ΘΕΜΑ 1.:

Ο A έχει αυστηρή διαγώνια υπεροχή άρα η μέθοδος G-S συγκλίνει 0.3

Θεωρούμε $A = Q - P$ με $Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 1/20 & 1/8 & 0 \\ -1/100 & 1/40 & 1/5 \end{bmatrix}$, $C = Q^{-1}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & -11/40 \\ 0 & 0 & 1/200 \end{bmatrix}$, $d = Q^{-1}b = \begin{bmatrix} 13/10 \\ 51/40 \\ 159/200 \end{bmatrix}$

$$Ax = b \Rightarrow (Q-P)x = b \Rightarrow Qx = Px + b \Rightarrow x = (Q^{-1}P)x + Q^{-1}b$$
$$\Rightarrow x^{(k+1)} = (Q^{-1}P)x^{(k)} + Q^{-1}b \Rightarrow x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$$

Αντί να κάνουμε τις παραπάνω πράξεις πινάκων συνιστούμε να κατασκευαστούν απευθείας οι επαναληπτικές εξισώσεις όπως γίνεται και στην μέθοδο Jacobi με κατάλληλη όμως προσαρμογή των δεικτών επανάληψης.

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(\qquad -3x_3^{(k)} + 13\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left(4x_1^{(k+1)} \qquad - x_3^{(k)} + 5\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(-x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} \qquad + 4\right)$$
0.7

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	1.3	1.275	0.795
2	1.0615	1.056375	0.798975

0.5

$$\|\bar{x}-x^{(2)}\|_\infty \le \frac{\|C_J\|_\infty}{1-\|C_J\|_\infty}\|x^{(2)}-x^{(1)}\|_\infty$$

$$C_{Jacobi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/10 \\ 4/8 & 0 & -1/8 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|C_J\|_\infty = \max\left\{\frac{3}{10}, \frac{5}{8}, \frac{2}{5}\right\} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$\|x^{(2)}-x^{(1)}\|_\infty = \max\{|1.0615-1.3|, |1.056375-1.275|, |0.798975-0.795|\}$$

$$= \max\{0.2385, 0.218625, 0.003875\} = 0.2385$$

Χρησιμοποιώντας την νόρμα του πίνακα C_J αντί του πίνακα C_{G-S} προκύπτει το φράγμα για το σφάλμα

$$\frac{\|C_J\|_\infty}{1-\|C_J\|_\infty}\|x^{(2)}-x^{(1)}\|_\infty = \frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{5}{8}} \cdot 0.2385 =$$

$$= \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{8}} 0.2385 = \frac{5}{3} \cdot 0.2385 = \boxed{0.3975}$$

ή αν χρησιμοποιηθεί ο λιγότερο καλός τύπος

$$\frac{\|C_J\|_\infty^2}{1-\|C_J\|_\infty}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^2}{1-\frac{5}{8}} \cdot 1.3 = \boxed{1.35417}$$

ΘΕΜΑ 2: α) Θεωρία

Έστω $f \in C^4[a,b]$ και $\{x_i\}_{i=0}^{N}$, $N=2M$ (άρτιος) μια ακολουθία από $N+1$ ισαπέχοντα σημεία του $[a,b]$ με $x_0=a$, $x_N=b$ και $h=x_{i+1}-x_i$.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{M} \frac{h}{3}\left(f_{2k-2}+4f_{2k-1}+f_{2k}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+\dots+4f_{N-1}+f_N\right)$$

0.5

Για τον όρο σφάλματος έχουμε

$$E(f) = -\sum_{k=1}^{M} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu_k), \text{ όπου } \mu_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}]$$

$k=1,\dots,M$

Το φράγμα για το σφάλμα (δεν ζητείται αλλά το χρειάζομαι για το (β) ερώτημα) είναι:

$$|E(f)| \le \frac{h^5}{90} M \|f^{(4)}\|_\infty = \frac{h^4}{180}(b-a)\|f^{(4)}\|_\infty$$

αφού $h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2M}$

0.5

β) Το φράγμα για το σφάλμα είναι $\frac{h^4}{180}(b-a)\|f^{(4)}\|_\infty$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = +\frac{2}{x^3}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ και $\|f^{(4)}\|_\infty = \max_{1\le x\le 2}\left|-\frac{6}{x^4}\right| = 6$

Απαιτώ $\frac{h^4}{180}(2-1)\cdot 6 \leq 10^{-3} \Rightarrow \frac{h^4}{30} \leq 10^{-3}$

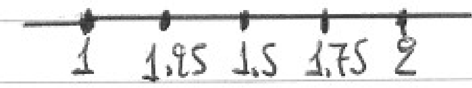
οπότε $h^4 \leq 0.03 \Rightarrow h \leq \sqrt[4]{0.03} = 0.41618$

και για να έχω άρτιο πλήθος διαστημάτων στο $[1,2]$ επιλέγω $h=0.25$ που δίνει $n=4$ διαστήματα.

ή με διαφορετικό τρόπο αντικαθιστώ το h και έχω

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)^4 \leq 0.03 \Rightarrow \frac{1}{n^4} \leq 0.03 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt[4]{0.03}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 2.4 \Rightarrow n=4$$ (το μικρότερο δεκτό άρτιο n) 1



$$I = \int_1^2 \ln x \, dx \simeq \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right)$$

$$= \frac{0.25}{3}\left(\ln 1 + 4\ln 1.25 + 2\ln 1.5 + 4\ln 1.75 + \ln 2\right)$$

$$= 0.08\overline{3} \cdot 4.635114754$$

$$= 0.386259562$$ 0.5

ΘΕΜΑ 3:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in [1,3] \end{cases}$$

a)

x_i	0	1	2	3
f_i	1	0	0	0

i) Μορφή Lagrange

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \ell_i(x) f(x_i) =$$

$$= \ell_0(x) \underbrace{f(x_0)}_{=1} + \ell_1(x) \underbrace{f(x_1)}_{=0} + \ell_2(x) \underbrace{f(x_2)}_{=0} + \ell_3(x) \underbrace{f(x_3)}_{=0}$$

$$= \ell_0(x)$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) =$$

$$= -\frac{1}{6}(x^2-3x+2)(x-3) = -\frac{1}{6}(x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6)$$

$$= -\frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)$$

0.6

ii) Μορφή Newton

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$
0	1			
		$\frac{0-1}{1-0} = -1$		
1	0		$\frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$	
		$\frac{0-0}{2-1} = 0$		$\frac{0-\frac{1}{2}}{3-0} = -\frac{1}{6}$
2	0		$\frac{0-0}{3-1} = 0$	
		$\frac{0-0}{3-2} = 0$		
3	0			

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= 1 - 1(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-1) - \frac{1}{6}(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2}(x^2-x) - \frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$$

$$= 1 - \frac{11}{6}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

Φυσικά το πολυώνυμο στη μορφή Newton συμπίπτει με αυτό της μορφής Lagrange αφού σύμφωνα με το Θεώρημα Παρεμβολής το πολυώνυμο παρεμβολής για τα δεδομένα σημεία της διαμέρισης είναι μοναδικό. 0.6

β) ΠΡΟΣΟΧΗ το θεώρημα σφάλματος Lagrange

$$|f(x)-P_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(x) \prod_{i=0}^{3}(x-x_i)}{4!} \right|$$ ΔΕΝ εφαρμόζεται

γιατί η f δεν ανήκει στο $C^4([0,3])$ όπως απαιτείται από το θεώρημα. 0.6

Στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε:

$$\max_{0\le x\le 1} |f(x)-P_3(x)| = \max_{0\le x\le 1} \left|1 - x + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1\right|$$

$$= \max_{0\le x\le 1} \left|\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{5}{6}x\right| = \max_{0\le x\le 1} \frac{1}{6}\left|x^3 - 6x^2 + 5x\right|$$

Θεωρώ $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ / $[0,1]$

$g'(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $g'(x) = 0$, $\Delta = 144 - 4\cdot 3\cdot 5 = 84 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{84}}{6}$ = $x_1 = 3.5275 \notin [0,1]$, $x_2 = 0.4725 \in [0,1]$

Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ με

$g(0) = 0$, $g(0.4725) = 1.1285 > 0$, $g(1) = 0$

Άρα $\max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x) - p_3(x)| = 0.1881$

Στο διάστημα $[1,3]$ έχουμε

$\max\limits_{1 \le x \le 3} |f(x) - p_3(x)| = \max\limits_{1 \le x \le 3} \left| 0 + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1 \right|$

$= \max\limits_{1 \le x \le 3} \frac{1}{6} \left| x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \right|$

Θεωρώ $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ / $[1,3]$

$\varphi'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, $\varphi'(x) = 0$, $\Delta = 144 - 4\cdot 3\cdot 11 = 12$

$x_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{12}}{6}$ → $x_1 = 2.5774 \in [1,3]$, $x_2 = 1.4226 \in [1,3]$

Η φ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1,3]$ με

$\varphi(1) = 0$, $\varphi(1.4226) = 0.3849$,

$\varphi(2.5774) = -0.3849$ και $\varphi(3) = 0$

Άρα $\max\limits_{1 \le x \le 3} |f(x) - p_3(x)| = 0.06415$

Οπότε γενικά για όλο το $[0,3]$ έχουμε

$\max\limits_{0 \le x \le 3} |f(x) - p_3(x)| = 0.1881$

0.7

4. $x_{k+1} = x_k - \sin x_k, \quad k=0,1,2,\dots \quad (1)$

α) Έστω $\bar{x} = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ οπότε λόγω της (1)

$\bar{x} = \bar{x} - \sin\bar{x} \Rightarrow \sin\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

0.5

$g(x) = x - \sin x$
$g'(x) = 1 - \cos x$
$g''(x) = \sin x$
$g'''(x) = \cos x$

i) Έστω $\bar{x} = 2k\pi$ (άρτια π) $k\in\mathbb{Z}$

$g'(\bar{x}) = 0$
$g''(\bar{x}) = 0$
$g'''(\bar{x}) = 1$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα (Βιβλίο σελ. 157)

« Αν $g^{(i)}(\bar{x}) = 0$, για $1 \le i \le m-1$ η μέθοδος συγκλίνει και είναι τάξης m »

η μέθοδος είναι τάξης 3.

ii) Έστω $\bar{x} = (2k+1)\pi$ (περιττά π) $k\in\mathbb{Z}$

$g'(\bar{x}) = 2 \neq 0$

Άρα η μέθοδος είναι τάξης 1.

1

β) $g(x) = x - \sin x \; / \; \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

$g'(x) = 1 - \cos x$

x	$-\infty$		$-\pi/6$		0		$\pi/6$		$+\infty$
$g'(x)$				$+$	0	$+$			
$g(x)$				$\nearrow$		$\nearrow$			

Άρα $g \nearrow$ στο $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

Οπότε $g\left(\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]\right) = \left[g\left(-\frac{\pi}{6}\right), g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$$= \left[-\frac{\pi}{6} - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right] = \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}, \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right]$$

$$\subseteq \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$$

0.5

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0 \leq g'(x) \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

άρα $|g'(x)| \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.134 < 1$

Οπότε η μέθοδος συγκλίνει

0.5