

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ - 17-9-1999

1. α) Να δοθεί ο ορισμός του δείκτη κατάστασης μ ενός ομαλού πίνακα $n \times n$ ως προς μια δεδομένη νόρμα πίνακα.

β) Εστω ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, με ομαλό $n \times n$ πίνακα A , και

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

το ελαφρά διαταραγμένο σύστημα. Να αποδειχθεί η ακόλουθη ανισότητα σχετικών σφαλμάτων που ισχύει κάτω από κατάλληλες υποθέσεις (που θα δοθούν)

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu}{1 - \mu \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

2. α) Να δειχθεί ότι ισχύει $\sum_0^n l_i(x) \equiv 1$, όπου $l_i, i = 0, \dots, n$, τα στοιχειώδη πολυώνυμα

Lagrange.

β) Να αποδειχθεί το θεώρημα σφάλματος παρεμβολής Lagrange.

3. Εστω το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

Να υπολογιστεί αριθμητικά το ολοκλήρωμα I με τη μέθοδο Τραπεζίου και με τη μέθοδο Simpson, με βήμα $h = 0.25$, και να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος ολοκλήρωσης και στις δύο περιπτώσεις. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με το ακριβές ολοκλήρωμα και το ακριβές σφάλμα.

4. Δίνεται η εξίσωση (1) $x = \frac{\cos x}{2}$ (το x σε ακτίνια).

α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση (1) έχει μια μοναδική ρίζα στο $[0, 1]$.

β) Να δειχθεί ότι η επαναληπτική μέθοδος $x_{k+1} = \frac{\cos x_k}{2}$, x_0 δεδομένο, συγκλίνει για

κάθε $x_0 \in [0, 1]$. Να γίνουν 5 επαναλήψεις της μεθόδου, με αρχικό $x_0 = 0.5$, και να δοθεί μία όσο το δυνατό καλύτερη εκτίμηση του σφάλματος στην πέμπτη επανάληψη.

γ) Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 2 - x - e^x = 0$. Να γίνουν τρεις επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson για την προσέγγιση μιας ρίζας (να επιλεγεί κατάλληλα ένα αρχικό x_0) και να δοθεί μια εκτίμηση του σφάλματος στην τρίτη επανάληψη.

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες.

Καλή Επιτυχία!