ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - 18/2/2002 - Διάρκεια: 2.5 ώρες

1. [1.5] Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 2 & 10 & 3 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -13 \\ -19 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Να ελεγχθεί πρώτα αν η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει και αν συγκλίνει, να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Gauss-Seidel, με μηδενικό αρχικό διάνυσμα. Να δοθεί επίσης μια εκτίμηση του σφάλματος, στη δεύτερη επανάληψη, που να μη χρησιμοποιεί τον πίνακα επαναλήψεων της Gauss-Seidel.

2. [1] Να λυθεί, με όσο το δυνατό λιγότερες πράξεις, το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

3. [1.5] Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x - k\cos x = 0,\ \ 0 < k < 1$, έχει μοναδική λύση $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα I, που περιέχει το $\bar{x}$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x_0 \in I$ η επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = k\cos x_n,\ n = 0,1,...$ να συγκλίνει στο $\bar{x}$.

4. [1] Για την εύρεση της θετικής λύσης της εξίσωσης $x^2 - 3 = 0$ θεωρούμε τη γενική επαναληπτική μέθοδο $x_{n+1} = x_n + c(x_n^2 - 3)$. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c ώστε η μέθοδος να είναι τετραγωνική για x_0 αρκετά κοντά στη λύση της εξίσωσης.

5. [2] Να υπολογιστεί προσεγγιστικά με το σύνθετο τύπο Simpson ($N = 4$) το ολοκλήρωμα $\int_1^3 \frac{1}{(1+x)^2}dx$. Να βρεθεί το ελάχιστο N, ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης με το σύνθετο τύπο Simpson να είναι μικρότερο από $5 \cdot 10^{-6}$. [Υπενθυμίζεται ο όρος σφάλματος του απλού τύπου Simpson $E = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)$].

6. [1.5] Να κατασκευάσετε, χωρίς την επίλυση γραμμικού συστήματος, πολυώνυμο $p(x)$, βαθμού το πολύ 3, που ικανοποιεί τις συνθήκες παρεμβολής $p(\pm 2) = 5.5, p(\pm 1) = -0.5$. Ποιός ο βαθμός του πολυωνύμου; Να σχολιάσετε την απάντησή σας σε σχέση με το πλήθος των σημείων παρεμβολής.

7. [1.5] Δίνεται η διαφορική εξίσωση $y'(x) = x^2 \sin y(x),\quad y(1) = 2$. Να εφαρμοστεί η μέθοδος Taylor τάξης 2 με βήμα $h = 0.02$ για να βρεθεί μια προσέγγιση της λύσης y στο σημείο $x_1 = 1.02$.