ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Θεώρημα 1 (Τοπική Σύγκλιση). Υποθέτουμε ότι η g είναι ορισμένη στο ανοικτό διάστημα $A := (c, d)$, παραγωγίσιμη σε μια λύση $\bar{x} \in A$ της εξίσωσης $x = g(x)$, και ότι ισχύει

$$\bar{\alpha} := |g'(\bar{x})| < 1.$$

Τότε υπάρχει ένα διάστημα $I := [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \subset A$, $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για κάθε αρχικό $x_0 \in I$, η ακολουθία (x_k) της γενικής επαναληπτικής μεθόδου να περιέχεται στο I και να συγκλίνει στη λύση $\bar{x}$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της παραγώγου, έχουμε

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left| \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| = |g'(\bar{x})| = \bar{\alpha} < 1.$$

Επιλέγοντας ένα α, με $\bar{\alpha} < \alpha < 1$, υπάρχει άρα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$I := [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \subset A \quad \text{(αφού το } A \text{ είναι ανοικτό).}$$

και

$$\left| \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| \le \alpha < 1, \text{ για κάθε } x \in I.$$

Αν $x_0 \in I$, συμπεραίνουμε επαγωγικά ότι, για κάθε k

$$\alpha_k := \left| \frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} \right| = \left| \frac{g(x_k) - g(\bar{x})}{x_k - \bar{x}} \right| \le \alpha < 1 \quad \text{και} \quad x_k \in I.$$

Επομένως

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \le \alpha |x_k - \bar{x}| \le \dots \le \alpha^{k+1} |x_0 - \bar{x}| \to 0.$$

Συνεπώς, $x_k \to \bar{x}$ για κάθε $x_0 \in I$. ■

Από την παραπάνω απόδειξη, προκύπτουν οι ανισότητες

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \le \alpha_k |x_k - \bar{x}| \le \alpha |x_k - \bar{x}|,$$

όπου $\alpha_k \to \bar{\alpha} < 1$, $\alpha_k < \alpha$, και $\alpha \in (\bar{\alpha}, 1)$, που ισχύουν αν το x_0 επιλεγεί αρκετά κοντά στο $\bar{x}$. Αυτό δείχνει ότι, όσο μικρότερο το $\bar{\alpha} = |g'(\bar{x})|$, τόσο ταχύτερη θα είναι σύγκλιση της μεθόδου. Κατά πολύ ταχύτερη θα είναι βέβαια αν $\bar{\alpha} = |g'(\bar{x})| = 0$.

Θεώρημα 2 (Περιορισμένη Σύγκλιση). Υποθέτουμε ότι η g είναι συστολική, με σταθερά $0 < \alpha < 1$, στο κλειστό διάστημα $I = [c, d]$ και ότι $g(I) \subset I$, δηλαδή $g(x) \in I$ για κάθε $x \in I$. Τότε

α) $x_k \in I$ για κάθε k, και αυτό για κάθε αρχικό $x_0 \in I$,

β) Η εξίσωση $x = g(x)$ έχει μία λύση $\bar{x}$ στο I,

γ) Η λύση $\bar{x}$ είναι μοναδική,

δ) Η ακολουθία (x_k) συγκλίνει στο $\bar{x}$, για κάθε αρχικό $x_0 \in I$,

ε) Ισχύουν οι τρεις ακόλουθες εκτιμήσεις σφάλματος:

i) $|x_k - \bar{x}| \le \alpha^k \max(x_0 - c, d - x_0)$,

ii) $|x_k - \bar{x}| \le \dfrac{\alpha}{1 - \alpha} |x_{k-1} - x_k|$,

iii) $\quad |x_k - \bar{x}| \le \dfrac{\alpha^k}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$.

Ειδικά, αν η g είναι συστολική σε ένα διάστημα της μορφής $I = [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$, όπου $\bar{x}$ μία λύση της εξίσωσης $x = g(x)$, τότε $g(I) \subset I$, και άρα ισχύουν τα παραπάνω συμπεράσματα (α)-(ε).

Απόδειξη. α) Προφανές.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής αφού είναι συστολική. Εστω η συνεχής συνάρτηση h(x)=g(x)-x. Επειδή $g(I) \subset I = [c, d]$, έχουμε $g(c) \ge c$ και $g(d) \le d$, δηλαδή $h(c) \ge 0$ και $h(d) \le 0$. Από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει άρα $\bar{x} \in I$ τέτοιο ώστε $h(\bar{x}) = 0$, δηλαδή $\bar{x} = g(\bar{x})$.

γ) Εστω $\bar{x}$ και $\tilde{x}$ δύο ενδεχόμενες λύσεις. Επειδή η g είναι συστολική, έχουμε

$$|\bar{x} - \tilde{x}| = |g(\bar{x}) - g(\tilde{x})| \le \alpha |\bar{x} - \tilde{x}|,$$

όπου $0 < \alpha < 1$, άρα αναγκαστικά $\bar{x} = \tilde{x}$.

δ) Αν $x_0 \in I$, έχουμε $x_k \in I$, για κάθε k, και

$$|x_k - \bar{x}| = |g(x_{k-1}) - g(\bar{x})| \le \alpha |x_{k-1} - \bar{x}| \le \ldots \le \alpha^k |x_0 - \bar{x}| \to 0,$$

άρα $x_k \to \bar{x}$.

ε) (i) Προκύπτει άμεσα από την παραπάνω τελευταία ανισότητα.

(ii) Εχουμε

$$\begin{aligned} |x_{k-1} - \bar{x}| &\le |x_{k-1} - x_k| + |x_k - \bar{x}| \\ &\le |x_{k-1} - x_k| + \alpha |x_{k-1} - \bar{x}|, \end{aligned}$$

άρα

$$|x_{k-1} - \bar{x}| \le \frac{1}{1-\alpha}|x_{k-1} - x_k|.$$

Συνεπώς

$$|x_k - \bar{x}| \le \alpha |x_{k-1} - \bar{x}| \le \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_{k-1} - x_k|.$$

(iii) Προκύπτει άμεσα από την ανισότητα

$$|x_{k-1} - x_k| \le \alpha |x_{k-2} - x_{k-1}| \le \ldots \le \alpha^{k-1} |x_0 - x_1|.$$

Τέλος, αν η g είναι συστολική σε ένα διάστημα $I := [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$, όπου $\bar{x}$ μια λύση της εξίσωσης $x = g(x)$, τότε, για κάθε $x \in I$

$$|g(x) - \bar{x}| = |g(x) - g(\bar{x})| \le \alpha |x - \bar{x}| \le \alpha\delta < \delta,$$

δηλαδή έχουμε $g(I) \subset I$, και άρα ισχύουν τα συμπεράσματα (α)-(ε). ■

Οι εκτιμήσεις σφάλματος (i) και (iii) δεν προϋποθέτουν τον υπολογισμό του x_k. Η δε εκτίμηση (ii) τον προϋποθέτει, αλλά είναι ισχυρότερη των (i) και (iii) (γιατί; βλ. απόδειξη).