

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ - 3ο ΕΞΑΜΗΝΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ - ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - 18/9/98

1. (2 μοναδες) Εστω $x_k = Cx_{k-1} + d$ η γενικη επαναληπτικη μεθοδος επιλυσης ενος γραμμικου συστηματος $x = Cx + d$, $n \times n$. Να δειχθει οτι αν $\|C\| < 1$, για μια φυσικη νορμα πινακα, τοτε

α) Το συστημα $x = Cx + d$, ή ισοδυναμα το συστημα $x = Cx$, ειναι ομαλο [Χρησιμοποιειστε τις νορμες].

β) Ισχυει η εκτιμηση σφαλματος

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \|x_k - x_{k-1}\| \|C\| / (1 - \|C\|)$$

οπου \bar{x} η λυση του συστηματος $x = Cx + d$.

2. (1.5 μοναδες) Να βρεθει μια οσο το δυνατο καλυτερη εκτιμηση του μεγιστου σε απολυτη τιμη σφαλματος παρεμβολης Lagrange της συναρτησης $f(x) = \ln(x+1)$ στο διαστημα $[1, 2]$ με σημεια παρεμβολης 1, 1.5, 2.

3. (2 μοναδες) α) Να δειχθει οτι οι τυποι αριθμητικης ολοκληρωσης Simpson και των 3/8 ειναι ακριβεις για τα πολυωνυμα του Π_3 (βαθμου ≤ 3).

β) Να δοθει μια (καλη) εκτιμηση του σφαλματος αριθμητικης ολοκληρωσης με τη συνθετη μεθοδο Simpson, με βημα $h=0.1$, για το ολοκληρωμα

$$\int_0^1 \ln(x+1) dx.$$

4. (3 μοναδες) Δινεται η εξισωση $x = g(x) = (-\cos x)/2$.

α) Να δειχθει οτι η εξισωση αυτη εχει μια μοναδικη λυση στο \mathbb{R} .

β) Να δειχθει οτι $g(x) \in [-1, 1]$ για $x \in [-1, 1]$, και οτι η g ειναι συστολικη στο διαστημα $[-1, 1]$.

γ) Να δειχθει οτι η επαναληπτικη μεθοδος $x_k = g(x_{k-1})$ συγκλινει για καθε αρχικο $x_0 \in \mathbb{R}$.

δ) Να γινουν πεντε επαναληψεις της μεθοδου, με $x_0 = -1$, και να δοθει μια (καλη) εκτιμηση του σφαλματος στην πεμπτη επαναληψη.

5. (1.5 μοναδες) Χρησιμοποιωντας τη μεθοδο των ελαχιστων τετραγωνων, για δεδομενα $n > 4$, σημεια x_1, \dots, x_n διαφορετικα μεταξυ τους, και τιμες y_1, \dots, y_n , να βρεθει το πολυωνυμο $\bar{p} \in \Pi_3$ που ελαχιστοποιει το αθροισμα $\sum_1^n [p(x_i) - y_i]^2$ ως προς $p \in \Pi_3$ (Να γραφει απλως το γραμμικο συστημα που προκυπτει). Ποιο ειναι το πολυωνυμο \bar{p} στην περιπτωση $n=4$;

Διαρκεια εξετασης: 2.5 ωρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!