ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 21/9/01

1. α) Να οριστεί ο δείκτης κατάστασης μ ενός ομαλού πίνακα A και να αποδειχθεί ότι αν ο A είναι διαγώνιος με ίσα στοιχεία ($\neq 0$) τότε $\mu_\infty(A) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = 1$. Δείξτε με ένα παράδειγμα $2x2$ πίνακα ότι δεν είναι αλήθεια ότι μικρή ορίζουσα (κοντά στο 0) συνεπάγεται ότι το σύστημα είναι κακής κατάστασης.
β) Να αποδειχθεί ότι η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει για συστήματα με πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & a \end{pmatrix}, a > 0, b > 0, a > b$.

2. α) Να κατασκευαστεί ο απλός τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος τύπος.
β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \ln(1+x)dx$ με το σύνθετο τύπο τραπεζίου ($N = 4$) καθώς και μια εκτίμηση του σφάλματος ολοκλήρωσης.(Δίνεται το σφάλμα του **απλού** τύπου τραπεζίου $E(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$).

3. α) Να κατασκευαστεί η μέθοδος Newton-Raphson για την επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να δειχθεί ότι, κάτω από κατάλληλες υποθέσεις που θα δοθούν, συγκλίνει αν το αρχικό σημείο x_0 επιλεγεί 'κοντά' σε μια ρίζα της f.
β) Δίνεται η εξίσωση $f(x) = a - \frac{1}{x} = 0,\ a > 0$. Να δοθεί ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου Newton-Raphson για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης και να δειχθεί ότι

$$(x_{k+1} - \frac{1}{a}) = -a(x_k - \frac{1}{a})^2, k = 0,1,...$$

Αν η μέθοδος συγκλίνει στη ρίζα της f, να βρεθεί, με τη βοήθεια του ορισμού, η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου.

4. α) Έστω $f \in C^4[a,b]$ και x_0, x_1, x_2, x_3 διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $[a,b]$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $\xi(x) \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

όπου p το πολυώνυμο βαθμού ≤ 3 παρεμβολής Lagrange της f στα παραπάνω σημεία. (Ζητείται απόδειξη για τα δεδομένα σημεία και όχι εφαρμογή του γενικού θεωρήματος. Δίνεται η βοηθητική συνάρτηση $F(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)}\Phi(t)$, όπου $\Phi(t) = \prod_{i=0}^{3}(t - x_i)$)
β) Έστω p πολυώνυμο βαθμού ≤ 3, τέτοιο ώστε $p(k) = e^k, k = 1,2,3,4$. Να δειχθεί ότι $e^x > p(x)$ στο διάστημα $(2,3)$.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.5 ώρες