ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2002

1) i) Εστω ένα ομαλό γραμμικό σύστημα $Ax = b$ και το ελαφρά διαταραγμένο σύστημα $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$. Να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα σχετικών σφαλμάτων

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \mu \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

όπου μ ο δείκτης κατάστασης του πίνακα Α.

ii) Να υπολογισθούν με την μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση κατά στήλη, ο αντίστροφος και η ορίζουσα του πίνακα (με ακριβείς πράξεις)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 10 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2) i) Να αποδειχθεί ότι: $\sum_{i=0}^{n} l_i(0) x_i^m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$, όπου $l_i(x)$ τα πολυώνυμα Lagrange στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

ii) Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής $p(x)$ σε μορφή Newton της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ στα σημεία: 0, 1, 2.

Να βρεθεί μια σταθερά c όσο το δυνατό μικρότερη, τέτοια ώστε $\left| f(x) - p(x) \right| \le c, \text{ για } 0 \le x \le 2.$

3) Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - e^x = 0$ (1).

i) Να δειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = \sqrt{\dfrac{e^{x_k}}{3}}$ συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $\bar{x}$ της (1) στο διάστημα $[0,2]$ για κάθε $x_0 \in [0,2]$.

ii) Να γίνουν 4 επαναλήψεις της παραπάνω μεθόδου με $x_0 = 1$ και να δοθεί μια όσο το δυνατόν καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος στην τέταρτη επανάληψη.

4) ι) Να κατασκευασθεί ο σύνθετος τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης τραπεζίου με όρο σφάλματος. (Δίνεται ο όρος σφάλματος του απλού τύπου τραπεζίου $E(T) = -\dfrac{h^3}{12} f''(\mu)$).

ιι) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$ με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-2}$ χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο τραπεζίου.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Παρατηρήσεις: Διάρκεια εξέτασης 2.5 ώρες.

Βαθμολογία: **1.** 3 μον. / **2.** 2.5 μον. / **3.** 2 μον. / **4.** 2.5 μον.