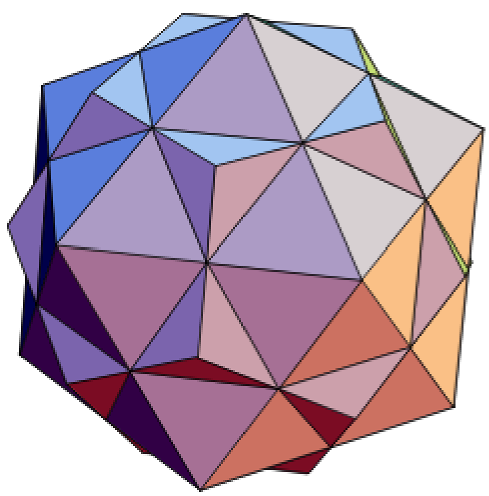
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΜΑ 9ου ΕΞΑΜΗΝΟΥ

Ανδρέας Κατσαούνης

Πολύεδρα και Συμμετρότητα

Επιβλέπουσες:

Σοφία Λαμπροπούλου, Χριστίνα Βασιλακοπούλου



Αθήνα, 2023

Πίνακας περιεχομένων

ΜΕΡΟΣ 1^{o}

1.1 Πολύγωνα

Ορισμός: p-γωνο καλείται μία κλειστή καμπύλη η οποία αποτελείται από p ευθύγραμμα τμήματα A_1A_2, A_2A_3, ..., A_pA_1 που ενώνονται ανά δύο στα p σημεία A_1, A_2, ..., A_p. Τα ευθύγραμμα τμήματα A_1A_2, A_2A_3, ..., A_pA_1 καλούνται πλευρές, ενώ τα σημεία A_1, A_2, ..., A_p κορυφές του p-γώνου. Αν οι πλευρές του p-γώνου είναι ομοεπίπεδες, τότε καλείται επίπεδο, αλλιώς λοξό.

Θα θεωρήσουμε ότι οι πλευρές του p-γώνου δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από τις κορυφές (δε διασταυρώνονται), δηλαδή θα ασχοληθούμε με απλές κλειστές καμπύλες. Σ' αυτήν την περίπτωση, από το Θεώρημα του Jordan, ένα επίπεδο p-γωνο χωρίζει το επίπεδό του σε δύο περιοχές: το εσωτερικό του, που είναι ένα φραγμένο χωρίο, και το εξωτερικό του.

Πολλές φορές, θα θεωρούμε ότι το p-γωνο απαρτίζεται από το εσωτερικό του, τις πλευρές και τις κορυφές του. Τότε, μπορούμε να δώσουμε ένα νέο ορισμό του p-γώνου, ως μία απλά συνεκτική περιοχή (δηλαδή χωρίς οπές) που φράσσεται από p διακριτά ευθύγραμμα τμήματα.

Ορισμός: Ένα p-γωνο λέγεται:

- ισόπλευρο, αν όλες οι πλευρές του είναι ίσες,
- ισογώνιο, αν όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Ένα επίπεδο p-γωνο που είναι συγχρόνως ισόπλευρο και ισογώνιο καλείται κανονικό και συμβολίζεται: {p}.

Για παράδειγμα, με {3} συμβολίζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο, με {4} το τετράγωνο κοκ.

1.2 Πολύεδρα

Ορισμός: Πολύεδρο είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από επίπεδα πολύγωνα τα οποία συνδέονται μεταξύ τους, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε πλευρά κάθε πολυγώνου να ανήκει ακόμα σε ένα και μόνο ένα πολύγωνο. Τα πολύγωνα καλούνται έδρες και οι πλευρές τους ακμές του πολύεδρου.

Κατ' αντιστοιχία με όσα αναπτύξαμε για τα πολύγωνα, θα θεωρήσουμε ότι οι έδρες του πολυέδρου δε διασταυρώνονται. Τότε, το πολύεδρο αποτελεί μία απλή κλειστή επιφάνεια και χωρίζει το χώρο σε δύο περιοχές: το εσωτερικό του, που είναι ένα φραγμένο χωρίο, και το εξωτερικό του.

Πολλές φορές θα θεωρούμε ως πολύεδρο το εσωτερικό του μαζί με τις έδρες, τις ακμές και τις κορυφές του.

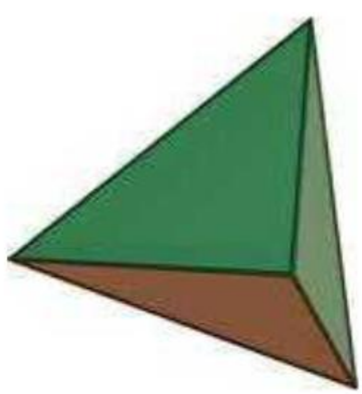
Ορισμός: Ένα πολύεδρο καλείται κυρτό, αν για δύο τυχαία σημεία του το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στο πολύεδρο.

Ορισμός: Ένα πολύεδρο λέγεται κανονικό, αν όλες οι έδρες του είναι ίσα κανονικά πολύγωνα τα οποία ενώνονται με τον ίδιο τρόπο γύρω από κάθε κορυφή. Ένα κανονικό πολύεδρο συμβολίζεται με {p,q} (σύμβολο του Schläfli), όπου p είναι ο αριθμός των πλευρών της κάθε έδρας και q ο αριθμός των εδρών που ενώνονται σε κάθε κορυφή.

1.3 Πλατωνικά στερεά

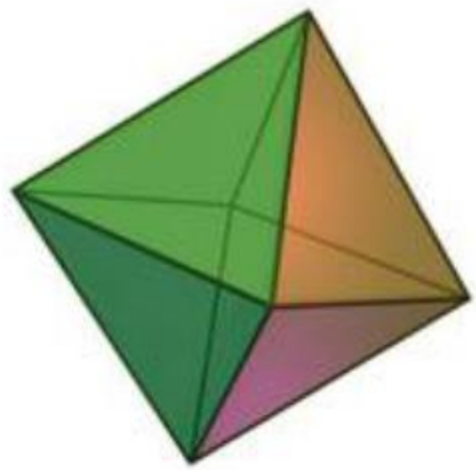
Πλατωνικό στερεό λέγεται ένα κυρτό κανονικό πολύεδρο. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι έδρες είναι ίσα κανονικά πολύγωνα, όλες οι πολυεδρικές γωνίες του είναι ίσες, όλες οι ακμές του είναι ίσες και όλες οι (επίπεδες) γωνίες των εδρών του είναι ίσες. Υπάρχουν 5 τέτοια στερεά: το τετράεδρο, το οκτάεδρο, το εικοσάεδρο, ο κύβος και το δωδεκάεδρο.

1. **Κανονικό τετράεδρο:** Τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα τοποθετούνται με τρόπο ώστε κάθε τρεις από τις επίπεδες γωνίες τους να δημιουργούν μια στερεά γωνία.



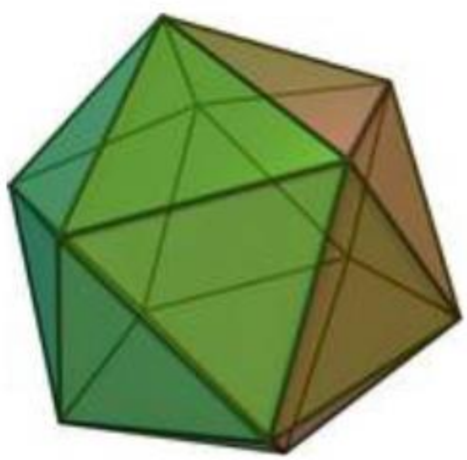
Το κανονικό τετράεδρο (4 κορυφές, 4 έδρες, 6 ακμές).

2. **Κανονικό οκτάεδρο:** Σχηματίζεται από οκτώ έδρες (ισόπλευρα τρίγωνα) τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο, ώστε η κάθε μία από τις έξι στερεές γωνίες του να αποτελείται από τέσσερις επίπεδες γωνίες.



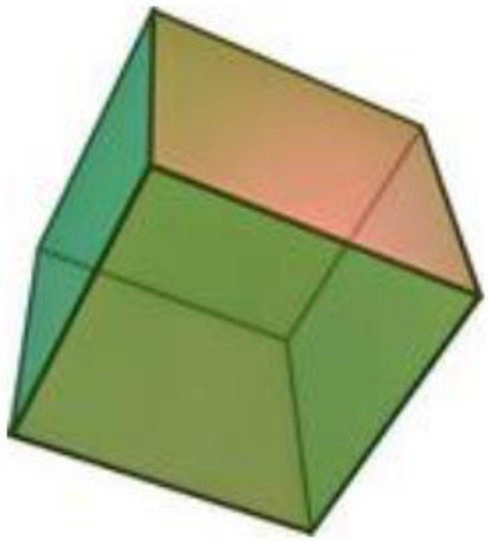
Το κανονικό οκτάεδρο (6 κορυφές, 8 έδρες, 12 ακμές).

3. **Κανονικό εικοσάεδρο:** Σχηματίζεται από είκοσι έδρες (ισόπλευρα τρίγωνα) οι οποίες σχηματίζουν δώδεκα στερεές γωνίες, που έχουν σαν σύνορό τους πέντε επίπεδες γωνίες.



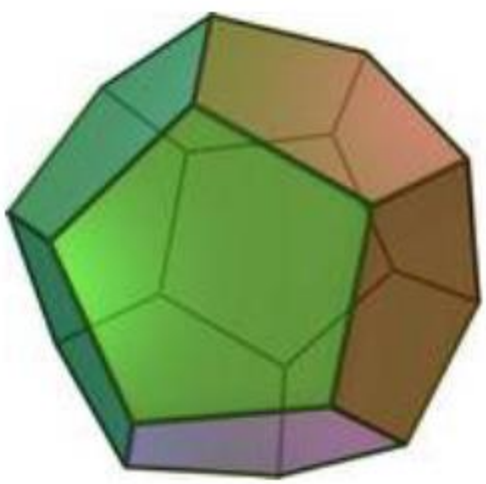
Το κανονικό εικοσάεδρο (12 κορυφές, 20 έδρες, 30 ακμές).

4. **Κύβος:** Έξι τετράγωνα τοποθετούνται μαζί με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μία από τις οκτώ στερεές γωνίες του να αποτελείται από τρεις επίπεδες γωνίες.



Ο κύβος (8 κορυφές, 6 έδρες, 12 ακμές).

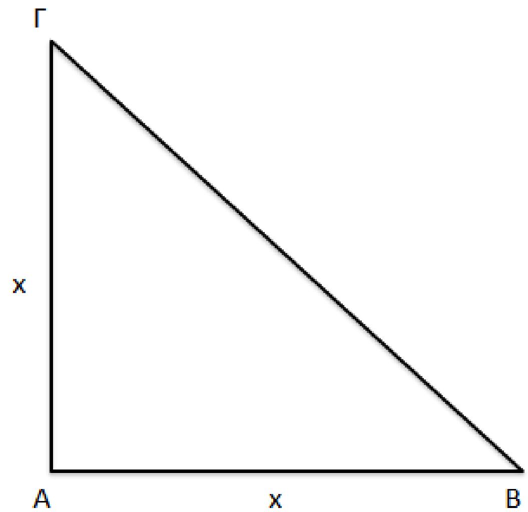
5. **Κανονικό δωδεκάεδρο:** Αποτελείται από δώδεκα κανονικά πεντάγωνα ίσα μεταξύ τους.



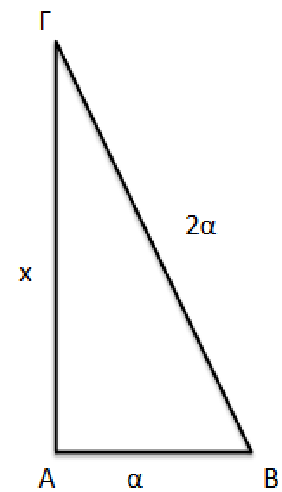
Το κανονικό δωδεκάεδρο (20 κορυφές, 12 έδρες, 30 ακμές).

Να σημειωθεί ότι ο Πλάτωνας θεωρούσε ότι κάθε Πλατωνικό στερεό έχει σαν σύνορό του επίπεδες επιφάνειες που αποτελούνται από τρίγωνα. Τα θεμελιώδη τρίγωνα που παράγουν τα επίπεδα σχήματα είναι δύο ειδών:

- το ορθογώνιο και ισοσκελές
- το ορθογώνιο σκαληνό τρίγωνο με την ιδιότητα: η μικρότερη από τις κάθετες πλευρές του να ισούται με το μισό της υποτείνουσας



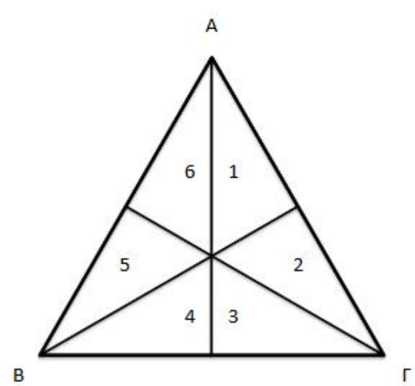
ορθογώνιο ισοσκελές



ορθογώνιο σκαληνό με τη μικρότερη από τις κάθετες πλευρές να ισούται με το μισό της υποτείνουσας

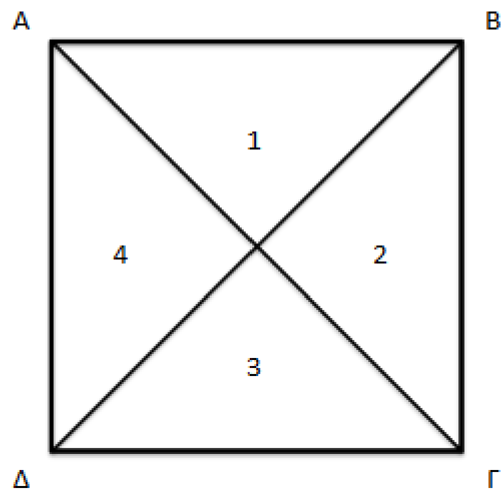
Τα θεμελειώδη πλατωνικά τρίγωνα.

Έξι τρίγωνα του δεύτερου είδους, τοποθετημένα όπως το παρακάτω σχήμα, δημιουργούν το ισόπλευρο τρίγωνο:



ισόπλευρο τρίγωνο

ενώ τέσσερα σχήματα του πρώτου είδους δημιουργούν, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο:



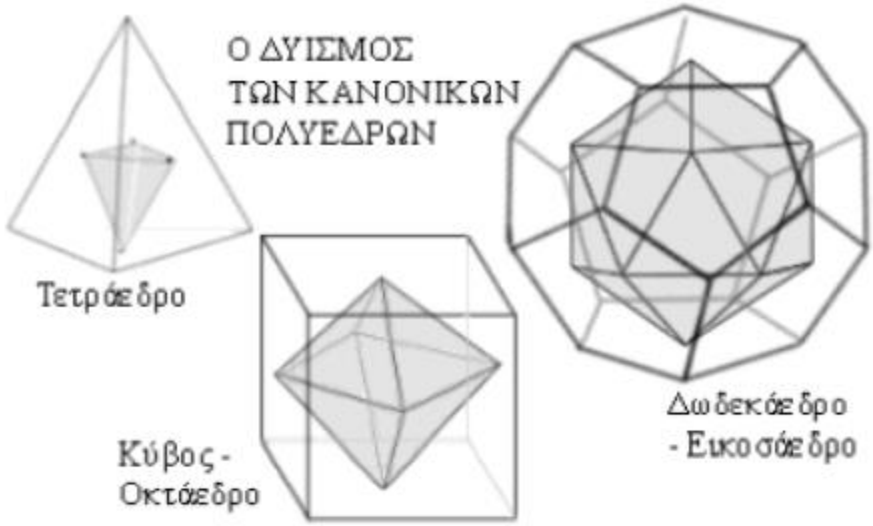
τετράγωνο

Από τα «τέλεια» αυτά σχήματα, δηλαδή το ισόπλευρο τρίγωνο και το τετράγωνο, ο Πλάτων θα προχωρήσει στη δημιουργία των τεσσάρων μόνο (από τα πέντε) κοσμικών σχημάτων, εξαιρώντας το δωδεκάεδρο, που έχει για έδρες κανονικά πεντάγωνα!

1.4 Η έννοια της δυικότητας των πολυέδρων

Ορισμός: Δύο πολύεδρα είναι δυικά αν τα κέντρα των εδρών του ενός συμπίπτουν με τις κορυφές του άλλου και αντίστροφα.

Τα δυικά γεωμετρικά σχήματα είναι αλληλοπαραγόμενα, π.χ. ο κύβος, δυικό σχήμα του κανονικού οκταέδρου, μετασχηματίζεται με λογικό τρόπο σε οκτάεδρο και αντίστροφα. Το δυικό σχήμα του κανονικού τετραέδρου είναι ο εαυτός του. Είναι δηλαδή αυτοπαραγόμενο στερεό. Το δυικό του δωδεκαέδρου είναι το εικοσάεδρο. Το πλήθος επομένως των εδρών γίνεται πλήθος κορυφών και αντίστροφα για τα δυικά στερεά.



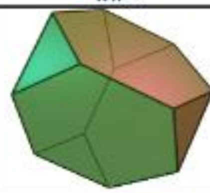
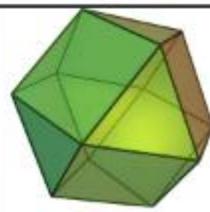
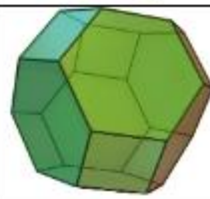
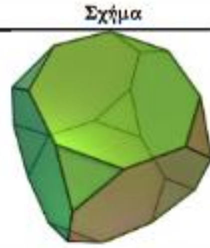
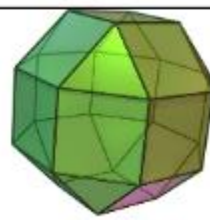
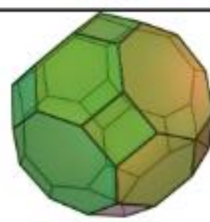
Ο δυϊσμός των κανονικών πολυέδρων

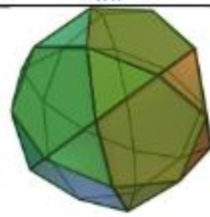
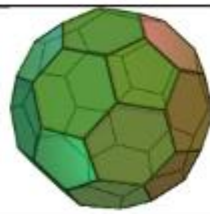
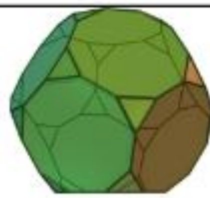
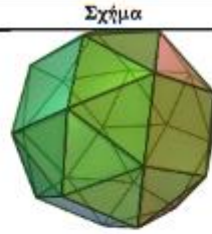
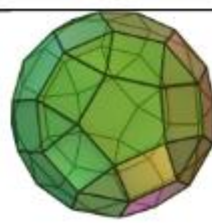
1.5 Αρχιμήδεια στερεά

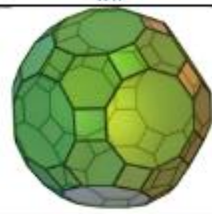
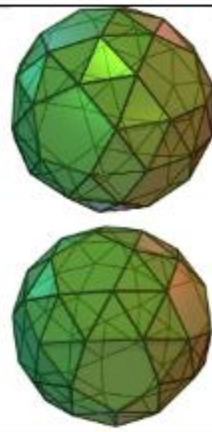
Ορισμός: Αρχιμήδειο στερεό είναι ένα κυρτό πολύεδρο που συνίσταται από κανονικά πολύγωνα δύο ή περισσότερων τύπων και οι κορυφές του είναι «ισοδύναμες». Λέγοντας «ισοδύναμες» εννοούμε ότι αν επιλέγονται δύο κορυφές υπάρχει τρόπος περιστροφής ή ανάκλασης του πολυέδρου, έτσι ώστε να φαίνεται αναλλοίωτο με τη μία κορυφή να έχει μετακινηθεί στη θέση της άλλης.

Συμβολίζουμε με $(p_1.p_2. \dots .p_n)$ το Αρχιμήδειο στερεό στο οποίο κάθε κορυφή περικλείεται από n πολύγωνα, όπου p_i ο αριθμός των πλευρών του i-στού πολυγώνου.

Ο Πάππος από την Αλεξάνδρεια περιγράφει τα Αρχιμήδεια στερεά σε χειρόγραφο που έχει διατυπωθεί στη Βιβλιοθήκη του Βατικανού. Ο Johannes Kepler (1571-1630) ήταν ο επόμενος που έγραψε για τα Αρχιμήδεια στερεά στο έργο του «Harmonices Mundi» παρ' ότι κάποια από αυτά τα στερεά είχαν επανακαλυφτεί από άλλους. Ο Kepler απέδειξε ότι είναι ακριβώς 13. (Η αναφορά γίνεται στο Βιβλίο II του έργου του «De Corguentia Figurarum Harmonicarum» Πρόταση XXVIII, σελίδες 61-65), δίνοντάς τους σύγχρονα ονόματα.

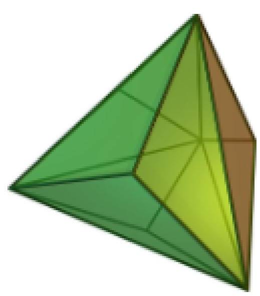
A/A	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
1.	κόλουρο τετράεδρο (truncated tetrahedron) (3.6.6)		Το πρώτο σχήμα με οκτώ έδρες 4 τρίγωνα και 4 εξάγωνα.
2.	κυβοκτάεδρο (cuboctahedron) (3.4.3.4)		Μετά από αυτό έρχονται τρία σχήματα με 14 έδρες. Το πρώτο με 8 τρίγωνα και 6 τετράγωνα,
3.	κόλουρο οκτάεδρο (truncated octahedron) (4.6.6)		το δεύτερο με 6 τετράγωνα και 8 εξάγωνα
4.	κόλουρος κύβος (truncated cube) (3.8.8)		και το τρίτο με 8 τρίγωνα και 6 οκτάγωνα.
5.	ρομβοκυβοκτάεδρο (rhombicuboctahedron) (3.4.4.4)		Μετά από αυτά έρχονται δύο σχήματα με 26 έδρες. Το πρώτο με 8 τρίγωνα και 18 τετράγωνα
6.	κόλουρο κυβοκτάεδρο (truncated cuboctahedron) (4.6.8)		το δεύτερο με 12 τετράγωνα, 8 εξάγωνα και 6 οκτάγωνα.

A/A	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
7.	εικοσιδωδεκάεδρο (icosidodecahedron) (3.5.3.5)		Μετά απ' αυτά έρχονται 3 σχήματα με 32 έδρες, το πρώτο με 20 τρίγωνα και 12 πεντάγωνα,
8.	κόλουρο εικοσάεδρο (truncated icosahedron) (5.6.6)		το δεύτερο με 12 πεντάγωνα και 20 εξάγωνα
9.	κόλουρο δωδεκάεδρο (truncated dodecahedron) (3.10.10)		και το τρίτο με 20 τρίγωνα και 12 δεκάγωνα.
10.	κολοβός κύβος (snub cube) (3.3.3.3.4)	 	Μετά από αυτά έρχεται ένα σχήμα με 38 έδρες, με 32 τρίγωνα και 6 τετράγωνα.
11.	ρομβικοσιδωδεκάεδρο (rhombicosidodecahedron) (3.4.5.4)		Μετά από αυτό έρχονται δύο σχήματα με 62 έδρες, το πρώτο με 20 τρίγωνα, 30 τετράγωνα και 12 πεντάγωνα,

Α/Α	Όνομα	Σχήμα	Λόγια του Πάππου
12.	κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο (truncated icosidodecahedron) (4.6.10)		Το δεύτερο με 30 τετράγωνα, 20 εξάγωνα και 12 δεκάγωνα.
13.	κολοβό δωδεκάεδρο (snub dodecahedron) (3.3.3.3.5)		Μετά από αυτά έρχεται το τελευταίο, ένα σχήμα με 92 έδρες, με 80 τρίγωνα και 12 πεντάγωνα.

Τα δυικά των Αρχιμήδειων στερεών ονομάζονται καταλανικά, προς τιμήν του Βέλγου μαθηματικού Eugène Catalan ο οποίος τα περιέγραψε πρώτος το 1865. Να σημειωθεί ότι τα καταλανικά στερεά είναι κυρτά, αλλά οι έδρες τους δεν είναι κανονικά πολύγωνα!

Για παράδειγμα, το δυικό του κόλουρου τετράεδρου λέγεται τριάκις τετράεδρο. Έχει 12 έδρες, 18 ακμές και 8 κορυφές και κάθε έδρα του είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο:



1.6 Γραφήματα

Ορισμός: <u>Γράφημα</u> G είναι ένα ζεύγος συνόλων (V,E), όπου V είναι ένα πεπερασμένο μη κενό σύνολο N_0 στοιχείων και E ένα πεπερασμένο σύνολο N_1 ζευγών με στοιχεία του συνόλου V.

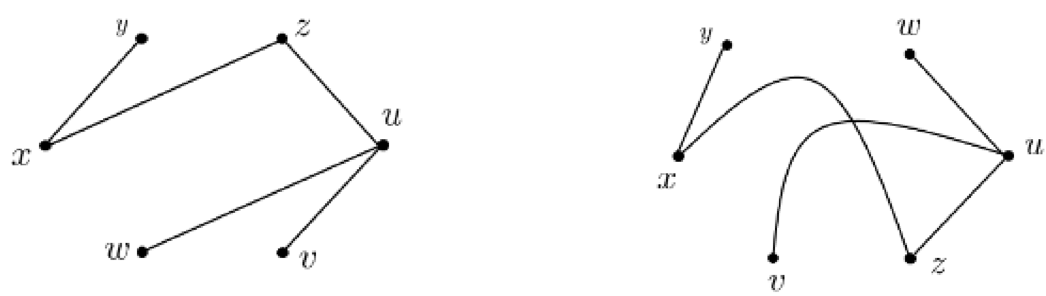
Τα στοιχεία του V ονομάζονται <u>κόμβοι ή κορυφές</u> και το V <u>σύνολο κόμβων ή σύνολο κορυφών</u>, ενώ τα στοιχεία του E <u>ακμές</u> και το E <u>σύνολο ακμών</u>.

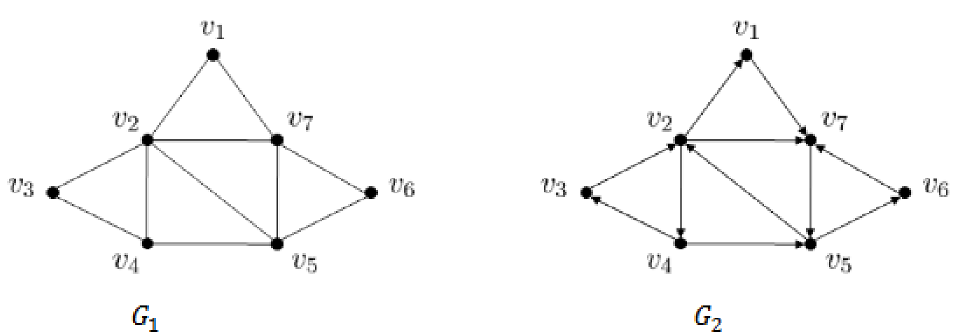
Αν τα στοιχεία-ζεύγη του συνόλου E είναι μη διατεταγμένα, τότε το γράφημα καλείται <u>μη κατευθυνόμενο</u>, αλλιώς <u>κατευθυνόμενο</u>.

Παράδειγμα: G=(V,E), όπου V = {x,y,z,u,v,w}, E = {xy,xz,zu,uv,uw}

Αναπαράσταση γραφήματος: Έστω G ένα γράφημα, V(G) το σύνολο κόμβων του G και E(G) το σύνολο των ακμών του. Τα στοιχεία του V(G) τα αναπαριστούμε με σημεία και τα στοιχεία του E(G) με ευθείες ή τεθλασμένες γραμμές.

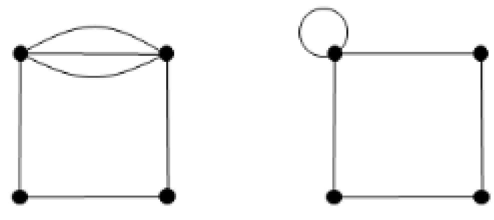
Έτσι, δύο τρόποι αναπαράστασης του γραφήματος του παραπάνω παραδείγματος είναι οι παρακάτω:





Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G_1 και ένα κατευθυνόμενο γράφημα G_2.

Ορισμός: Η ακμή xx∈E(G) ονομάζεται <u>βρόχος</u>. Δύο ή περισσότερες ακμές xy∈E(G) οι οποίες προσπίπτουν στο ίδιο ζεύγος κόμβων ονομάζονται <u>παράλληλες ακμές</u>. Ένα γράφημα χωρίς βρόχους και παράλληλες ακμές καλείται <u>απλό</u>.



Στο γράφημα G_1 βλέπουμε παράλληλες ακμές, ενώ στο G_2 ένα βρόχο.

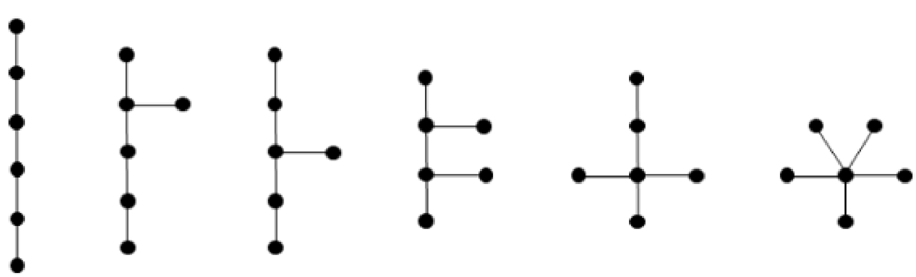
Ορισμός: Έστω G ένα απλό γράφημα. Περίπατος καλείται μία ακολουθία κόμβων $W = (v_0,v_1,...,v_k)$ του G, αν $v_{i-1}v_i \in E$, για κάθε $i=1,2,...,k$.

Ορισμός: Έστω G ένα απλό γράφημα. Διαδρομή ή μονοπάτι μήκους k καλείται μία ακολουθία κόμβων $P = (v_0,v_1,...,v_k)$ του G, αν $v_{i-1}v_i \in E$, για κάθε $i=1,2,...,k$ και δεν υπάρχει κάποιος κόμβος της P που να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές.

Ορισμός: Μία ακολουθία κόμβων $(v_0,v_1,...,v_{k-1},v_0)$ ενός γραφήματος G ονομάζεται κύκλωμα (ή κύκλος ή κλειστή διαδρομή), αν $v_{i-1}v_i \in E$, για κάθε $i=1,2,...,k-1$ και $v_{k-1}v_0 \in E$.

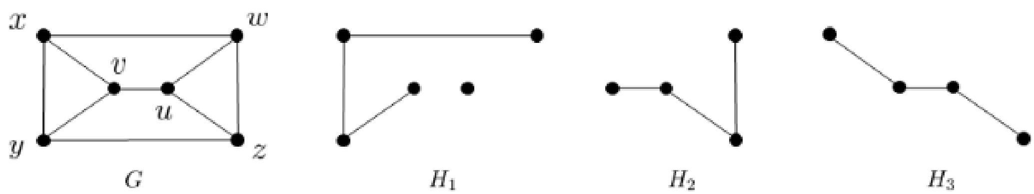
Ορισμός: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα καλείται συνεκτικό, αν μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κόμβων του x,y, υπάρχει μία διαδρομή $(x,v_1,v_2,...,v_p,y)$, $p \geq 0$ από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Ορισμός: Δέντρο T ονομάζεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα που είναι συνεκτικό και άκυκλο.



Δέντρα

Ορισμός: Έστω ένα γράφημα G=(V,E). Ένα <u>υπογράφημα</u> του γραφήματος G είναι ένα γράφημα H = (V',E') τέτοιο, ώστε $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.

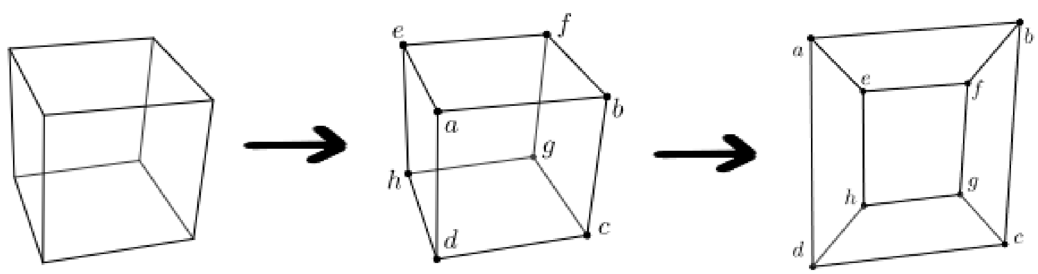


Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G και τρία υπογραφήματά του H_1, H_2 και H_3.

Αβίαστα, λοιπόν, μπορούμε να θεωρήσουμε τις ακμές και τις κορυφές ενός πολύεδρου ως τις ακμές και τους κόμβους ενός γραφήματος, αντίστοιχα, ενώ κάθε έδρα του πολυέδρου είναι ένα κύκλωμα. Η ιδέα αυτή, μπορεί να απλουστεύσει αρκετά τη μελέτη των πολυέδρων, αν λάβουμε υπόψη ότι ένα γράφημα μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλούς τρόπους. Έτσι, το γράφημα ενός πολυέδρου μπορούμε να το μετατρέψουμε σε επίπεδο γράφημα με ακριβώς τον ίδιο αριθμό κόμβων, ακμών και επιφανειών (που αντιστοιχούν στις έδρες του πολύεδρου) θεωρώντας και το χώρο έξω από το γράφημα ως επιφάνεια.

Παράδειγμα: Το γράφημα ενός κύβου:

V = {a, b, c, d, e, f, g, h}
E = {{a, b}, {b, c}, {c, d}, {d, a},
{e, f }, {f, g}, {g, h}, {h, e},
{a, e}, {b, f }, {c, g}, {d, h}}.



