ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
3ο εξάμηνο
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - 6/2/2006

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

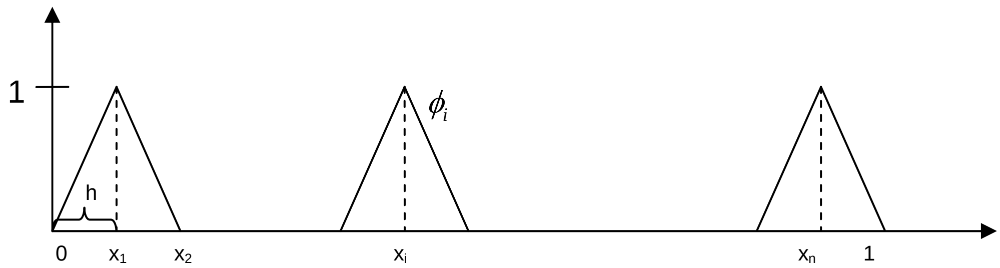
$$\begin{pmatrix} 20 & -2 & 3 \\ -1 & 10 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Να ελεγχθεί πρώτα αν η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει και αν συγκλίνει, να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Gauss-Seidel, με μηδενικό αρχικό διάνυσμα. Να δοθεί επίσης μια εκτίμηση του σφάλματος, στη δεύτερη επανάληψη, που να μη χρησιμοποιεί τον πίνακα επαναλήψεων της Gauss-Seidel. [2]

2. Έστω η εξίσωση $x = 2^{-x}$. Να δειχθεί ότι έχει μοναδική λύση ρ στο διάστημα $[\frac{1}{3},1]$ και ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = 2^{-x_k}$, $k = 0,1,...$ συγκλίνει για κάθε αρχικό σημείο $x_0 \in \left[\frac{1}{3},1\right]$. Να γίνουν τρεις επαναλήψεις της μεθόδου με αρχικό $x_0 = 0.75$, για να υπολογιστεί μια προσέγγιση της ρίζας ρ. Πόσες επιπλέον επαναλήψεις πρέπει να γίνουν ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 10^{-4}; Ποια είναι η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου; (με αιτιολόγηση). [3]

3. α) Να κατασκευαστεί ο απλός τύπος ολοκλήρωσης Τραπεζίου, χωρίς όρο σφάλματος χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο παρεμβολής σε μορφή Lagrange.

β) Να υπολογιστούν όλα τα ολοκληρώματα $\int_0^1 \phi_i(x)\phi_j(x)dx, \quad i,j = 1,...,n$, όπου $\phi_i, i = 1,...,n$ είναι οι συναρτήσεις στέγες χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης Simpson ώστε να υπολογιστούν ακριβώς τα ολοκληρώματα. [3]



4. Να υπολογιστεί, με τη μέθοδο Taylor δεύτερης τάξης, μια προσέγγιση της λύσης y της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = 2(x+1)y, \quad y(0) = 1$$

στο σημείο 0.2, με βήμα $h = 0.1$. Να βρεθεί το ολικό σφάλμα στο σημείο 0.2. (Δίνεται η ακριβής λύση $y(x) = e^{x^2+2x}$). [2]

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες. **Καλή επιτυχία!**