes V$$

Επιπλεόν, παρατηρείται ότι στη σχέση $R_i R_j = R_j R_i$, αν $|i-j| > 1$ οι τελεστές R_i, R_j δεν δρουν στις ίδιες δυνάμεις του V, αν $|i-j| > 1$.

Επομένως, μια τοπική αναπαράσταση είναι μία αναπαράσταση της ομάδας πλεξούδας B_n σε έναν τανυστικό χώρο $V^{\otimes n}$ με την μορφή που εξηγήθηκε παραπάνω για την δράση των γεννήτορων σ_i.

Η αναπαράσταση εξαρτάται μονάχα από το στοιχείο $R \in End(V \otimes V)$, που πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2$ στον $V \otimes V \otimes V$ και να είναι αντιστρέψιμο.

Παραπάνω ορίστηκαν οι θεμελιώδεις σχέσεις της ομάδας πλεξούδας ως:

$$\begin{gathered} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \forall i, j = 1, 2, ..., n-1 \text{ με } |i-j| \geq 2 \\ \text{και} \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \forall i = 1, 2, ..., n-2 \end{gathered}$$

Είναι φανερό ότι η δεύτερη θεμελιώδης σχέση αποτελεί μία μορφή της YBE.

Αν, επιπλέον, έναντι των γεννητόρων σ_i τοποθετητούν πίνακες, όπως μελετήθηκε παραπάνω, γίνεται κατονοητό ότι και οι δύο σχέσεις μπορούν να μελετηθούν μέσω της εξίσωσης Yang-Baxter, όπως στο παραπάνω κεφάλαιο.

5.2.2 Η εξίσωση Yang-Baxter στην ομάδα πλεξούδας B_n

Αν κάθε πλεξούδα $n-$νημάτων αποτελεί γραμμική απεικόνιση $V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$ με γεννήτορα σ_i συνδεδεμένο με την απεικόνιση $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ τέτοια ώστε:

$$\sigma_i \longmapsto I \otimes I \otimes ... \otimes R \otimes ...I \otimes I$$

όπου I ο ταυτοτικός και ο R βρίσκεται στην $i-$οστή θέση, τότε η θεμελιώδης σχέση της ομάδα πλεξούδας παίρνει την παρακάτω μορφή της YBE:

$$(R \otimes I)(I \otimes R)(R \otimes I) = (I \otimes R)(R \otimes I)(I \otimes R)$$

Εφόσον ο R αποτελεί γραμμική απεικόνιση, μπορεί να γραφεί ως πίνακας. Ένα παράδειγμα ενός πίνακα στην ομάδα πλεξούδας είναι:

$$R = \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπεθυμίζονται οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} R_{12} &= (R \otimes I) \\ R_{13} &= (I \otimes \tau)(R \otimes I)(I \otimes \tau) \\ R_{23} &= (I \otimes R) \end{aligned}$$

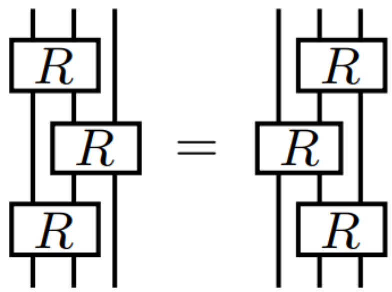
όπου R_{12}, R_{13}, R_{23} πίνακες για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{23}$$

Σε συνδυασμό με τις παραπάνω αναπαραστάσεις της ομάδας πλεξούδας μέσω πινάκων, επάγεται ότι η παραπάνω σχέση ισχύει και για τις πλεξούδες.

Δείχθηκε ότι τα διαγράμματα πλεξούδων μπορούν να αναπαρασταθούν με πιο αφηρημένο τρόπο.