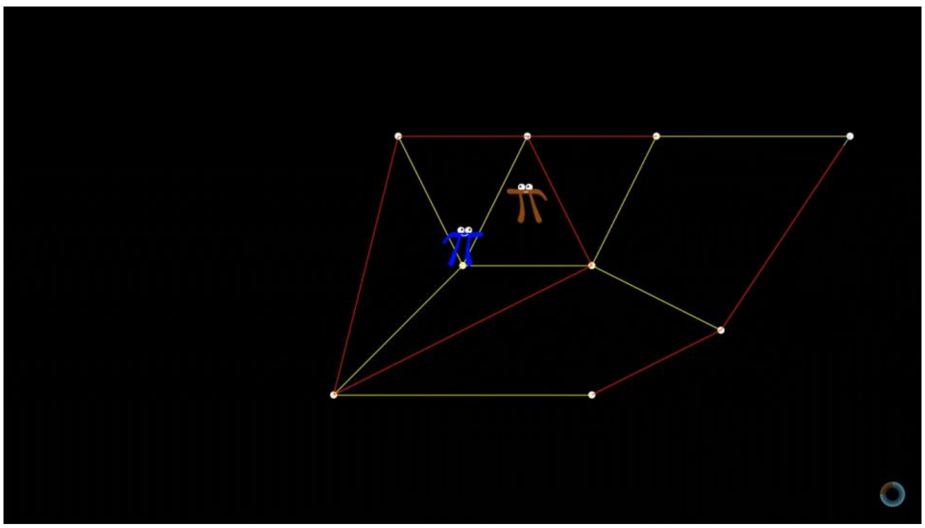
1.7 Ο τύπος του Euler

Για ένα κυρτό πολύεδρο με V κορυφές, E ακμές και F έδρες ισχύει ο τύπος:

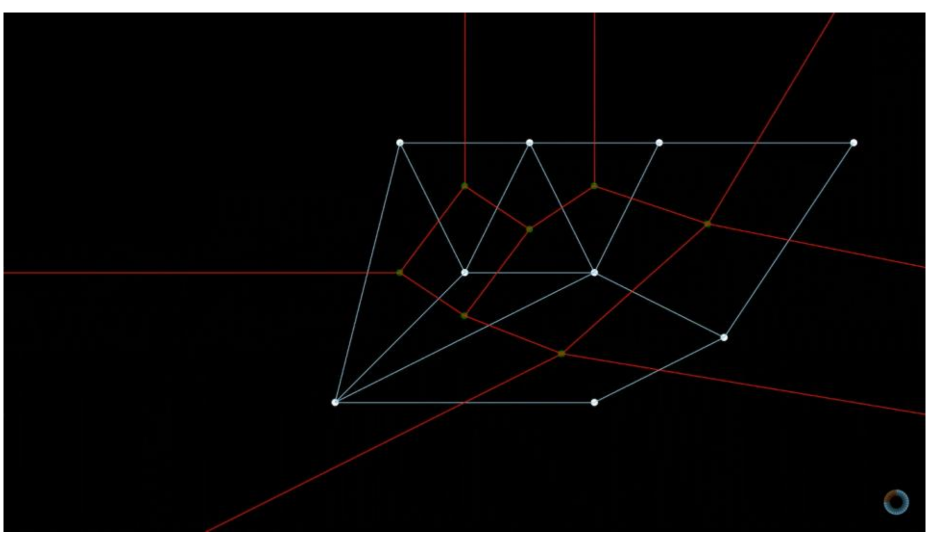
$$V - E + F = 2$$

Παρακάτω δίνεται η απόδειξη του von Staudt:

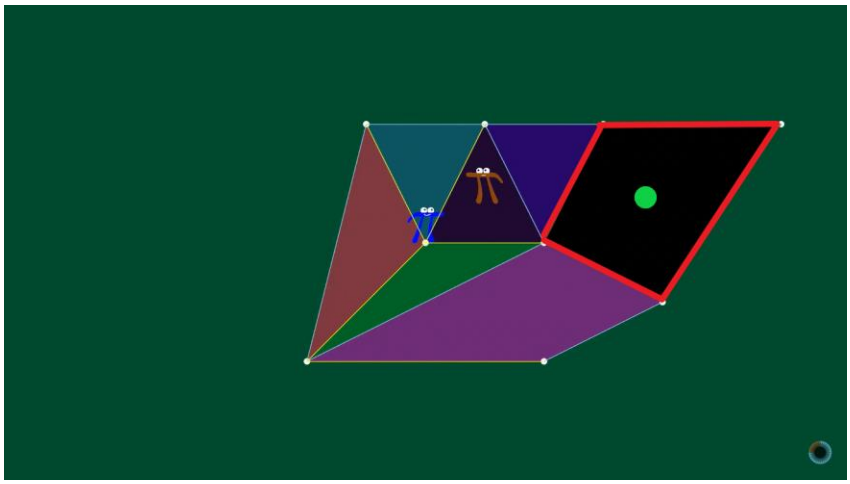
Θεωρούμε το επίπεδο γράφημα του πολύεδρου και φτιάχνουμε ένα δέντρο (υπογράφημα) με V κόμβους, ενώνοντας τους V κόμβους του γραφήματος (κορυφές του πολύεδρου). Τότε, οι ακμές του δέντρου είναι V-1. Προφανώς, υπάρχουν ακμές του γραφήματος που δεν ανήκουν στο δέντρο.



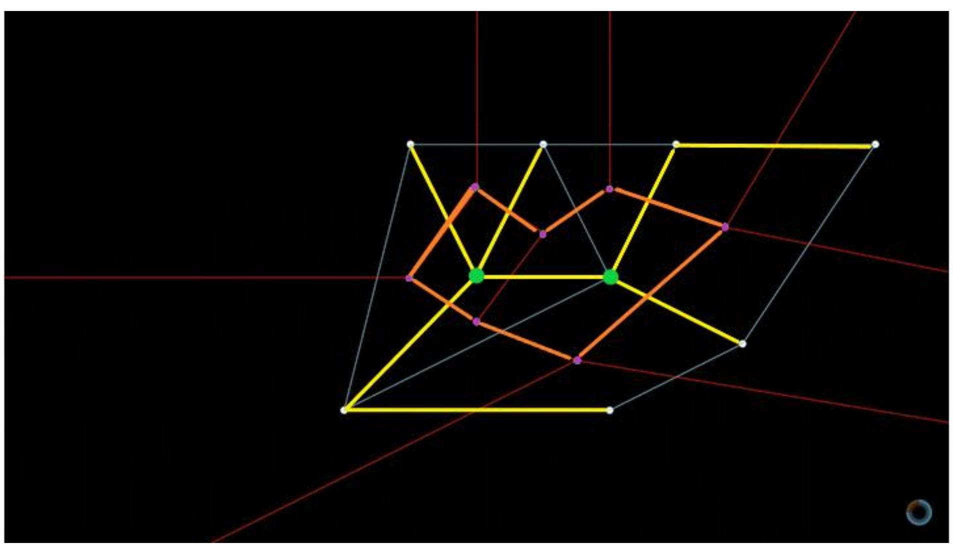
Θεωρούμε, τώρα, το δυικό γράφημα του αρχικού, το οποίο έχει ένα κόμβο μέσα σε κάθε επιφάνεια του αρχικού γραφήματος, δηλαδή F κόμβους. Οι ακμές του είναι όσες και του αρχικού γραφήματος.



Θεωρούμε τις αντίστοιχες ακμές στο δυικό γράφημα με αυτές του αρχικού που δεν ανήκουν στο δέντρο και τις ενώνουμε με τέτοιο τρόπο, ώστε ενώνοντας τις κορυφές του δυικού, (δηλαδή τις επιφάνειες του αρχικού), οι ακμές του υπογραφήματος που φτιάχνουμε να μη διασταυρώνονται με αυτές του δέντρου. Ισχυριζόμαστε ότι φτιάξαμε ένα νέο δέντρο στο δυικό γράφημα. Καταρχάς, ενώνει και τους F κόμβους του δυικού και είναι συνεκτικό, γιατί για να είχε έναν απομονωμένο κόμβο, θα έπρεπε το δέντρο να έχει κάποιο κύκλωμα που να απομονώνει μία περιοχή του αρχικού γραφήματος. Άτοπο, αφού τα δέντρα δεν έχουν κυκλώματα.



Επίσης, αν το υπογράφημα του δυικού είχε κύκλωμα, τότε μέσα σ' αυτό το κύκλωμα θα υπήρχαν κόμβοι του αρχικού γραφήματος οι οποίοι θα ήταν απομονωμένοι από το δέντρο. Άτοπο, αφού τα δέντρα είναι συνεκτικά. Άρα, το υπογράφημα του δυικού γραφήματος είναι κι αυτό δέντρο και έχει F-1 ακμές.



Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε με κίτρινο το δέντρο του αρχικού γραφήματος, που ενώνει όλους τους κόμβους του, με κόκκινο το δυικό και με πορτοκαλί το κύκλωμα του δυικού που "περικυκλώνει" 2 (πράσινες) κορυφές του αρχικού δέντρου.

Τελικά, κάθε ακμή του επίπεδου γραφήματος (άρα και του πολύεδρου) είναι είτε ακμή του ενός δέντρου, είτε του άλλου.

Άρα,

$$(V-1)+(F-1)=E.$$

1.8 Η μοναδικότητα των Πλατωνικών στερεών

Έστω ένα κανονικό πολύεδρο με V κορυφές, E ακμές και F έδρες. Έστω, επίσης, n ο βαθμός (αριθμός) των ακμών κάθε έδρας και d ο βαθμός κάθε κορυφής, δηλαδή ο αριθμός των ακμών που «συναντιούνται» σε κάθε κορυφή. Τότε, ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\sum_{i=1}^{V} \deg(v_i) = 2E, όπου\ v_i\ η\ \ i-στή\ κορυφή\ του\ πολύεδρου$$

$$\sum_{i=1}^{F} \deg(f_i) = 2E, όπου\ f_i\ η\ \ i-στή\ έδρα\ του\ πολύεδρου$$

Επειδή το πολύεδρο είναι κανονικό, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$Vd = 2E\ και\ Fn = 2E$$
$$ή\ V = \frac{2E}{d}\ και\ F = \frac{2E}{n}$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{2E}{d}+\frac{2E}{n}=V+F$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler (V-E+F=2):

$$\frac{2E}{d}+\frac{2E}{n}=E+2$$

Διαιρούμε με 2E:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{E}$$

Επειδή E>0, προκύπτει η ανισότητα:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}\ (*)$$

Παρατηρούμε ότι για μεγάλα n,d η παραπάνω ανισότητα είναι ψευδής. Για παράδειγμα, αν n=d=4, δίνει:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$$

Επίσης,

$$n \geq 3$$

αφού δεν υπάρχει «δίγωνο» και

$$d \geq 3$$

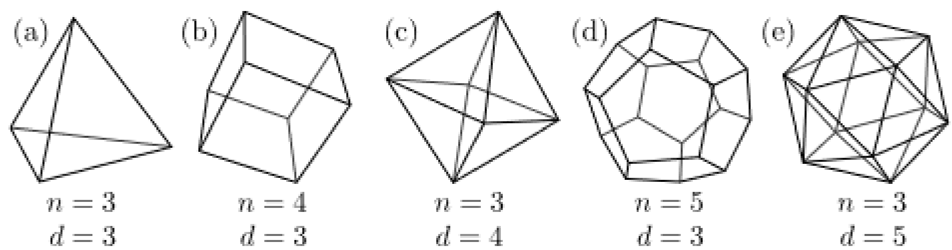
αφού δεν μπορεί να υπάρξει κορυφή πολύεδρου με μόνο δύο ακμές.

Ακόμα, αν θέσουμε κάποιο από τα n,d ίσο με 6, έστω το n, η (*) δίνει:

$$d < 3, άτοπο.$$

Συνεπώς, τα μόνα επιτρεπτά ζεύγη (n,d) είναι τα:

(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3).



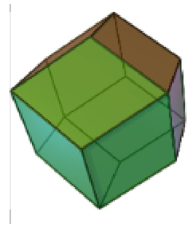
Όνομα κανονικού πολύεδρου	V	E	F	d	n
(a) Τετράεδρο	4	6	4	3	3
(b) Κύβος	8	12	6	3	4
(c) Οκτάεδρο	6	12	8	4	3
(d) Δωδεκάεδρο	20	30	12	3	5
(e) Εικοσάεδρο	12	30	20	5	3

1.9 Το δωδεκάεδρο του ταξιδιώτη

Το 1857, ο Hamilton έφτιαξε ένα μαθηματικό παιχνίδι: Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές ενός πολύεδρου (δωδεκάεδρο στο παιχνίδι) αναπαριστούν πόλεις που θέλουμε να επισκεφτούμε και οι ακμές του τις πιθανές "διαδρομές" που μπορούμε να ακολουθήσουμε. Θέλουμε να φτιάξουμε μία μοναδική διαδρομή η οποία να διέρχεται από όλες τις κορυφές του πολύεδρου μία και μοναδική φορά από την καθεμία. Στην περίπτωση που παραλλάξουμε ελαφρώς το παιχνίδι και απαιτήσουμε η τελευταία κορυφή να είναι ίδια με την αρχική, προκύπτει ένας κύκλος και ονομάζεται χαμιλτονιανός κύκλος.

