ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ NEWTON-RAPHSON

Θεώρημα 1 (Απλή ρίζα). Έστω $\bar{x}$ μια λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

α) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη κοντά στο $\bar{x}$, η f' είναι συνεχής στο $\bar{x}$ και ισχύει $f'(\bar{x}) \neq 0$, τότε, για κάθε αρχικό x_0 επιλεγμένο αρκετά κοντά στο $\bar{x}$, η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει και η σύγκλιση είναι *υπεργραμμική*.

β) Αν, επιπλέον, η f είναι C^3 κοντά στο $\bar{x}$, τότε η σύγκλιση είναι *τετραγωνική*.

Απόδειξη. α) Από τον ορισμό της παραγώγου και αφού $f(\bar{x})=0$, έχουμε

$$g'(\bar{x}) = 1 - \lim_{x\to\bar{x}} \frac{1}{x-\bar{x}}\left[\frac{f(x)}{f'(x)} - 0\right] = 1 - \lim_{x\to\bar{x}} \frac{1}{f'(x)}\left[\frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}\right] = 1 - \frac{f'(\bar{x})}{f'(\bar{x})} = 0.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Τοπικής Σύγκλισης (και τα Σχόλιά του) η μέθοδος συγκλίνει υπεργραμμικά για κάθε x_0 επιλεγμένο αρκετά κοντά στο $\bar{x}$.

β) Από τις υποθέσεις, η συνάρτηση $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ είναι C^2 κοντά στο $\bar{x}$ και η g'' είναι άρα φραγμένη κοντά στο $\bar{x}$. Από τον τύπο Taylor δεύτερης τάξης με υπόλοιπο, έχουμε, αφού $g'(\bar{x})=0$ και $x_k \to \bar{x}$

$$|x_k - \bar{x}| = |g(x_{k-1}) - g(\bar{x})| = \left|\frac{g''(\xi_{k-1})}{2}\right| |x_{k-1}-\bar{x}|^2 \le c|x_{k-1}-\bar{x}|^2,$$

που δείχνει ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Σημειωτέον ότι η υπόθεση $f'(\bar{x}) \neq 0$ του θεωρήματος σημαίνει ότι η ρίζα $\bar{x}$ της f είναι απλή, δηλαδή ότι η f γράφεται

$$f(x) = (x-\bar{x})h(x), \quad \text{με } h(\bar{x}) \neq 0.$$

Όταν η ρίζα $\bar{x}$ είναι πολλαπλότητας $m>1$, η f γράφεται

$$f(x) = (x-\bar{x})^m h(x), \quad \text{με } h(\bar{x}) \neq 0,$$

και ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2 (Πολλαπλή ρίζα). Εστω $\bar{x}$ μια ρίζα της f πολλαπλότητας $m>1$. Υποθέτουμε ότι η h είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη, και ότι η h είναι συνεχής στο $\bar{x}$. Τότε

$$g'(\bar{x}) = 1 - \frac{1}{m} < 1,$$

και η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει γραμμικά για κάθε x_0 αρκετά κοντά στο $\bar{x}$.

Απόδειξη. Θέτοντας $r := \dfrac{f}{f'}$, η r γράφεται κοντά στο $\bar{x}$

$$r(x) = \frac{(x-\bar{x})h(x)}{mh(x) + (x-\bar{x})h'(x)}.$$

Εχουμε $r(\bar{x}) = 0$ και

$$g'(\bar{x}) = 1 - \lim_{x\to\bar{x}} \frac{r(x)-r(\bar{x})}{x-\bar{x}} = 1 - \frac{h(\bar{x})}{mh(\bar{x})} = 1 - \frac{1}{m} < 1,$$

συνεπώς η μέθοδος συγκλίνει γραμμικά.

Στην περίπτωση μιας ρίζας $\bar{x}$ με (άγνωστη βέβαια εκ των πρωτέρων) πολλαπλότητα m, η ακόλουθη **τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson**

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad x_0 \text{ δεδομένο},$$

συγκλίνει υπεργραμμικά, αφού έχουμε εδώ

$$g'(\bar{x}) = 1 - \frac{m}{m} = 0,$$

και με κατάλληλες υποθέσεις ομαλότητας (π.χ. $f \in C^2$ κοντά σε μια ρίζα), τετραγωνικά. Δοκιμάζουμε τότε τη μέθοδο αυτή για διάφορες τιμές του $m = 1, 2, \ldots$ και επιλέγουμε την τιμή με τη ταχύτερη (υπεργραμμική ή τετραγωνική) σύγκλιση, δηλαδή την πολλαπλότητα της ρίζας.

Εκτίμηση Σφάλματος.

Αν η μέθοδος Newton-Raphson (ή η παραλλαγή της) συγκλίνει υπεργραμμικά ή τετραγωνικά, ισχύει εδώ η εκτίμηση σφάλματος (βλ. γενική μέθοδο σταθερού σημείου, Πόρισμα του Θεωρήματος 1)

$$|x_k - \bar{x}| \le |x_{k-1} - x_k|,$$

για x_0 αρκετά κοντά σε μια ρίζα $\bar{x}$. Λόγω της ανισότητας αυτής, χρησιμοποιούμε συνήθως στον αλγόριθμο της μεθόδου το *κριτήριο σταματήματος*

$$|x_{k-1} - x_k| \le \varepsilon,$$

για $\varepsilon > 0$ δεδομένο. Σημειωτέον ότι εδώ τα x_{k-1} και x_k είναι γνωστά.