

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
7-9-2004

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$10x_1 - x_2 + 2x_3 = 13$$

$$x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 19$$

$$-3x_1 - x_2 + 10x_3 = 16$$

Να ελεγχθεί αν η επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει και αν ναι να γίνουν 2 επαναλήψεις με μηδενικό αρχικό διάνυσμα. Να δοθεί επίσης μια εκτίμηση σφάλματος στη 2^η επανάληψη που να μη χρησιμοποιεί τον πίνακα επαναλήψεων της μεθόδου Gauss-Seidel.

2. α) Να κατασκευαστεί ο απλός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος αλλά με όρο σφάλματος (σφάλμα απλού τύπου

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

β) Να υπολογισθεί με τον σύνθετο τύπο ολοκλήρωσης τραπεζίου (N=4) το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^2 x^2 \ln x dx$$

Να βρεθεί το ελάχιστο N ώστε το σφάλμα με τον σύνθετο τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης τραπεζίου να είναι μικρότερο του 10^{-4} .

3. Εστω $c_i := l_i(0)$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$ όπου $l_i(x)$ τα πολυώνυμα Lagrange. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\sum_{i=0}^n c_i x_i^j = \begin{cases} 1, & \text{οταν } j = 0 \\ 0, & \text{οταν } j = 1, 2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \dots x_n, & \text{οταν } j = n + 1 \end{cases}$$

4. Δίνεται η εξίσωση $e^x - 5x = 0$, που έχει δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (2, 3)$. Δείξτε ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = \ln(5x_k)$, $k = 0, 1, \dots$ συγκλίνει στη ρίζα ρ_2 , $\forall x_0 \in [2, 3]$. Δείξτε επίσης ότι αν $\varepsilon_k = x_k - \rho_2$ τότε $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \rightarrow \frac{1}{\rho_2}$. Υπάρχει διάστημα που να περιέχει τη ρίζα ρ_1 στο οποίο να εξασφαλίζεται η σύγκλιση της παραπάνω γενικής επαναληπτικής μεθόδου στη ρίζα ρ_1 ;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Τα θέματα είναι ισοδύναμα
- Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