Το παιχνίδι λεγόταν "Το δωδεκάεδρο του ταξιδιώτη" (The Icosian Game) και βγήκε στην αγορά του Λονδίνου το 1859. Δεν απέκτησε ιδιαίτερη απήχηση, καθώς ήταν πολύ εύκολο να βρει κάποιος μία διαδρομή που περνάει από όλες τις πόλεις μία φορά.

Να σημειωθεί, επίσης, ότι όλα τα Πλατωνικά, όπως και τα Αρχιμήδεια στερεά έχουν χαμιλτονιανούς κύκλους. Δεν ισχύει, όμως το ίδιο για τα δυϊκά των Αρχιμήδειων, όπως έδειξαν οι Coxeter και Rosenthal το 1946 για το ρομβικό δωδεκάεδρο (δυικό του κυβοκτάεδρου).



ΜΕΡΟΣ 2ο

2.1 Συμμετρότητα πολυέδρων

Έστω δύο πολύεδρα P και Q τα οποία έχουν, τουλάχιστον, μία πανομοιότυπη έδρα. Τότε, μέσω μεταφοράς, περιστροφής και ανάκλασης του ενός από τα δύο στο χώρο, είναι εφικτό να το μετακινήσουμε ώστε η κοινή έδρα των δύο να συμπίπτει. Το νέο πολύεδρο που προκύπτει καλείται η ένωση των P και Q.

Από την άλλη μεριά, αν ένα επίπεδο Π χωρίζει το εσωτερικό ενός πολύεδρου P, τότε προκύπτουν δύο πολύεδρα P_1 και P_2, η ένωση των οποίων δίνει πάλι το P. Η διαδικασία αυτή καλείται διαμέριση του πολύεδρου P ως προς το επίπεδο Π.

Θέλουμε, τώρα, να φτιάξουμε μία διαμέριση του P από πολύεδρα $P_1, P_2, \ldots, P_n$ για κάποιο n, τα οποία όμως να είναι όλα πανομοιότυπα. Φυσικά, μία τέτοια διαμέριση δεν είναι μοναδική. Έτσι, προκύπτει η ανάγκη να οριστεί η έννοια της συμμετρότητας:

Ορισμός: Λέμε ότι δύο πολύεδρα P και Q είναι σύμμετρα, αν η ένωση ενός αριθμού k πολυέδρων P δίνει ένα νέο πολύεδρο R το οποίο μπορεί να διαμεριστεί σε l πολύεδρα Q, όπου k,l θετικοί ακέραιοι.

Τότε, ισχύει η σχέση:

$$vol(R) = k \cdot vol(P) = l \cdot vol(Q)$$

$$\text{ή } vol(Q) = \frac{k}{l} \cdot vol(P).$$

Η σχέση αυτή αποτελεί αναγκαία συνθήκη ώστε τα P και Q να είναι σύμμετρα, αλλά όχι ικανή. Αυτό σημαίνει, ότι αν το κλάσμα $\frac{vol(P)}{vol(Q)}$ είναι άρρητος αριθμός, τότε τα P και Q δεν μπορεί να είναι σύμμετρα.

2.2 Το 3ο πρόβλημα του Hilbert

Είναι, λοιπόν, δυνατό να ισχύει η παραπάνω σχέση για δύο πολύεδρα, αλλά να μην είναι σύμμετρα! Για να δώσουμε αντιπαράδειγμα, χρειάζεται πρώτα να εισάγουμε ένα νέο όρο: την αναλλοίωτη του Dehn.

Ο Dehn ήταν μαθητής του Hilbert και εισήγαγε τη συγκεκριμένη αναλλοίωτη, προκειμένου να δώσει απάντηση στο 3ο από τα 23 προβλήματα που άφησε το 1900 στη μαθηματική κοινότητα ο δάσκαλός του. Ο ίδιος ο Hilbert θεωρούσε ότι η λύση αυτών των προβλημάτων θα οδηγούσε στη βαθύτερη κατανόηση και εξέλιξη των Μαθηματικών.

Το 3ο πρόβλημα του Hilbert διατυπώνεται ως εξής:

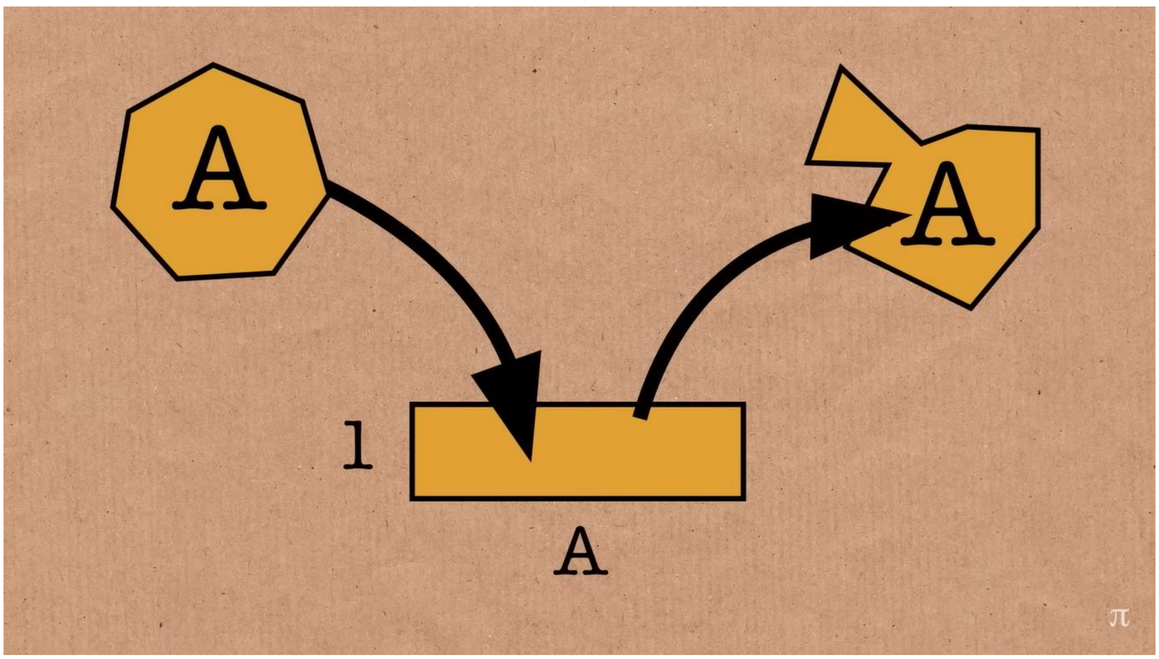
Έστω δύο πολύεδρα με τον ίδιο όγκο. Είναι πάντα εφικτό να κόψουμε το πρώτο σε πεπερασμένο αριθμό πολυέδρων, ώστε μετά να τα ενώσουμε με κάποιο τρόπο και να πάρουμε το δεύτερο;

2.3 Το ανάλογο του 3ου προβλήματος του Hilbert στις 2 διαστάσεις

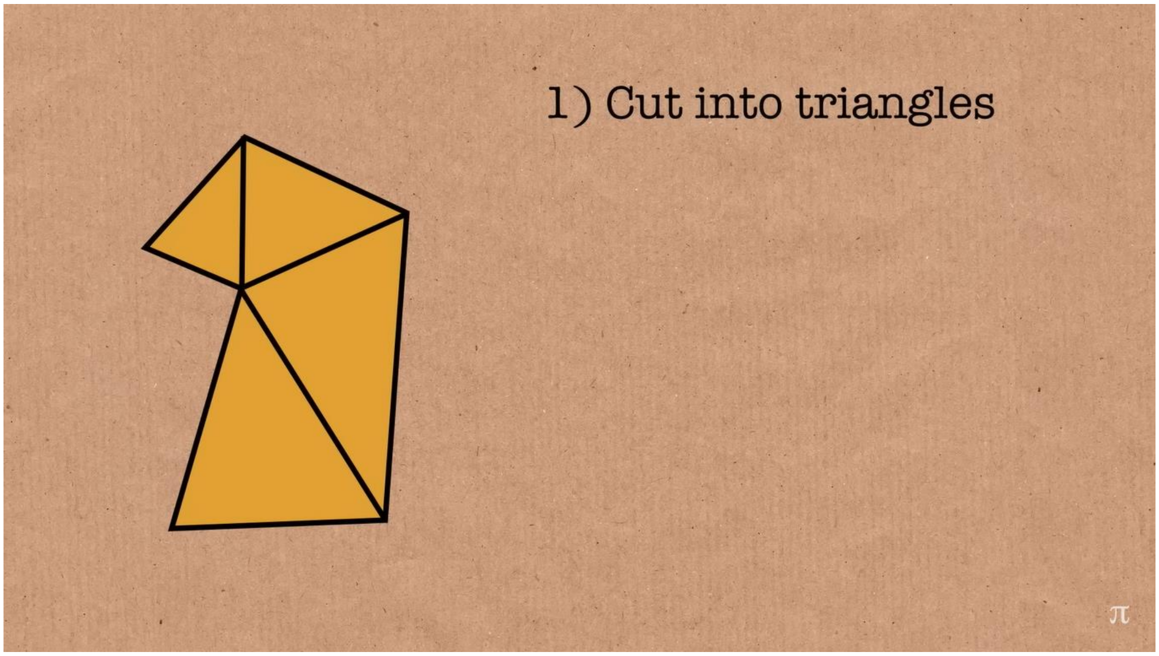
Η απάντηση του Dehn στο παραπάνω πρόβλημα ήταν αρνητική! Πριν δούμε, όμως, πώς το χειρίστηκε ο Dehn, ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε το ανάλογο πρόβλημα στις 2 διαστάσεις:

Έστω δύο πολύγωνα με το ίδιο εμβαδόν. Είναι πάντα εφικτό να κόψουμε το πρώτο σε πεπερασμένο αριθμό πολυγώνων, ώστε μετά να τα ενώσουμε με κάποιο τρόπο και να πάρουμε το δεύτερο;

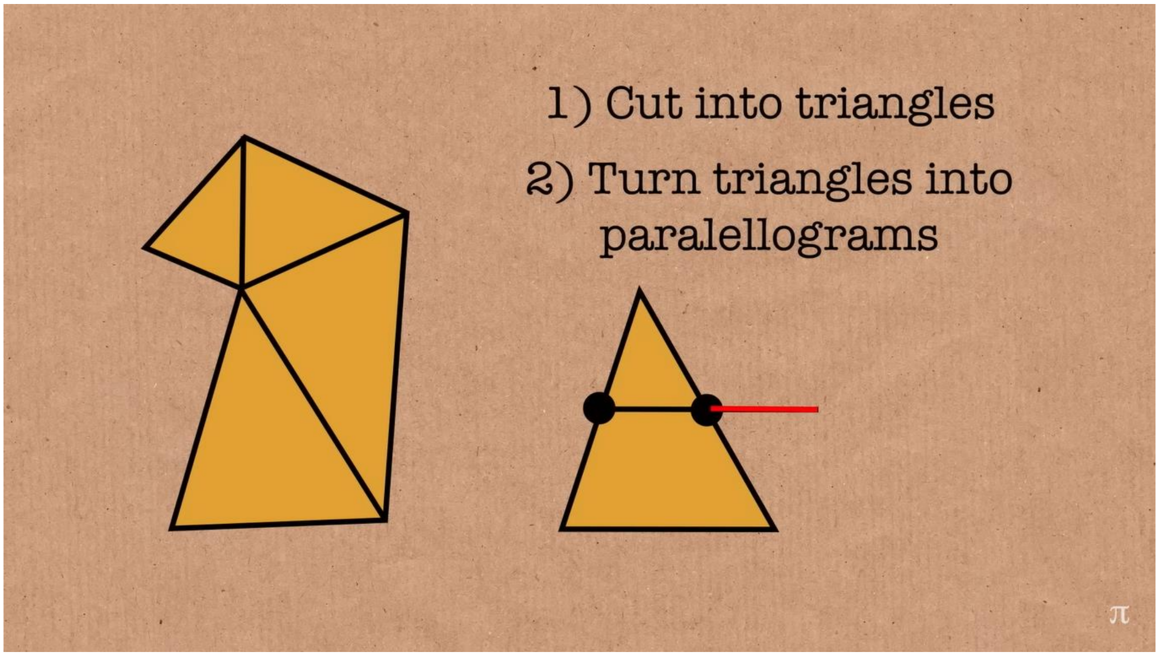
Εδώ η απάντηση είναι καταφατική! Θα δουλέψουμε κατασκευαστικά: Θα φτιάξουμε μία διαδικασία ώστε με δοσμένο πολύγωνο εμβαδού Α να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο διαστάσεων 1xΑ. Τότε, ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία, μπορούμε να παράξουμε το δεύτερο πολύγωνο εμβαδού Α.

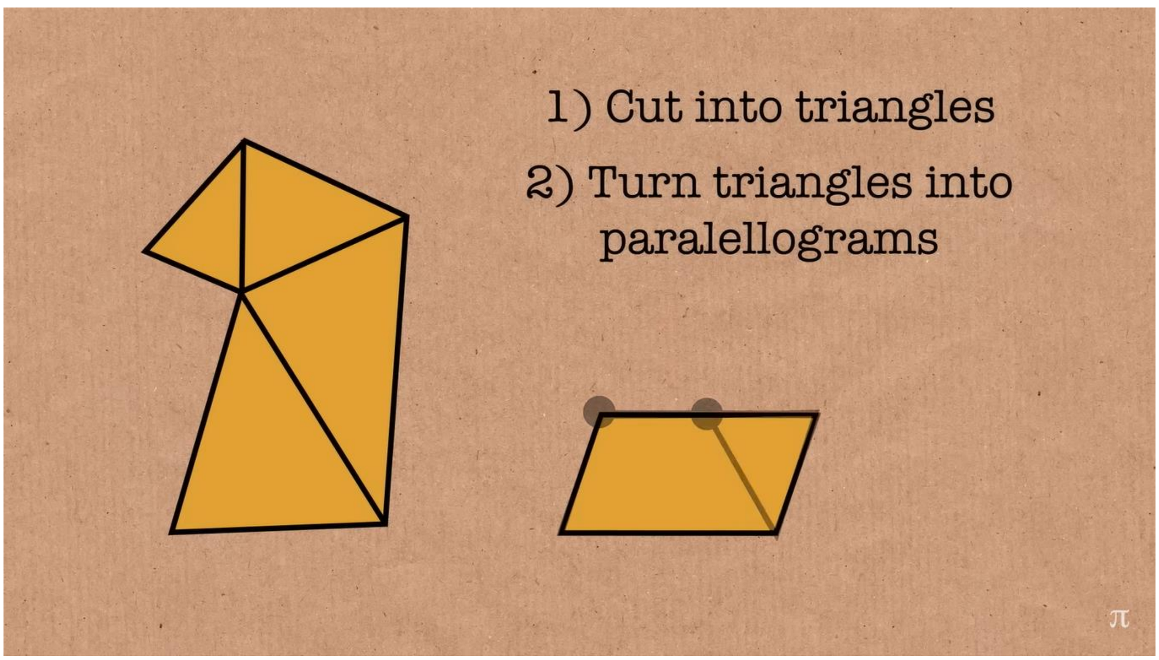


1ο βήμα: Χωρίζουμε το πολύγωνο σε τρίγωνα.

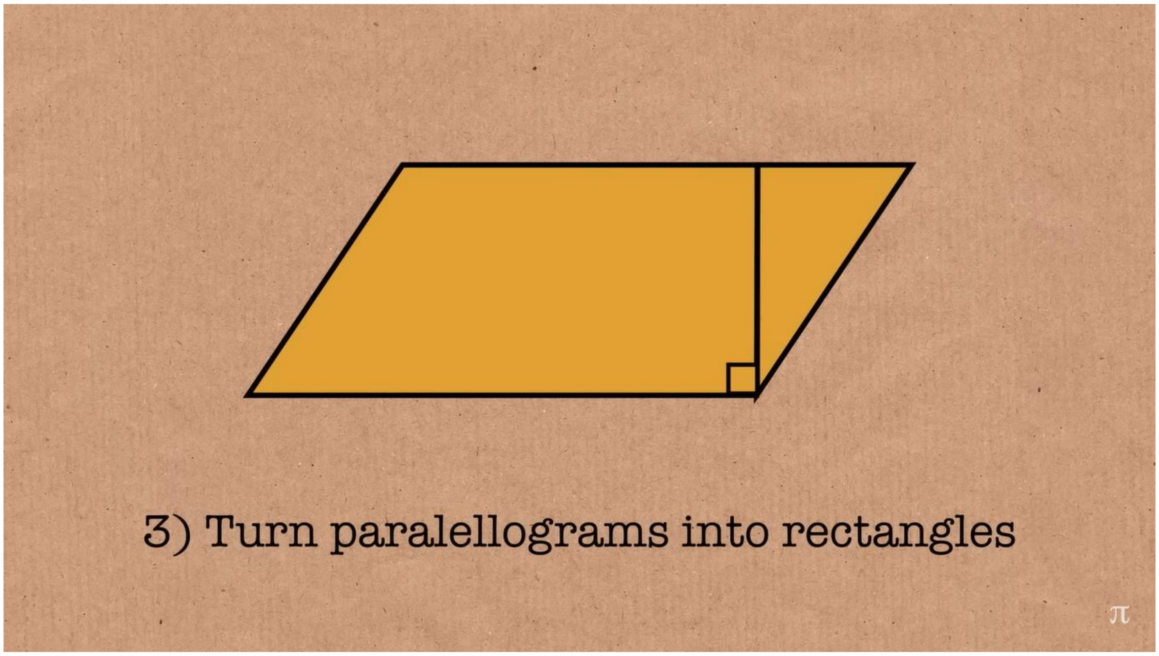


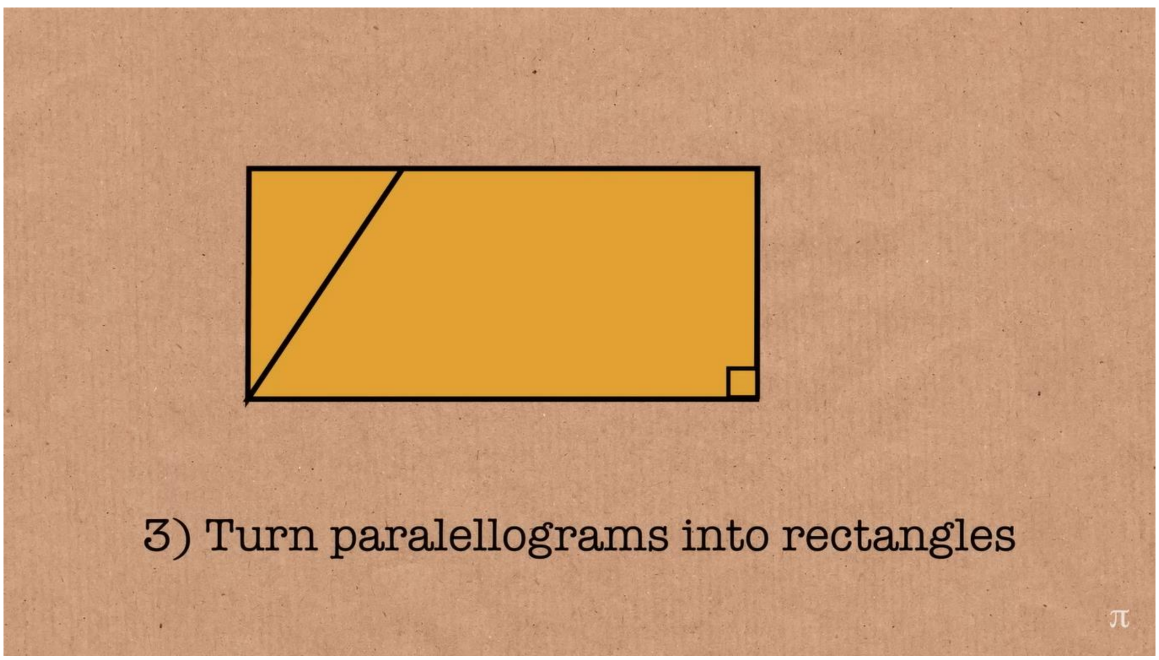
2ο βήμα: Μετατρέπουμε τα τρίγωνα σε παραλληλόγραμμα, ως εξής: Σχεδιάζουμε τους μέσους στις 2 από τις 3 πλευρές του τριγώνου και τους ενώνουμε. Τώρα το τρίγωνο έχει χωριστεί σε ένα μικρότερο τρίγωνο και σε ένα τραπέζιο. Επεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα που προέκυψε από τη μία μόνο πλευρά, δημιουργώντας ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσου μήκους. Τέλος, περιστρέφουμε το μικρό τρίγωνο, ώστε η βάση του (που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τους μέσους) να συμπέσει στην προέκταση (που έχει το ίδιο μήκος).



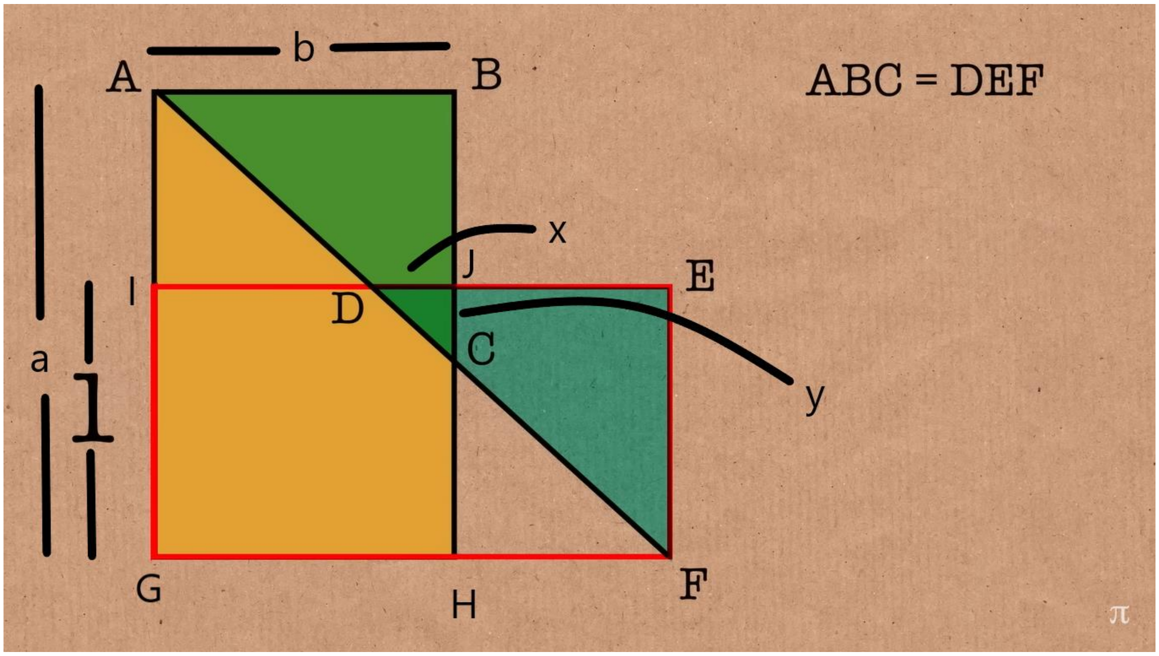


3ο βήμα: Μετατρέπουμε τα παραλληλόγραμμα σε ορθογώνια, ως εξής: Φέρνουμε από μία κορυφή του παραλληλογράμμου, κάθετη στην απέναντι ευθεία (στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου). Μεταφέρουμε το ορθογώνιο τρίγωνο που προέκυψε, ώστε η υποτείνουσά του να συμπέσει με την πλευρά του παραλληλογράμμου που είναι παράλληλή της.





