

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
17/2/2003

1. Για να υπολογίσουμε μια προσέγγιση του αριθμού $\bar{x} = \ln 3$ θεωρούμε την εξίσωση

$$f(x) = e^x - 3 = 0$$

(α) Υπολογίστε τις τρεις πρώτες προσεγγίσεις του \bar{x} που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης για την αριθμητική επίλυση της $f(x) = 0$ με αρχικό διάστημα $[0, 2]$.

Πόσο το πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση από το \bar{x} ; [1]

(β) Δείξτε ότι η ακολουθία $x_{k+1} = x_k - 0.1(e^{x_k} - 3)$, $k = 0, 1, \dots$ συγκλίνει στο \bar{x} για

κάθε $x_0 \in [0, 2]$ και ότι αν $\varepsilon_k = x_k - \bar{x}$, τότε $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \rightarrow 0.7$, $k \rightarrow \infty$. [1.5]

(γ) Με $x_0 = 0$ να γίνει μια επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson για την επίλυση της $f(x) = e^x - 3 = 0$. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου δείξτε ότι $x_k \rightarrow \bar{x}$, $k \rightarrow \infty$. [1]

2. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 20 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 5 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -16 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Να ελεγχθεί πρώτα αν η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει και αν συγκλίνει, να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Gauss-Seidel, με μηδενικό αρχικό διάνυσμα. Να δοθεί επίσης μια εκτίμηση του σφάλματος, στη δεύτερη επανάληψη, που να μη χρησιμοποιεί τον πίνακα επαναλήψεων της Gauss-Seidel. [1.5]

3. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Lagrange και Newton της συνάρτησης $f(x) = x \sin x$ στα σημεία $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$. Να βρεθεί επίσης μια εκτίμηση του μεγίστου σφάλματος παρεμβολής στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. [2.5]

4. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά με το σύνθετο τύπο Simpson ($N = 4$) το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{dx}{x+4}$. Από τον όρο σφάλματος του απλού τύπου Simpson

$E = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)$ να υπολογισθεί ένα φράγμα για το σφάλμα του αντίστοιχου σύνθετου τύπου και στη συνέχεια να βρεθεί το ελάχιστο N , ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης του I με το σύνθετο τύπο Simpson να είναι μικρότερο από 10^{-7} . [2.5]

Διάρκεια: 2.5 ώρες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