Η ίδια αυτή μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπαρασταθεί μία πλεξούδα μέσω της εξίσωσης Yang-Baxter στον χώρο με τον ακόλουθο τρόπο:



Αναπαράσταση πλεξούδας μέσω YBE

Η σημαντικότερη παρατήρηση όσον αφορά την εξίσωση Yang-Baxter σε σχέση με την ομάδα πλεξούδας είναι ότι δεν αποτελεί εν γένει εργαλείο επίλυσης καποιου προβλήματος υπολογισμού, όπως οι συνήθεις εξισώσεις, αλλά ένα μέσο αναπαράστασης της ομάδας αυτής.

6 Συμπεράσματα

Κλείνοντας, παρουσιάστηκαν όλες οι απαραίτητες θεωρητικές γνώσεις από την Άλγεβρα, για την εισαγωγή του αναγνώστη στην ομάδα πλεξούδας, την αλγεβρική της δομή και σε σχέση με την εξίσωση Yang-Baxter.

Η ομάδα πλεξούδας, αν και αποτελεί κλάδο της αλγεβρικής τοπολογίας, μπορεί να μελετηθεί όπως οποιαδήποτε άλλη ομάδα στην Άλγεβρα με στοιχειώδεις μονάχα γνώσεις από Θεωρία Ομάδων.

Η εξίσωση Yang-Baxter είναι μία ιδιαίτερη εξίσωση που έχει εφαρμογές σε πολλούς επιστημονικούς τομείς και έχει διάφορες μεθοδολογίες επίλυσης, ποικίλης δυσκολίας.

Η YBE αποτελεί τρόπο αναπαράστασης της ομάδας πλεξούδας λόγω της αλγεβρικής της δομής και είναι μία μόνο εισαγωγή στην Θεωρία Αναπαραστάσεων, τομέα της Αφηρημένης Άλγεβρας.

Αναφορές

[1] Gandalf Lechner; "Braid groups, the Yang-Baxter equation, and subfactors", Snapshots of modern mathematics from Oberwofach, 2021

[2] John B. Fraleigh; A First Course in Abstract Algebra, Edition 12/2019

[3] Richard S. Pierce; Graduate Texts in Mathematics: Associative Algebras, 1982

[4] Mehmet Kaan Bengi; "An Introduction to Commutative Rings", The University of Chicago Department of Mathematics

[5] James R. Munkres; Topology, Second Edition, 2000

[6] `https://sites.oxy.edu/rnaimi/pastcourses/topology/460f05/classnotes/sec12.pdf`

[7] Luis Paris; "Braid Groups and Artin Groups", Institut de Mathematiques de Bourgogne, Universite de Burgogne, Novembre 2007

[8] Emil Artin; "Theory of Braids", Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 48(Jan 1947), p.p. 101-126

[9] Christian Kassel, Vladimir Turaev; Graduate Texts in Mathematics: Braid Groups, 2008

[10] Joshua Lieber; "Introduction to Braid Groups", University of Chicago, 2011

[11] F. Bohnenblust; "The Algebraical Braid Group", Annals of Mathematics, Vol. 48(Jan 1947), p.p. 127-136

[12] Colin C. Adams; The Knot Book: An elementary introduction to the mathematical Theory of Knots

[13] Anne-Laure Thiel; "Categorification of the Virual Braid Groups"

[14] `https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789811248498_0001?srsltid=AfmBOopF5uKwkdPKkzDqW3ZSuhDutAhbVjqkSChmSpquJEVba0K2QTKX`

[15] Tova Alsatra; "Knots, Reidemeister Moves and Knot Invariants", Uppsala Universitet, 2019

[16] G. Eleftherakis, A. Katavolos; "Introduction to von Neumann Algebras", University of Athens

[17] Ganalf Lechner, Ulrich Pennig, Simon Wood; "Yang-Baxter representations of the infinite symmetric group", School of Mathematics, Cardiff University, March 2018

[18] Alexandru Cibotarica; "An examination of the Yang-Baxter equation", University of Southern Mississippi, 8-2011

[19] L. Poulain d' Andecy; "Fusion for the Yang-Baxter equation and the braid group", April 2022