

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - 20/2/1999

1. α) Να δειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_k = Cx_{k-1} + d$ επίλυσης ενός ομαλού γραμμικού συστήματος $Ax = b$, $n \times n$, συγκλίνει για κάθε αρχικό διάνυσμα αν και μόνο αν $C^k \rightarrow O$. Συμπεράνετε ότι η μέθοδος συγκλίνει αν $\|C\| < 1$, για κάποιο νόρμα πίνακα. [1]
- β) Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου Gauss-Seidel για την επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 43 \\ 36 \\ 24 \\ 12 \end{bmatrix}$$

με αρχικό διάνυσμα $(1, 1, 1, 1)$, και να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος στη δεύτερη επανάληψη, χωρίς να υπολογιστεί ο πίνακας C της μεθόδου Gauss-Seidel. [1.5]

2. α) Να βρεθεί, με τις διηρημένες διαφορές, το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange σε μορφή Newton της συνάρτησης $f(x) = 1/x$, με σημεία παρεμβολής 1, 2, 4, 5. [0.5]
- β) Να βρεθεί μια όσο το δυνατό καλύτερη εκτίμηση του μέγιστου (σε απόλυτη τιμή) σφάλματος παρεμβολής Lagrange της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ στο διάστημα $[1, 2]$, με σημεία παρεμβολής 1, 1.5, 2. [1.5]

3. Δίνεται η εξίσωση (1) $f(x) = 2 - x - \ln x = 0$.

α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση (1) έχει μία μοναδική ρίζα \bar{x} στο \mathbf{R} και ότι ισχύει $\bar{x} \in [1.5, 1.6]$. [0.5]

β) Να γίνουν δύο επαναλήψεις της μεθόδου της Τέμνουσας, με αρχικά $x_0 = 1.5$ και $x_1 = 1.6$, για να βρεθεί μια προσέγγιση x_3 της ρίζας \bar{x} της εξίσωσης (1). [1]

γ) Με ποιά κατάλληλα κριτήρια μπορεί να ελεγχθεί εδώ αν ισχύει $|x_3 - \bar{x}| \leq 10^{-3}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας και εφαρμόστε τα κριτήρια αυτά. [1]

δ) Εστω μια εξίσωση $f(x) = 0$. Να δειχθεί ότι, αν η f είναι αρκετά ομαλή (π.χ. $f \in C^3$) κοντά σε μια ρίζα \bar{x} της f , $f'(\bar{x}) \neq 0$, και το αρχικό x_0 επιλεγεί αρκετά κοντά στη ρίζα \bar{x} , τότε η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει (υπεργραμμικά) και η σύγκλιση είναι μάλιστα τετραγωνική (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ανάπτυγμα Taylor της g). Εξετάστε την περίπτωση της εξίσωσης (1). [1.5]

4. Να δοθεί σύντομη περιγραφή της γενικής μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων για υπερορισμένα γραμμικά συστήματα και να εφαρμοστεί η μέθοδος στην εκτίμηση των παραμέτρων α και β του μοντέλου $y = \alpha e^{\beta t}$ βάσει των μετρήσεων

$$(t, y) = (1, 1), (2, 1.1), (3, 1.2), (4, 1.4). \quad [1.5]$$

Διάρκεια Εξέτασης: 2.5 ώρες.

Καλή Επιτυχία!