

**ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**3<sup>ο</sup> εξάμηνο**  
**ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 19/07/07**

1. Δίνεται η εξίσωση  $e^x = 3x + 1$ . (1)  
α) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση  $\rho$  στο διάστημα  $[\ln 3, 3]$ .  
β) Να εξετάσετε αν είναι εξασφαλισμένη η σύγκλιση των γενικών επαναληπτικών μεθόδων  $x_{k+1} = \frac{e^{x_k} - 1}{3}$  και  $x_{k+1} = \ln(1 + 3x_k)$  στη λύση  $\rho$  της (1) για κάθε  $x_0 \in [\ln 3, 3]$  και στην περίπτωση σύγκλισης να βρεθεί η ταχύτητα σύγκλισης.  
γ) Να γίνουν 2 επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson για την προσέγγιση της λύσης  $\rho$  της (1) με κατάλληλα επιλεγμένη αρχική τιμή.

2. Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$  όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί η επαναληπτική μέθοδος Jacobi και αν ναι να γίνουν 3 επαναλήψεις με αρχικό διάνυσμα  $(0.5, 0.5, 1)$  και να εκτιμηθεί το σφάλμα της 3<sup>ης</sup> επανάληψης χρησιμοποιώντας κατάλληλη διανυσματική νόρμα της επιλογής σας και την αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα.

3. Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y''' + 4y' = x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί με τη μέθοδο Euler με βήμα 0.2 μια προσέγγιση της λύσης  $y$  στο σημείο 0.6. Ποιο το ολικό σφάλμα στο σημείο 0.6; (Δίνεται η ακριβής λύση  $y(x) = \frac{3}{16}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{8}x^2$ )

4. α) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού  $\leq 3$  σε μορφή Newton με διαιρεμένες διαφορές που παρεμβάλλει την  $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$  στα σημεία 0,1,2,3. Ποιο το μέγιστο σφάλμα στο σημείο 0.5;  
β) Έστω  $f(x) = x^6 - 3x^5 + 7x^4 - ax^3 + 2x^2 + x - b$  και  $p_5 \in \Pi_5$  το πολυώνυμο που παρεμβάλλει την  $f$  στα σημεία 0,1,2,3,4,5. Να βρεθεί ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του  $p_5$ .

**Παρατηρήσεις**

1. Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες
2. Βαθμολογία: Τα θέματα είναι ισοδύναμα.