

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
3^ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1998

1. Εστω ένα ομαλό γραμμικό σύστημα $Ax = b$ και το ελαφρά διαταραγμένο σύστημα $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$.

Ναδειχθεί ότι αν $1 - \mu \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} > 0$, τότε ισχύει η ανισότητα σχετικών σφαλμάτων

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu}{1 - \mu \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right),$$

όπου μ ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A .

2. α) Ναδειχθεί ότι για μια πολυωνυμική συνάρτηση f , βαθμού n , το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange p_n της f ταυτίζεται με την f .

β) Ναβρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange σε μορφή Newton για τα σημεία $-1, 0, 1, 2$ και τις αντίστοιχες τιμές $-1, 0, 1/3, 1/2$. Στη συνέχεια ναγραφεί το πολυώνυμο σε μία αλγοριθμική μορφή τέτοια ώστε ναελαχιστοποιούνται οι πράξεις υπολογισμού του, με χρήση ενός σχήματος τύπου Horner.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1/(1+x)$. Ναβρεθεί μια όσο το δυνατό καλύτερη εκτίμηση του μέγιστου κατ' απόλυτη τιμή σφάλματος παρεμβολής Lagrange στο διάστημα $[2, 5]$, με σημεία παρεμβολής $2, 3, 4, 5$.

3. Δίνονται οι μη γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ (x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0 \\ x + 2y + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Να γίνει μία επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson για συστήματα, με αρχικό διάνυσμα $(0, 0, 1)$, αποφεύγοντας την αντιστροφή πίνακα και χρησιμοποιώντας την μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση κατά στήλη για ναλυθεί το κατάλληλο γραμμικό σύστημα.

4. α) Ναεφαρμοστεί η μέθοδος των δυνάμεων (3 επαναλήψεις) για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης της μεγαλύτερης ιδιοτιμής σε απόλυτη τιμή λ_1 και ενός αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος u_1 , με $\|u_1\|_2 = 1$, του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

με αρχικό διάνυσμα $(1, -2, 3)$.

β) Ναγραφεί η έκφραση του νέου πίνακα για τον υπολογισμό της δεύτερης ιδιοτιμής.

Θέμα	1	2	3	4
Μονάδες	2	3	2,5	2,5