

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ Η/Υ
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - 7/03/2008

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ 2 & -8 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Να ελεγχθεί πρώτα αν η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει και αν συγκλίνει, να γίνουν 2 επαναλήψεις της μεθόδου Gauss-Seidel, με μηδενικό αρχικό διάνυσμα. Να δοθεί επίσης μια καλή εκτίμηση του σφάλματος στη 2^η επανάληψη με $\|\cdot\|_\infty$.

2. α) Έστω η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_k = g(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$. Να διατυπωθεί αναλυτικά και να αποδειχθεί θεώρημα για τη σύγκλιση της μεθόδου στη μοναδική λύση της $x = g(x)$, στο $[a, b]$, για κάθε $x_0 \in [a, b]$.

β) Δίνεται η εξίσωση $\ln(x+1) - 2 = 0$. Να δειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = x_k - (x_k + 1) \cdot [\ln(x_k + 1) - 2]$, $k = 0, 1, \dots$ συγκλίνει στη μοναδική λύση ρ , για κάθε αρχικό σημείο x_0 αρκετά κοντά στη ρ . Να βρεθεί επίσης η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου.

3. α) Να βρεθεί η ασθενής μορφή του προβλήματος

$$\begin{cases} -u'' + (x+1)u = e^x, & \text{στο } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}.$$

β) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (που είναι ένα σύστημα αποτελούμενο από μια Διαφορική Εξίσωση 2^{ης} τάξης και μια Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} τάξης)

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 5z(x) - 3 = 0 \\ z'(x) = y'(x) + 2 \cdot z(x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, z(0) = 1 \end{cases}.$$

Να βρεθεί μια προσέγγιση της λύσης $(y, z)^T$ στο σημείο 0.1 με τη μέθοδο Euler με βήμα 0.1.

4. α) Να κατασκευαστεί ο απλός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Lagrange.

β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 \frac{4}{5-x} dx$ με το σύνθετο τύπο Τραπεζίου ($N=4$) (προσεγγιστικά χωρίς τον όρο σφάλματος). Από τον όρο σφάλματος του απλού τύπου του Τραπεζίου $E = -\frac{h^3}{12} f''(\mu)$ να υπολογισθεί ένα φράγμα για το σφάλμα του αντίστοιχου σύνθετου τύπου και στη συνέχεια να βρεθεί το ελάχιστο N , ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης του I με το σύνθετο τύπο Τραπεζίου να είναι μικρότερο από 10^{-6} .

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!