

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
3^ο εξάμηνο
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 10/10/07

Θέμα 1: α) Να βρεθεί η ασθενής μορφή του προβλήματος

$$\begin{cases} -u'' + 2xu = x, & \text{στο } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

β) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -0.25, \quad y''(0) = -1.5 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί με τη μέθοδο Euler με βήμα 0.1 μια προσέγγιση της λύσης y στο σημείο 0.3.

Θέμα 2: Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Να εξετάσετε αν μπορεί να εφαρμοστεί η επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel και αν ναι να γίνουν 3 επαναλήψεις με αρχικό διάνυσμα $(0,0,0)$ και να εκτιμηθεί το σφάλμα της 3^{ης} επανάληψης χρησιμοποιώντας κατάλληλη διανυσματική νόρμα της επιλογής σας και την αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα.

Θέμα 3: Παρεμβάλλουμε μια συνάρτηση f στα σημεία

$x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 3$ με πολυώνυμο παρεμβολής Newton. Το πολυώνυμο παρεμβολής χρησιμοποιώντας τα σημεία $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ είναι το εξής:

$$p_3(x) = 4 - 2(x+2) + \frac{1}{2}(x+2)(x+1) + \frac{1}{6}(x+2)(x+1)x.$$

α) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής p_5 το πολύ 5^{ου} βαθμού χρησιμοποιώντας όλα τα σημεία, αν $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = f[x_2, x_3, x_4, x_5] = -\frac{1}{3}$.

β) Αν το $f(2)$ αλλάξει κατά +1 και το $f(3)$ κατά -3 πόσο θα αλλάξει η προσεγγιστική τιμή της $f(2.5)$;

Θέμα 4: Να γραφεί ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Newton-Raphson για την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = a - \frac{1}{x} = 0, a > 0$.

α) Δείξτε ότι για $x_0 = 10/a$ η μέθοδος Newton-Raphson δε συγκλίνει στη ρίζα $1/a$ της εξίσωσης.

β) Αν $e_k = x_k - 1/a$, δείξτε ότι $ae_{k+1} = -(ae_k)^2$ και να βρεθεί με τη βοήθεια του ορισμού η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου.

γ) Να εκφράσετε το ae_k συναρτήσει του ae_0 και να αποδείξετε ότι η ακολουθία (x_k)

συγκλίνει στο $\frac{1}{a}$ όταν το x_0 επιλεγεί έτσι ώστε $0 < x_0 < 2/a$.

Παρατηρήσεις

1. Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες

2. Βαθμολογία: Τα θέματα είναι ισοδύναμα.