4ο βήμα: Πάνω στη μεγάλη πλευρά κάθε ορθογωνίου GABH σχεδιάζουμε μία νέα πλευρά GI μοναδιαίου μήκους και ένα νέο ορθογώνιο GIEF ίδιου εμβαδού με το αρχικό. Έπειτα, ενώνουμε τις κορυφές AF. Τα τρίγωνα ABC και DEF είναι ίσα, οπότε μεταφέρουμε το πρώτο ,ώστε να συμπέσει πάνω στο δεύτερο. Επίσης, το τρίγωνο ADI είναι ίσο με το CFH, οπότε μεταφέρουμε το πρώτο ,ώστε να συμπέσει πάνω στο δεύτερο. Κι έτσι μετασχηματίσαμε το αρχικό ορθογώνιο σε ένα ορθογώνιο ίσου εμβαδού, αλλά με μία μοναδιαία πλευρά.



$$(GABH) = (GIEF) \Rightarrow GF \cdot 1 = ab \Longrightarrow GF = ab$$

$$B = E = 90°$$
$$ACB = DFE \ (εντός\ εκτός\ κι\ επί\ τ'αυτά\ μέρη\ γωνίες\ ίσες)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή στα τρίγωνα AID, AGF:

$$\frac{AI}{AG} = \frac{ID}{GF} \Longrightarrow \frac{a-1}{a} = \frac{ID}{ab} \Longrightarrow ID = b(a-1)$$

Τότε:

$$x = b - ID \Rightarrow x = 2b - ab \Longrightarrow x = b(2-a)$$

Εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα του Θαλή στα τρίγωνα DJC, DEF:

$$\frac{CJ}{EF} = \frac{DJ}{DE} \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{x}{ab-b+x} \Rightarrow y = \frac{b(2-a)}{ab-b+2b-ab} \Rightarrow y = 2-a$$

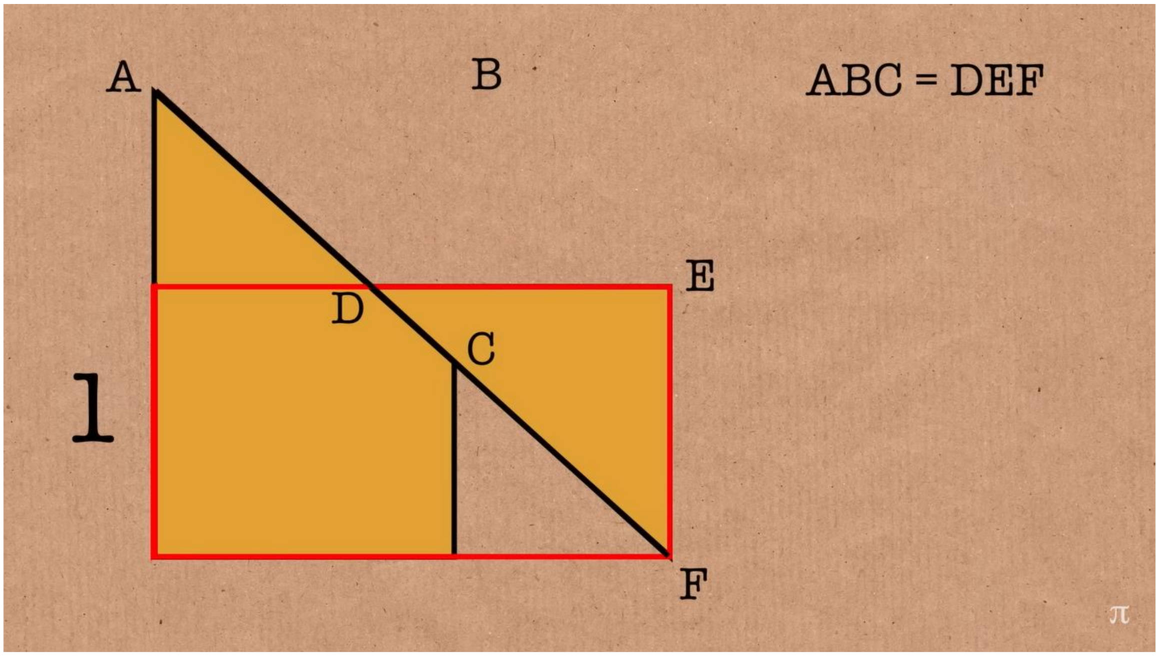
Άρα,

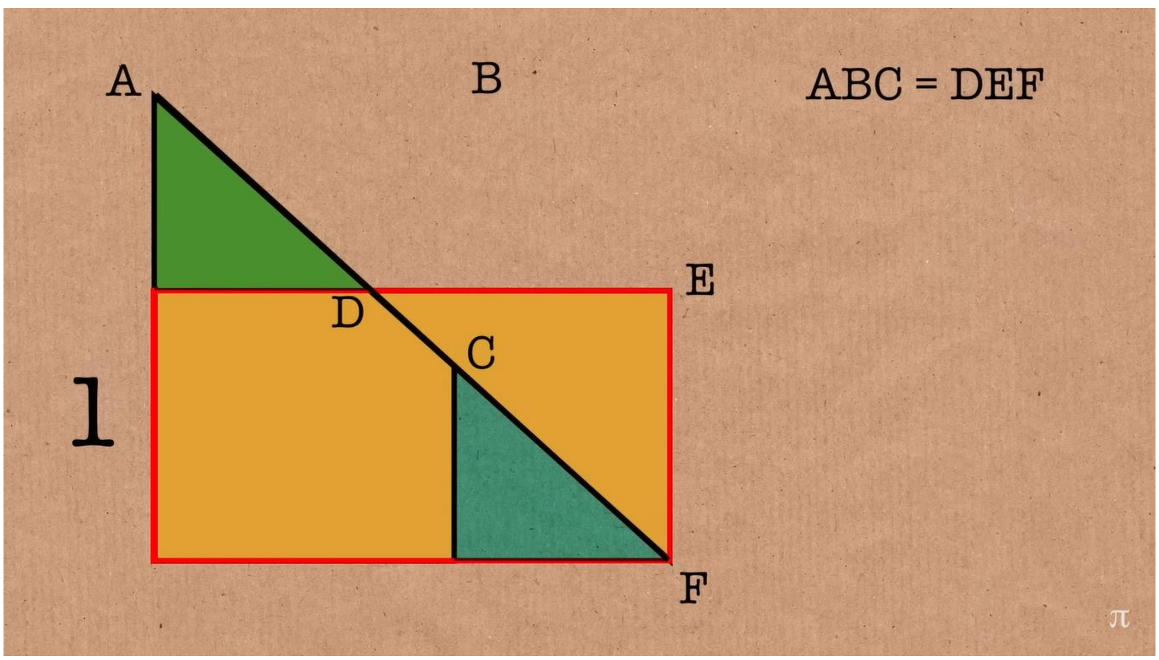
$$BC = BJ + y \Rightarrow BC = (a-1) + (2-a) \Rightarrow BC = 1$$

Άρα,

$$BC = EF = 1$$

$$\Gamma\Pi\Gamma \Rightarrow ABC = DEF$$





$$I = H = 90°$$
$$GAF = HCF \ (\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\kappa\tau\acute{o}\varsigma\ \kappa\iota\ \varepsilon\pi\acute{\iota}\ \tau'\,\alpha\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \mu\acute{\varepsilon}\rho\eta\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Θαλή στα τρίγωνα FCH, FAG:

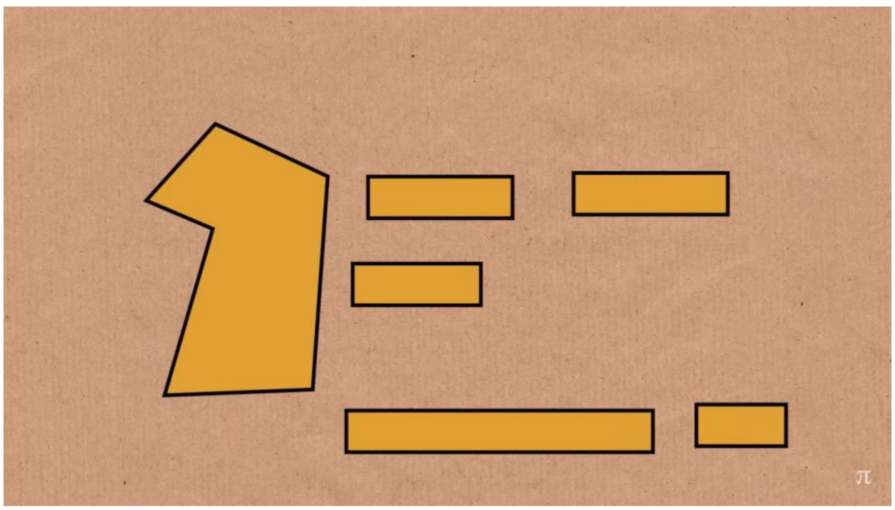
$$\frac{CH}{AG} = \frac{FH}{FG} \Longrightarrow \frac{CH}{a} = \frac{ab-b}{ab} \Longrightarrow CH = a - 1$$

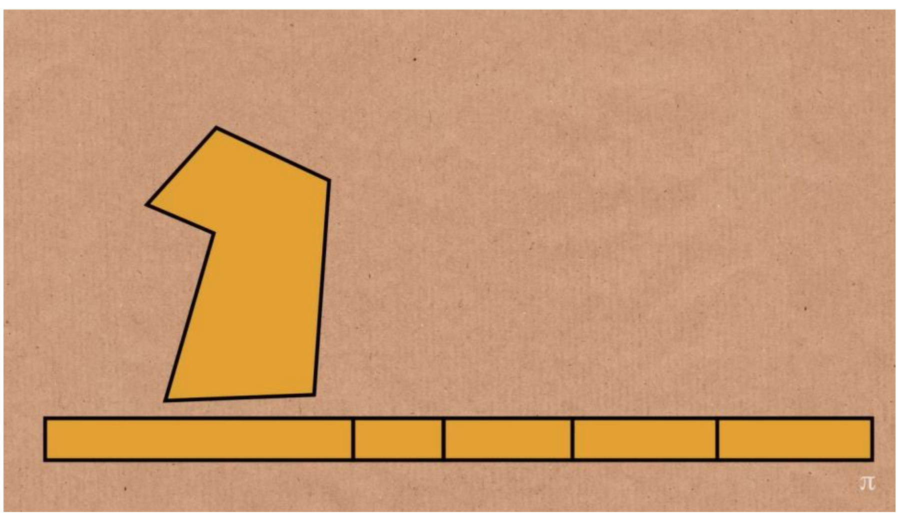
Άρα,

$$CH = AI = a - 1$$

$$ΓΠΓ \Rightarrow ADI = CFH$$

5ο βήμα: Ενώνουμε όλα τα ορθογώνια που προέκυψαν με τέτοιο τρόπο, ώστε να δημιουργήσουμε ένα ορθογώνιο με μήκη πλευρών 1 και το άθροισμα των εμβαδών των αρχικών τριγώνων, δηλαδή το εμβαδόν του αρχικού πολυγώνου.



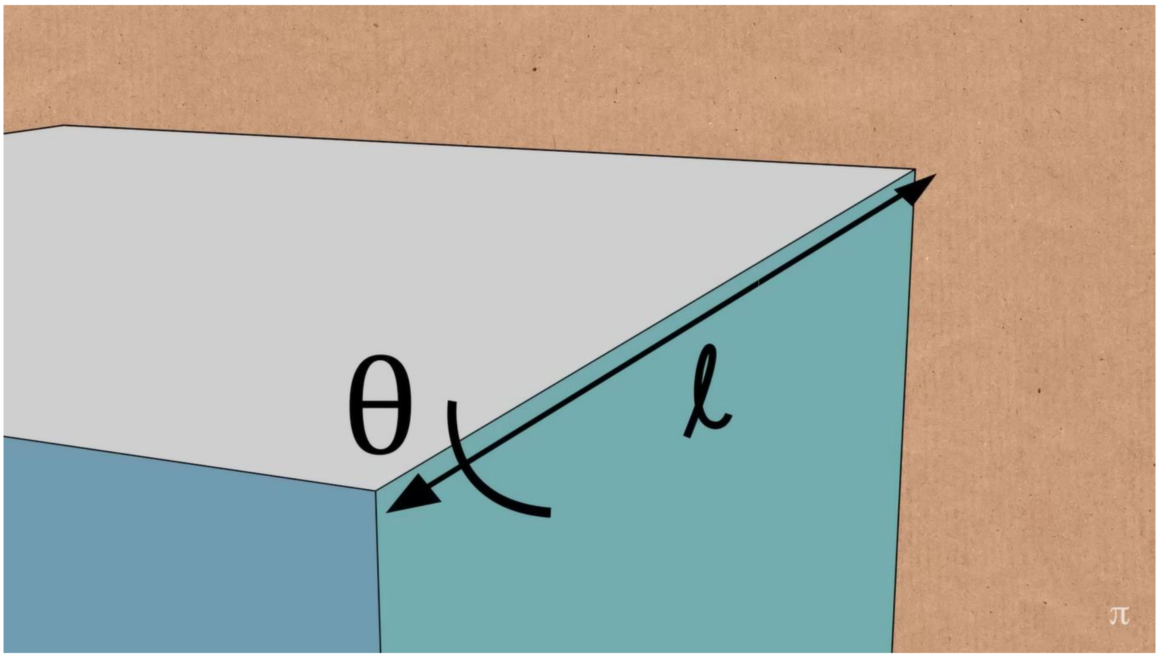


Στις δύο διαστάσεις, λοιπόν, η υπόθεση δύο πολύγωνα να έχουν το ίδιο εμβαδόν οδηγεί στη συμμετρότητα των πολυγώνων αυτών.

2.4 Η αναλλοίωτη του Dehn και η απάντησή του στο 3ο πρόβλημα του Hilbert

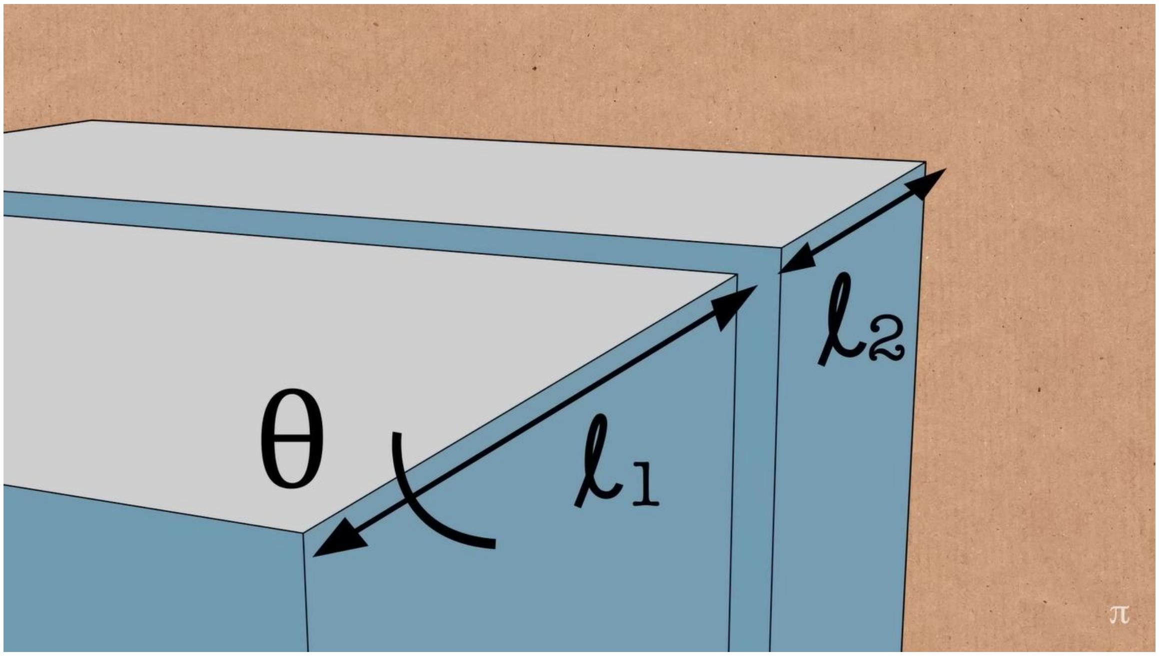
Στις τρεις διαστάσεις, όμως, δεν είναι αρκετή μία αντίστοιχη υπόθεση για τους όγκους των πολυέδρων. Πρέπει τα πολύεδρα να έχουν κοινή και μία άλλη ποσότητα, που καλείται αναλλοίωτη του Dehn.

Η ιδέα του Dehn ήταν η εξής: Έστω μία ακμή ενός πολυέδρου. Παρατηρούμε ότι έχει δύο χαρακτηριστικές ποσότητες: το μήκος της l και τη γωνία $\theta \in [0,2\pi)$ που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο έδρες του πολυέδρου με κοινή τη συγκεκριμένη ακμή (διεδρική γωνία).

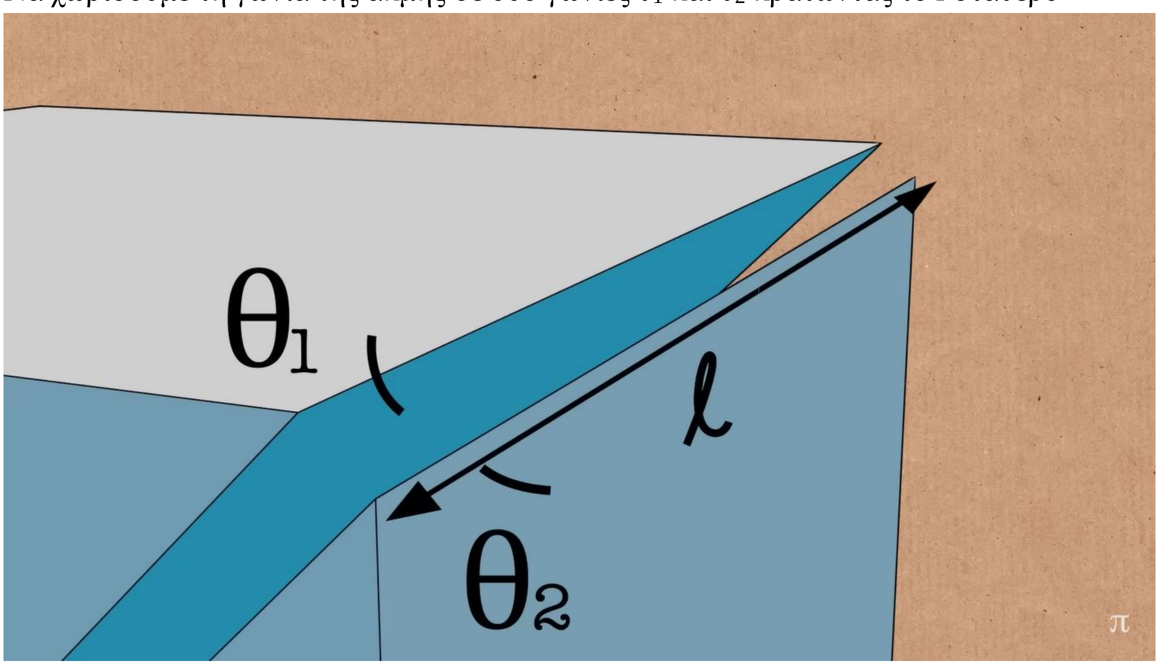


Τότε μπορούμε να κόψουμε το πολύεδρο στη συγκεκριμένη ακμή με δύο τρόπους:

1. Να χωρίσουμε το μήκος l της ακμής σε δύο μήκη l_1 και l_2 κρατώντας τη θ σταθερή



2. Να χωρίσουμε τη γωνία της ακμής σε δύο γωνίες θ_1 και θ_2 κρατώντας το l σταθερό



Παρατηρώντας αυτό ο Dehn σκέφτηκε να ορίσει την ποσότητα:

$$D(P) = \sum_{\alpha\kappa\mu\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau o \upsilon\ P} l_i \otimes \theta_i \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/2\pi$$

για ένα πολύεδρο P, η οποία αποτελεί αναλλοίωτη για το πολύεδρο. Ονομάστηκε <u>αναλλοίωτη του Dehn</u> και απέδειξε ότι δύο πολύεδρα με τον ίδιο όγκο, αλλά διαφορετική αναλλοίωτη του Dehn δεν είναι σύμμετρα.

Το σύμβολο ⊗ καλείται τανυστικό γινόμενο.

Στο χώρο $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/2\pi$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$a \otimes b = a \otimes (b + 2\pi)$$

$$a_1 \otimes b + a_2 \otimes b = (a_1 + a_2) \otimes b$$

$$a \otimes b_1 + a \otimes b_2 = a \otimes (b_1 + b_2)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε έναν κύβο C ακμής 1 (μοναδιαίου όγκου) και ένα τετράεδρο T επίσης μοναδιαίου όγκου. Ο τύπος του όγκου ενός τετραέδρου δίνεται από τον τύπο:

$$vol(T) = \frac{a^3}{6\sqrt{2}},$$

από τον οποίο προκύπτει ότι η ακμή α του συγκεκριμένου τετραέδρου είναι ίση με:

$$\alpha = \sqrt[3]{72},$$

ενώ η διεδρική γωνία είναι ίση με:

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Συνεπώς,

$$D(C) = \sum_{i=1}^{12} 1 \otimes \frac{\pi}{2} = 12 \otimes \frac{\pi}{2}, \varepsilon\nu\acute{\omega}\ D(T) = \sum_{i=1}^{6} a \otimes \theta = 6\alpha \otimes \theta$$

Παρατηρούμε ότι:

$$D(C) \neq D(T).$$

Πηγές

1) Coxeter, H.S.M. *Regular polytopes*. Toronto, 1973
2) Παπασπυροπούλου Α. *Πολύεδρα – Πολύτοπα, διπλωματική εργασία*. Αθήνα, 2010
3) Νικολόπουλος Σ., Γεωργιάδης Λ., Παληός Λ. *Αλγοριθμική Θεωρία Γραφημάτων*. Αθήνα, 2015
4) 3Blue1Brown. *Euler's Formula and Graph Duality* https://www.youtube.com/watch?v=-9OUyo8NFZg
5) Emanuel Lazar. *Polyhedral Graphs and the Platonic Solids*. Philadelphia, 2016
6) Weisstein, Eric W. "Icosian Game." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html
7) *Το δωδεκάεδρο του ταξιδιώτη (the icosian game), οι πύργοι του Ανόι και το Tetris,παιχνίδι και μαθηματικά!!!!!* http://mathhmagic.blogspot.com/2011/05/icosian-game-tetris.html
8) Guglielmetti R., Jacquemet M. *Polyhedra and Commensurability*. 2016
9) *The Dehn Invariant – Numberphile* https://www.youtube.com/watch?v=eYfpSAxGakI