

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
3^ο εξάμηνο
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - 15/9/2000

1. α) (1) Εστω μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$. Να δειχθεί ότι, κάτω από επαρκείς υποθέσεις που θα δοθούν, η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει αν το αρχικό σημείο x_0 επιλεγεί αρκετά κοντά σε μια ρίζα της f , και ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

β) (2) Εστω η εξίσωση $f(x) = e^x + x - 2 = 0$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση αυτή έχει μια μοναδική ρίζα z στο διάστημα $[0,1]$. Να γίνουν δύο επαναληψεις της μεθόδου Newton-Raphson, με αρχικό $x_0 = 0.75$, για να υπολογιστεί μια προσέγγιση της ρίζας z . Τέλος, να δοθεί μια εκτίμηση του σφαλματος στη δεύτερη επαναληψη.

2. (1.5) Να περιγραφεί (ή καλύτερα, να δοθεί ο αντιστοιχος αλγοριθμος) η μέθοδος απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση κατά στήλη και με αποθήκευση των πολλαπλασιαστών.

3. α) (1.5) Να δειχθεί ότι, για ισαπεχόντα σημεία $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, ισχύει η ανισότητα

$$\left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq n! h^{n+1} / 4 \quad (\text{δειξτε πρώτα ότι η συνάρτηση } \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \text{ παίρνει τη}$$

μεγιστή τιμή στα δύο διαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_{n-1}, x_n]$). Συμπερανετε μια εκτίμηση του μεγιστου (σε απόλυτη τιμή) σφαλματος παρεμβολής Lagrange.

β) (1) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εκτίμηση, να δοθεί μια εκτίμηση του μεγιστου σφαλματος παρεμβολής Lagrange της συνάρτησης $f(x) = \cos x$ στα σημεία $0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$.

4. α) (1) Να κατασκευαστεί ο συνθετος τυπος ολοκληρωσης Simpson, βάσει του απλου τυπου με ορο σφαλματος, και να δοθεί μια αντιστοιχη εκτίμηση του σφαλματος ολοκληρωσης.

β) (1) Να υπολογιστεί μια προσέγγιση του ολοκληρωματος της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ στο διάστημα $[1,2]$ με τη συνθετη μέθοδο Simpson, με βήμα $h = 0.25$, καθώς και μια εκτίμηση του σφαλματος ολοκληρωσης.

5. (1) Να υπολογιστεί, με τη μέθοδο Taylor δεύτερης τάξης, μια προσέγγιση της λύσης y της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \frac{1}{1+x+2y}, \quad y(0) = 1.$$

στο σημείο $x_2 = 0.02$, με βήμα $h = 0.01$.

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία!