

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

12/9/2003

1) Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- i) Να γραφούν οι επαναληπτικές εξισώσεις της μεθόδου Jacobi και να ελεγχθεί η σύγκλιση της μεθόδου.
ii) Να αποδειχθεί η γενική εκτίμηση σφάλματος

$$\|x_k - x\| \leq \|C\|^k \|x_0 - x\|.$$

- iii) Να βρεθεί το πλήθος των απαιτούμενων επαναλήψεων της μεθόδου Jacobi στο σύστημα (1) έτσι ώστε

$$\|x_k - x\|_2 \leq 10^{-3} \|x_0 - x\|_2. \quad \text{Μονάδες [3]}$$

- 2) i) Να δοθεί ο ορισμός του τοπικού σφάλματος αποκοπής μιας μονοβηματικής μεθόδου για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών.
ii) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Να εφαρμοστεί η μέθοδος Taylor 2^{ης} τάξης με βήμα $h = 0.1$ για να βρεθεί μια προσέγγιση της λύσης y στο σημείο $x = 0.2$.
Μονάδες [2,5]

- 3) Για την εύρεση της θετικής ρίζας της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 2$ θεωρούμε τις εξής δύο γενικές επαναληπτικές μεθόδους

$$x_{k+1} = x_k^2 - 2 \quad \text{και} \quad x_{k+1} = 1 + \frac{2}{x_k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

- i) Να ελεγχθεί η σύγκλιση των παραπάνω μεθόδων γραφικά κάνοντας 3 επαναλήψεις με $x_0 = 3$.
ii) Να ελεγχθεί η σύγκλιση των παραπάνω μεθόδων για x_0 κοντά στη ρίζα $\bar{x} = 2$ χρησιμοποιώντας κατάλληλο θεώρημα.
Μονάδες [2,5]

4) i) Δίνονται τα δεδομένα

x_i	1.0	1.5	2.0	2.5
$y_i = f(x_i)$	0.0	1.25	3.0	5.25

Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής, στη μορφή Newton, που διέρχεται από τα σημεία αυτά και στη συνέχεια υπολογίστε μια προσέγγιση της τιμής $f(1.2)$.

- ii) Χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα του ανωτέρω πίνακα, υπολογίστε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος $I = \int_1^{2.5} f(x) dx$, εφαρμόζοντας κατάλληλο σύνθετο τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Μονάδες [2]

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες