ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
1-03-2004

1. Να γίνει μια επανάληψη της μεθόδου Newton-Raphson για συστήματα, για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x^2 + y^2 - z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

με αρχικό διάνυσμα $\left(-1,1,1\right)$. Να αποφύγετε τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα λύνοντας κατάλληλο γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss και με μερική οδήγηση κατά στήλη.

2. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$

- **a.** Αν $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon \neq 1$ να υπολογισθεί ο δείκτης κατάστασης με τη νόρμα $\|\cdot\|_2$. Τι συμβαίνει αν το ε είναι κοντά στο 1.
- **b.** Να δειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος Jacobi για γραμμικά συστήματα με πίνακα A συγκλίνει αν και μόνο αν $|\varepsilon| < 1$.

3. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange της συνάρτησης $f(x) = x\log_2 x$ στα σημεία 1,2,4,8. Να βρεθεί επίσης μια εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής στο σημείο 3.

4. Έστω το πρόβλημα των αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = 2x, \;\; x \in [0,1], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Έστω $(x_k)_{k=0}^n$, $n+1$ ισαπέχοντα σημεία του $[0,1]$ με $x_k = kh,\ h = \frac{1}{n}$, και $y_k,\ k = 0,1,\ldots,n$ οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος Euler. Να δειχθεί ότι

$$y_k = h^2 k(k-1),\ \ k = 0,1,\ldots,n$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί το ολικό σφάλμα στο σημείο 1 σαν συνάρτηση του h.

Υπενθύμιση: $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$.

5. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x = g(x)$, όπου $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ έχει μοναδική λύση $\overline{x}$ στο $[0,1]$ και ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = g(x_k)$, συγκλίνει στη $\overline{x}$, $\forall x_0 \in [0,1]$. Να γίνουν γραφικά 3 επαναλήψεις με $x_0 = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- **Τα θέματα είναι ισοδύναμα**
- **Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